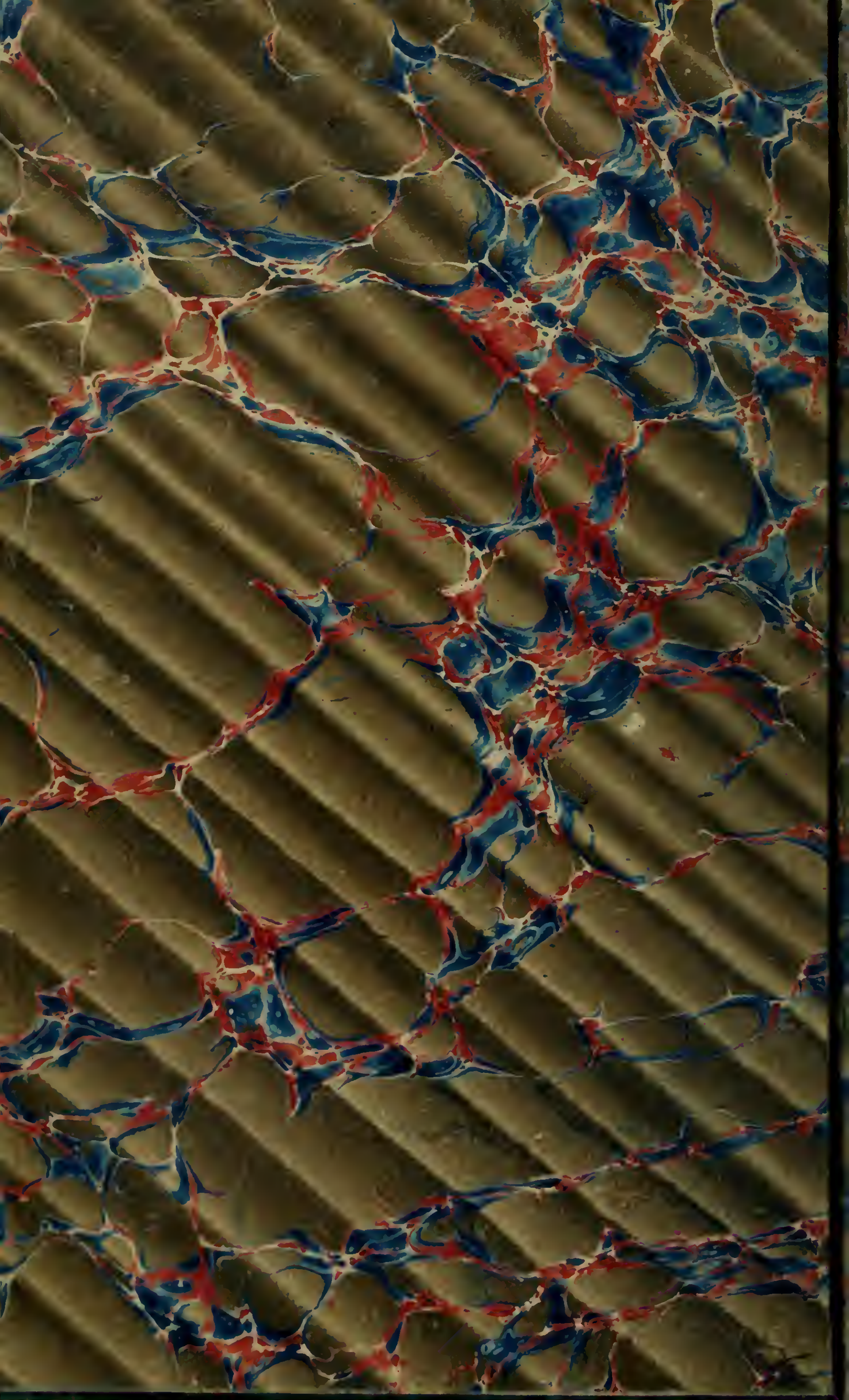
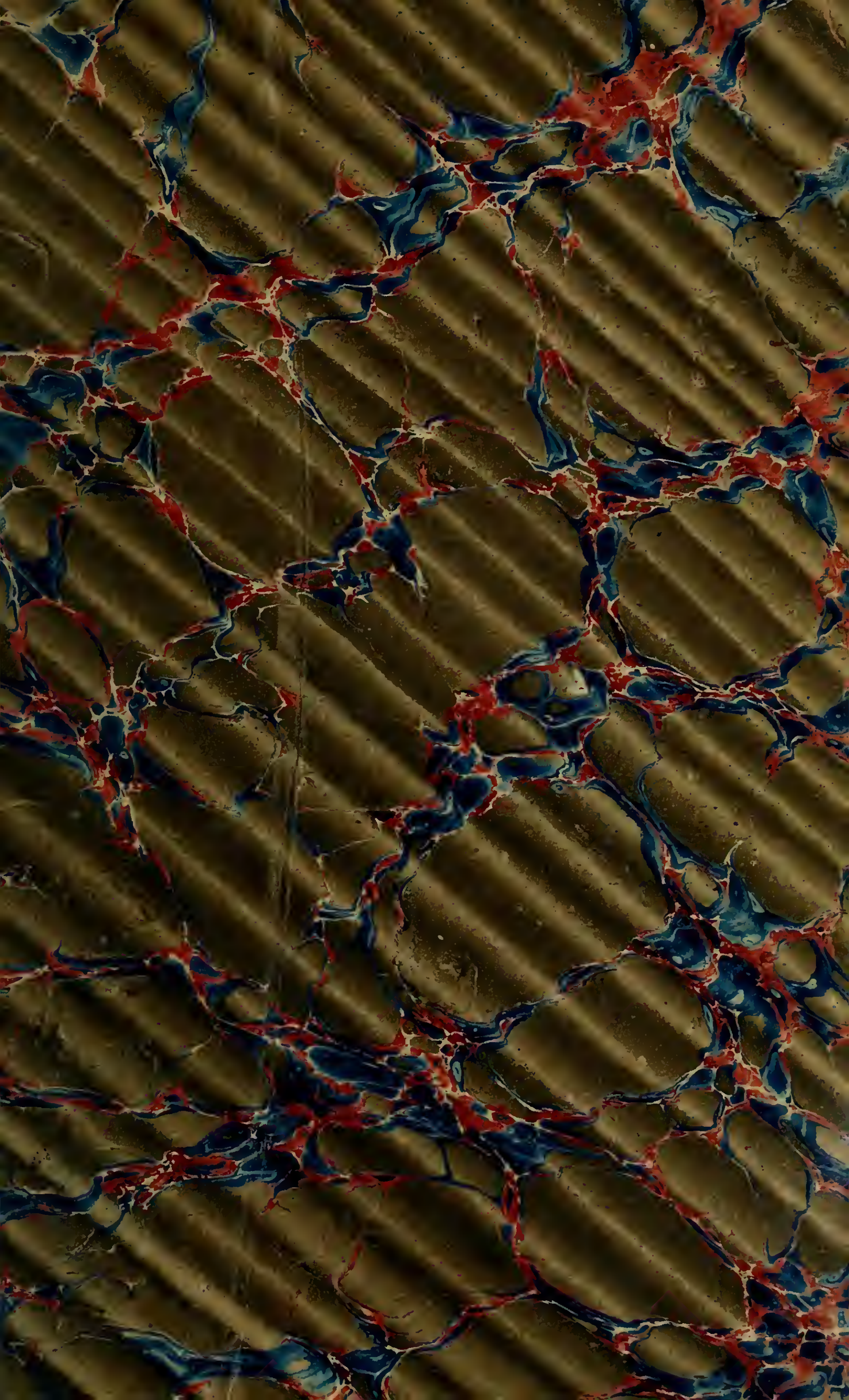

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY





JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
SPÉCIALES

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE, NORMALE ET CENTRALE

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

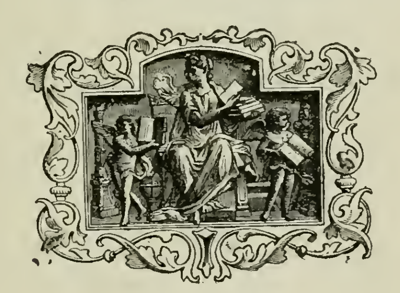
J. BOURGET
Recteur de l'Académie de Clermont.

DE LONGCHAMPS
Professeur de Mathématiques spéciales
au lycée Charlemagne,

VAZEILLE
Directeur des études
à l'école préparatoire de Sainte-Barbe.

2e SÉRIE

TOME TROISIÈME



Année 1884.

PARIS

LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE

15, RUE SOUFFLOT, 15

1884

· JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

NOTE SUR QUELQUES INÉGALITÉS

Par M. **Laguerre**.

1. — On sait que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignant n quantités positives, on a l'inégalité

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \geq n \sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}.$$

Cette proposition est évidente si n est égal à deux ; je me propose de faire voir que, si elle est vraie pour $n = k$, elle est encore vraie pour $n = k + 1$; elle sera ainsi établie dans toute sa généralité.

Je remarque, à cet effet, que le théorème précédent peut s'énoncer ainsi :

Si l'équation $Ax^k + Bx^{k-1} + \ldots + L = 0$, a k racines réelles négatives, on a

$$B \geq k \sqrt[k]{LA^{k-1}}.$$

Cela posé, en désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}$, $k + 1$ quantités positives, considérons l'équation

$$\frac{1}{x + \alpha_1} + \frac{1}{x + \alpha_2} + \ldots + \frac{1}{x + \alpha_{k+1}} = 0 ;$$

on sait qu'elle a k racines réelles et négatives et, en la mettant sous forme entière, elle devient

$$(k + 1)x^k + k(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k+1})x^{k-1} + \ldots$$
$$+ \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{k+1} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_{k+1}}\right) = 0.$$

La proposition étant supposée vraie pour k quantités, on a

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1}$$
$$\geq \sqrt{x_1 x_2 \dots x_{k+1}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{k+1}}\right)(k+1)^{k-1}},$$

ou, en élevant les deux nombres à la puissance k,

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1})^k$$
$$\geq (k+1)^{k-1}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{k+1}}\right) x_1 x_2 \dots x_{k+1}. \quad (1)$$

Changeons, ce qui est évidemment permis, les x_i en $\frac{1}{x_i}$, il vient

$$\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{k+1}}\right)^k \geq (k+1)^{k-1} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1}}{x_1 x_2 \dots x_{k+1}} \quad (2)$$

et, mulipliant les inégalités (1) et (2) après avoir élevé les deux termes de la première à la puissance k,

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1})^{k^2} \geq (k+1)^{k^2-1}(x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1})$$
$$(x_1 x_2 \dots x_{k+1})^{k-1};$$

d'où, en réduisant et extrayant la racine $(k^2 - 1)^{\text{me}}$ des deux membres

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} \geq (k+1) \sqrt[k+1]{x_1 x_2 \dots x_{k+1}}.$$

2. — Plus généralement, x_1, $x_2 \dots$, x_{n+1} désignant $n+1$ quantités positives arbitraires, considérons l'équation

$$\frac{A_1}{x + x_1} + \frac{A_2}{x + x_2} + \dots + \frac{A_{n+1}}{x + x_{n+1}} = 0, \quad (3)$$

où les A_i désignent des quantités positives.

Cette équation a toutes ses racines réelles et négatives; en la mettant sous forme entière, elle peut s'écrire

$$(A_1 + A_2 \dots + A_{n+1})x^n + [(A_1 + A_2 \dots + A_{n+1})(x_1 + x_2 \dots + x_{n+1})$$
$$- (A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_{n+1} x_{n+1})]x^{n-1}$$
$$+ \dots + x_1 x_2 \dots x_{n+1}\left(\frac{A_1}{x_1} + \frac{A_2}{x_2} + \dots + \frac{A_{n+1}}{x_{n+1}}\right) = 0.$$

En appliquant la proposition précédente, on obtient l'inégalité suivante,

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} - \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_{n+1} x_{n+1}}{A_1 + A_2 + \dots + A_{n+1}}$$
$$\geq n \sqrt{\frac{x_1 x_2 \dots x_{n+1}}{A_1 + A_2 + \dots + A_{n+1}}\left(\frac{A_1}{x_1} + \frac{A_2}{x_2} + \dots + \frac{A_{n+1}}{x_{n+1}}\right)}, \quad (4)$$

qui renferme l'inégalité précédente comme cas particulier, quand on y fait

$$A_1 = A_2 \ldots = A_n = 0,$$

et

$$A_{n+1} = 1.$$

Elle a lieu pour toutes les valeurs positives des quantités α_i et A_i et donne lieu à quelques applications intéressantes quand on particularise ces constantes, en faisant, par exemple,

$$\alpha_i = a_i^p \quad \text{et} \quad A_i = a_i^q,$$

les α_i désignant des quantités positives arbitraires, p et q désignant deux nombres réels quelconques.

3. — L'inégalité (4) ne suppose pas du reste expressément que toutes les quantités A_i soient positives ; il suffit que l'équation (3) ait toutes ses racines réelles et négatives ; c'est ce qui aura lieu si les quantités α_1, α_2, ... α_n étant supposées rangées par ordre croissant de grandeur, la suite des nombres A_1, A_2, ..., A_{n+1}, ne présente qu'une variation et si le produit

$$(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n+1})\left(\frac{A_1}{\alpha_1} + \frac{A_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{A_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\right)$$

est positif.

L'inégalité (4) subsiste donc encore dans ce cas.

4. — J'ajouterai encore une dernière remarque sur l'inégalité (4) où tous les A_i et les α_i désignent des quantités positives.

Elle peut s'écrire

$$\begin{gathered}[(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n+1})(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n+1}) \\ - (A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \ldots + A_{n+1}\alpha_{n+1})]^n\end{gathered}$$

$$\geq n^n \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_{n+1} (A_1 + A_2 \ldots + A_{n+1})^{n-1} \left(\frac{A_1}{\alpha_1} + \frac{A_2}{\alpha_2} \ldots + \frac{A_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\right).$$

Or on a

$$(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n+1})^{n-1} \geq (n+1)^{n-1}(A_1A_2 \ldots A_{n+1})^{\frac{n-1}{n+1}}$$

et

$$\frac{A_1}{\alpha_1} + \frac{A_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{A_{n+1}}{\alpha_{n+1}} \geq (n+1)\left(\frac{A_1A_2 \ldots A_{n+1}}{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n+1}}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

En multipliant ces diverses inégalités, il vient

$$[(A_1 + A_2 + \dots + A_{n+1})(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+1}) - (A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \dots + A_{n+1}\alpha_{n+1})]^n$$
$$\geq n^n(n + 1)^n(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n+1})^{\frac{n}{n+1}}(A_1A_2 \dots A_{n+1})^{\frac{n}{n+1}},$$

d'où encore

$$(A_1 + A_2 \dots + A_{n+1})(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + {}_{n+1}) - (A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \dots + A_{n+1}\alpha_{n+1})$$
$$\geq n(n + 1) \sqrt[n+1]{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n+1} \,.\, A_1A_2 \dots A_{n+1}},$$

qui donne la formule de Cauchy si l'on y fait

$$A_1 = A_2 \dots = A_{n+1} = 1.$$

On peut mettre encore cette inégalité sous la forme suivante :

$$A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \dots + A_{n+1}\alpha_{n+1}$$
$$\leq (A_1 + A_2 \dots A_{n+1})(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+1})$$
$$- n(n + 1) \sqrt[n+1]{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n+1} \,.\, A_1A_2 \dots A_{n+1}} \quad . \quad (5)$$

Cette formule est remarquable en ce que le second membre est symétrique par rapport aux A_i et aux α_i.

On a d'ailleurs

$$A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 \dots + A_{n+1}\alpha_{n+1} \geq (n + 1) \sqrt[n+1]{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n+1} \,.\, A_1A_2 \dots A_{n+1}} \quad (6)$$

NOTE D'ANALYSE

Par M. **S. Réalis.**

1° Démontrer que si le nombre entier x > 1 *est de l'une des formes* 5p + 1, 5p + 3, *le nombre triangulaire* $\frac{(x + 1)x}{2}$ *est égal à la somme de deux nombres triangulaires, et que si* x *appartient à l'une des formes* 5p, 5p + 2, 5p + 4, *il existe une infinité de valeurs de* $\frac{(x + 1)x}{2}$ *qui sont la somme de deux nombres triangulaires.*

2° Assigner, par une formule unique, une infinité de nombres triangulaires, tels que 6. 21, 36, 55, 66, 91, 120, 136, 171,

231, 276,..., 7140,..., 12720,.... 21945,..., *qui soient égaux, chacun, à une somme de deux nombres triangulaires.*

On a les identités

$$\frac{(5p+2)(5p+1)}{2} = \frac{(4p+2)(4p+1)}{2} + \frac{(3p+1).3p}{2},$$

$$\frac{(5p+4)(5p+3)}{2} = \frac{(4p+3)(4p+2)}{2} + \frac{(3p+3)(3p+2)}{2},$$

desquelles il résulte que, pour $x = 5p + 1$, et pour $x = 5p + 3$, le nombre triangulaire $n = \frac{(x+1)x}{2}$ est la somme de deux triangulaires.

L'identité

$$\frac{(x+1)x}{2} = x + \frac{x(x-1)}{2},$$

en y faisant $x = \frac{5h(5h \pm 1)}{2}$, nous fait voir ensuite qu'il existe une infinité de valeurs de x, de la forme $5p$, pour lesquelles n est une somme de deux triangulaires.

L'identité

$$[2\alpha p^2 + (2\alpha+1)p + \alpha + 1][2\alpha p^2 + (2\alpha+1)p + \alpha] = \frac{(2\alpha p + \alpha + 1)(2\alpha p + \alpha)}{2} + \frac{[2\alpha p^2 + (2\alpha+1)p + 1][2\alpha p^2 + (2\alpha+1)p]}{2}, \quad (A)$$

où nous considérerons α comme un entier positif donné, et où nous attribuerons à p une infinité de valeurs entières divisibles par un entier donné $\beta > \alpha$, nous fait voir enfin que, pour toute forme linéaire $\beta p + \alpha$ dans laquelle x doive être compris (par exemple, pour les formes $5p + 2$, $5p + 4$ signalées dans l'énoncé), on peut assigner directement une infinité de valeurs de x, telles que $\frac{(x+1)x}{2}$ remplisse la condition assignée. Il est clair, du reste, que, pour toute valeur entière, et différente de zéro, attribuée à α et à p, la formule (A) produit un nombre triangulaire qui est la somme de deux autres nombres de même espèce.

Il est à observer cependant que la relation (A) ne four-

nit pas tous les nombres n susceptibles de la décomposition indiquée. Par exemple, elle ne donne pas les résultats

$$378 = 78 + 300, \quad 820 = 190 + 630 = 495 + 325,$$
$$990 = 210 + 780, \text{ etc.}$$

que l'on peut obtenir par d'autres formules.

LA MULTIPLICATION DES DÉTERMINANTS

Par M. **Walecki**, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Condorcet.

Soient d, δ et D, trois déterminants du degré m ; D est formé par la règle suivante : l'élément de D, qui est dans la ligne p et dans la colonne r, est égal à la somme des produits des éléments de la ligne p dans d, respectivement multipliés par les éléments de la ligne r dans δ.

$$d = \begin{vmatrix} ab \dots c \\ a'b' \dots c' \\ \dots \\ a''b'' \dots c'' \end{vmatrix} \qquad \delta = \begin{vmatrix} \alpha\beta \dots \gamma \\ \alpha'\beta' \dots \gamma' \\ \dots \\ \alpha''\beta'' \dots \gamma'' \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a\alpha + b\beta + \dots + c\gamma & a\alpha' + b\beta' + \dots + c\gamma' & \dots \\ a'\alpha + b'\beta + \dots + c'\gamma & a'\alpha' + b'\beta' + \dots + c'\gamma' & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a''\alpha + b''\beta + \dots + c''\gamma & a''\alpha' + b''\beta' + \dots + c''\gamma' & \dots \end{vmatrix}$$

Il s'agit de démontrer que $\mathrm{D} = d.\,\delta$.

Chaque colonne de D étant composée de m files verticales, D est décomposable en m^m déterminants élémentaires, dont chacun se déduit de D en y remplaçant chaque colonne par l'une des files verticales qu'elle comprend.

Un déterminant élémentaire est nul si, pour le former, on a pris dans deux colonnes de D des files de même rang : en effet, ces deux files sont composés d'éléments proportionnels.

Si, pour former un déterminant élémentaire, on a pris dans les colonnes de D des files de rang tous différents, ce déterminant élémentaire est le produit de d par un facteur qui ne dépend que des éléments de δ ; dès lors D, qui

est la somme des déterminants élémentaires, peut s'écrire

$$D = d \times \varphi(\alpha \ldots \gamma''). \qquad (1)$$

$\varphi(\alpha \ldots \gamma')$ est un facteur qui ne dépend que des éléments de δ, et dont il s'agit de déterminer la valeur. Pour cela, on peut attribuer aux éléments de d telles valeurs que l'on veut, car φ n'en dépend pas ; si en particulier on remplace par l'unité chacun des éléments de la diagonale principale de d, et par des o tous les autres éléments, d devient égal à 1, D devient égal à δ, et comme φ n'a pas changé, l'égalité (1) devient

$$\delta = \varphi(\alpha \ldots \gamma''),$$

d'où

$$D = d \, . \, \delta \, ; \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

NOTE SUR LES COMBINAISONS COMPLÈTES

Par M. **Walecki**, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Condorcet.

Soit à trouver le nombre de combinaisons complètes de m lettres p à p.

Si $a, b, \ldots l$ sont les m lettres, chaque combinaison peut être figurée par un monôme $a^\alpha, b^\beta, \ldots l^\lambda$, où $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ sont m entiers, nuls ou positifs, dont la somme est égale à p ; il y aura autant de combinaisons que de manières de partager p unités entre m nombres nuls ou positifs. — Pour figurer une de ces partitions, je dispose sur une ligne $m - 1$ signes de séparation : des o, par exemple, puis j'écris les unités de α avant le premier o ; celles de β dans le premier intervalle et ainsi de suite, et enfin les unités de λ après le dernier o. Il n'y a rien à écrire pour un exposant qui serait nul. J'obtiens ainsi une suite, telle que : o. 1 1 o...o 1, formée de p unités et de $m - 1$ signes de séparation. Il y a autant de combinaisons que de suites de ce genre, et le nombre de ces suites est le nombre des permutations de $m + p - 1$ lettres dont p sont égales à l'unité, et $m - 1$ sont des o. Le nombre demandé est donc

$$\frac{(m + p - 1)!}{\overline{m - 1}! \, p!} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

SUR L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ

Par M. **R. Le Pont.**

La méthode que nous proposons aujourd'hui pour la résolution de l'équation du quatrième degré consiste à exprimer linéairement ses racines en fonction de celles d'une équation bicubique.

Considérons l'équation

$$x^4 + 6px^2 + 4qx + r = 0. \qquad (1)$$

Posant

$$x = y + z, \qquad (2)$$

elle devient en développant et ordonnant par rapport à y :

$$y^4 + 4zy^3 + 6(z^2 + p)y^2 + 4(z^3 + 3pz + q)y + z^4 + 6pz^2 + 4qz + z = 0 \qquad (3)$$

Annulant les termes de degré impair :

$$zy^2 + z^3 + 3pz + q = 0, \qquad (4)$$

l'équation (3) se réduit à

$$y^4 + 6(z^2 + p)y^2 + z^4 + 6pz^2 + 4qz + r = 0. \qquad (5)$$

Remplaçant dans (5) y^2 par sa valeur de (4)

$$y^2 = -z^2 - 3p - \frac{q}{z}, \qquad (6)$$

nous obtenons la réduite

$$4z^6 + 12pz^4 + (9p^2 - r)z^2 + q^2 = 0. \qquad (7)$$

Désignant par z_1, z_2, z_3 et $-z_1$, $-z_2$, $-z_3$ ses racines, nous avons

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = -3p$$

$$z_1^2\, z_2^2\, z_3^2 = \frac{q^2}{4}.$$

Remplaçant dans la valeur (6) de y^2, z par $\varepsilon_1 z_1$, il vient

$$y = \varepsilon_2 z_2 + \varepsilon_3 z_3, \qquad (8)$$

les ε désignant $+1$ ou -1. Par suite

$$x = \varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2 + \varepsilon_3 z_3. \qquad (9)$$

Les quatre valeurs de x :

$$x_1 = -z_1 - z_2 - z_3,$$

$$x_2 = -z_1 + z_2 + z_3,$$

$$x_3 = + z_1 - z_2 + z_3,$$
$$x_4 = + z_1 + z_2 - z_3,$$

pour lesquelles le produit $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ est négatif, sont les racines de l'équation proposée.

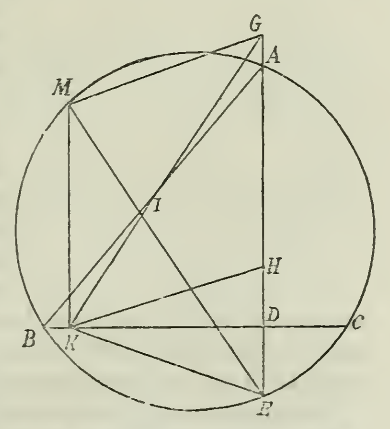
NOTE SUR LA DROITE DE SIMSON

Par M. **Weill**, professeur de Mathématiques spéciales au Collège Chaptal.

Je me propose d'établir par la géométrie les propriétés les plus importantes que l'on connaît sur la droite de Simson, et quelques propriétés nouvelles.

Lemme. — Étant donné un triangle ABC, si du point A on abaisse la hauteur AB qui rencontre le cercle circonscrit au point E, le point de concours H des hauteurs du triangle ABC s'obtient en prenant DH = DE.

Étant donné un triangle ABC et un point M de la circonférence circonscrite à ce triangle, les pieds des perpendiculaires abaissées du point M sur les côtés du triangle sont sur une droite que j'appellerai *droite de Simson relative au point* M *et au triangle* ABC.



Théorème I. — *La droite de Simson relative à un point* M *et à un triangle* ABC *passe par le milieu de* MH, H *étant le point de concours des hauteurs du triangle* ABC.

A partir du point H, point de concours des hauteurs du triangle BAC, prenons HG égale à la perpendiculaire MK, et joignons KG, KH, KE, MG. La figure EKMG est un trapèze isoscèle, car les angles en E et G sont égaux à cause de DH = DE.

Dans ce trapèze on a

$$KGE = MEG.$$

Mais MEG est égal à MBA. Donc

$$KGE = MBA.$$

Donc

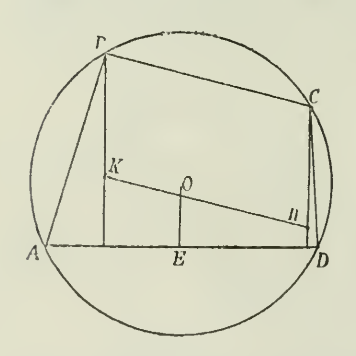
$$MBA = MKI.$$

Par suite, le quadrilatère MIKB est inscriptible, donc MIK est droit, et KIG est la droite de Simson relative à M et à ABC. Dans le parallélogramme MGHK, elle passe par le milieu de MH. C. Q. F. D.

Corollaire. — *Le point de concours des hauteurs d'un triangle circonscrit à une parabole est sur la directrice.*

Il suffit de considérer la parabole ayant pour foyer M et inscrite au triangle ABC ; elle a pour tangente au sommet la droite de Simson KG; par suite, en vertu du théorème précédent, la directrice passe par H.

Théorème II. — *Étant donnés quatre points* A, B, C, D *d'une circonférence, les points de concours des hauteurs des triangles qu'on peut former avec ces points pris trois à trois, sont les sommets d'un quadrilatère égal à* ABCD.



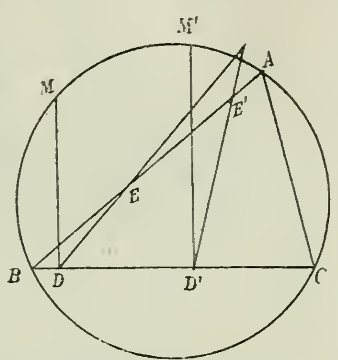
On sait que la distance CH du point C au point de concours H des hauteurs du triangle ACD est double de la distance du centre O du cercle circonscrit au côté AD. Dès lors la droite KH, qui joint les points de concours des hauteurs du triangle ABD et du triangle ACD, est égale et parallèle à BC, et le théorème est démontré.

Les quatre points de concours des hauteurs H, K, L, M sont sur un cercle égal à celui des points donnés, et le centre de similitude des deux cercles est au milieu *commun* des quatre droites BH, CK, AL, DM.

Théorème III. — *Étant donnés quatre points* ABCD *d'une circonférence, les droites de Simson relatives à chacun des points et au triangle des trois autres concourent en un même point.*

Ce théorème est une conséquence des deux précédents.

Théorème IV. — *L'angle de deux droites de Simson relatives à deux points* M *et* M′ *et à un triangle* ABC *est la moitié de l'angle* MOM′, O *étant le centre du cercle circonscrit au triangle* ABC.



Soient D, E, D′ E′ les projections de M et M′ sur BC et BA.

L'angle des droites DE, D′E′ est égal à la différence

$$MDE - M'D'E' = MBE - M'BE'.$$

Cette différence a pour mesure la moitié de l'arc MM′, ce qui démontre le théorème.

Théorème V. — *Deux droites de Simson relatives aux deux points* M, M′ *et au triangle* ABC *interceptent sur le cercle des neuf points de ce triangle deux arcs dont l'un est double de l'autre.*

En effet, le point H de concours des hauteurs du triangle ABC est un centre de similitude pour le cercle des neuf points et le cercle circonscrit, et les milieux de MH et M′H, qui sont des points P et Q des deux droites de Simson, sont sur le cercle des neuf points. L'arc PQ de ce dernier cercle est moitié de l'arc MM′. Les deux droites de Simson rencontrent encore le cercle des neuf points en P_1 et Q_1. L'angle des droites de Simson a pour mesure, d'une part, la demi-circonférence des arcs P_1Q_1 et PQ ; d'autre part, la moitié de l'arc PQ qui est moitié de MM′. Donc on a bien

$$\text{arc } P_1Q_1 = 2 . PQ.$$

Théorème VI. — *Étant donnée une droite de Simson relative au point* M *et au triangle* ABC, *si* P *est le point où elle rencontre* MH, *et si* P_1 *est le second point où elle rencontre le cercle des neuf points du triangle, on obtient le point* S *où la droite de Simson, variable avec* M, *touche son enveloppe, en portant sur* P_1P *une longueur* PS *égale à* P_1P.

En effet, considérons une droite de Simson Q_1 Q infiniment voisine de la première et la rencontrant au point T. On aura

$$\text{arc } P_1Q_1 = 2 \text{ . arc } PQ.$$

On a

$$\frac{\text{corde } PQ}{\text{corde } P_1Q_1} = \frac{TP}{TQ_1}$$

A la limite, on a

$$\frac{TP}{TQ_1} = \frac{TP}{TP_1}$$

et

$$\frac{\text{corde } PQ}{\text{corde } P_1Q_1} = \frac{\text{arc } PQ}{\text{arc } P_1Q_1} = \frac{1}{2};$$

donc $TP = PP_1$ à la limite; C. Q. F. D.

Théorème VII. — *Soient* A *et* B *deux points fixes d'une circonférence, et* CD *une corde variable, telle que l'on ait*

$$\text{arc } AC = k \text{ . arc } BD:$$

1° *On obtient le point où* CD *touche son enveloppe en portant sur* CD, *à partir de* D, *une longueur* $DS = \frac{DC}{k - 1}$;

2° *L'enveloppe de* CD *est une hypocycloïde dans laquelle le rapport des rayons des circonférences est* $\frac{(k + 1)}{(k - 1)}$.

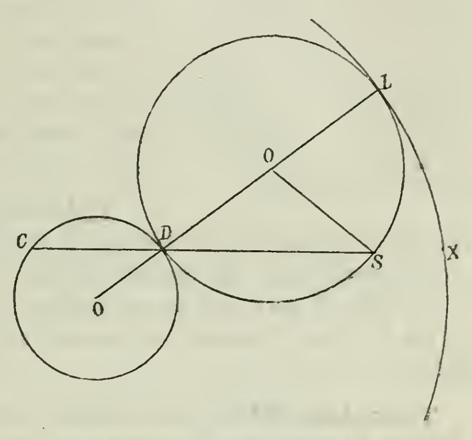
La première partie du théorème se démontre comme le précédent.

Pour démontrer la seconde partie, décrivons une circonférence passant en S et D, et touchant en D la circonférence fixe donnée, on aura

$$\frac{OD}{DO'} = \frac{CD}{DS} = (k - 1):$$

$$OL = OD + 2.DO' = OD\,\frac{k+1}{k-1} = R.$$

De O comme centre, décrivons une circonférence de rayon R, et prenons sur cette circonférence à partir du point A et dans un sens convenable, un arc AX égal à l'arc AS. Le point S appartiendra à l'hypocycloïde engendrée par un point du cercle O'D roulant sur le cercle OL, l'origine du mouvement étant en X, et CDS est la tangente en S à cette courbe, d'après un théorème bien connu.



Théorème VIII. — *Étant donnée une droite de Simson relative à un point variable* M *et à un triangle fixe* ABC, *elle a pour enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements, engendrée par un point d'un cercle roulant intérieurement sur un autre de rayon triple. Le centre du cercle fixe coïncide avec le centre du cercle des neuf points du triangle* ABC, *et son rayon est le triple du rayon de ce cercle.*

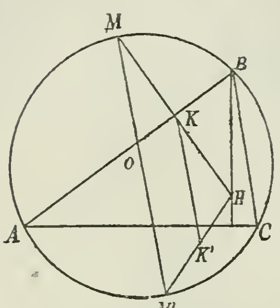
Ce théorème est une conséquence immédiate des deux précédents.

Théorème IX.— *Les droites de Simson relatives à deux points* M *et* M' *diamétralememt opposés sur la circonférence circonscrite au triangle* ABC, *se coupent à angle droit.*

Ce théorème est un cas particulier du théorème V.

Théorème X. — *Deux droites de Simson rectangulaires se coupent sur la circonférence des neuf points du triangle* ABC.

En effet, soient M et M′ les extrémités du diamètre du cercle circonscrit au triangle ; joignons HM, HM′ et soient K et K′ les milieux de ces droites, KK′ est un diamètre du cercle des neuf points ; donc le point de rencontre S des deux droites de Simson rectangulaires qui passent par K et K′ est sur le cercle ayant KK′ pour diamètre, c'est-à-dire sur le cercle des neuf points.



Théorème XI. — *Deux droites de Simson rectangulaires interceptent sur un côté* AC *du triangle deux segments* AP, CQ *égaux entre eux.*

En effet, P et Q sont les projections sur AC des extrémités M et M′ d'un diamètre du cercle circonscrit au triangle BAC.

Théorème XII.— *Deux droites de Simson rectangulaires sont les asymptotes d'une hyperbole équilatère passant par les trois sommets du triangle* ABC.

Ce théorème résulte du précédent, en vertu d'une propriété connue de l'hyperbole.

Théorème XIII. — *Étant donné un triangle* ABC *inscrit dans une hyperbole équilatère, si aux trois points où les côtés de ce triangle rencontrent une asymptote, on élève des perpendiculaires à ces côtés, elles sont concourantes.*

Ce théorème est un autre énoncé du précédent.

Théorème XIV. — *Si l'on considère une parabole et une hyperbole équilatère ayant pour l'une de ses asymptotes la tangente au sommet de cette parabole, il existe une infinité de triangles à la fois inscrits dans l'hyperbole et circonscrits à la parabole.*

En effet, il existe un pareil triangle, en vertu des théorèmes qui précèdent, et, par suite, une infinité.

(A suivre.)

VARIÉTÉS

Nous trouvons dans le Bulletin de M. Darboux une lettre de M. *Sélivanof* à M. Hermite sur la résolution de l'équation du quatrième degré; c'est un emploi très élégant des théorèmes connus sur les formes homogènes du second degré; et nous sommes heureux de le faire connaître à nos jeunes lecteurs; nous reproduisons le sens précis de la lettre de M. Sélivanof, en prenant seulement la liberté de modifier le texte, mais sans *trahir* l'auteur.

Soit $f(x, y) = Ax^4 + 4Bx^3y + 6Cx^2y^2 + 4Dxy^3 + Fy^4$, une forme homogène du quatrième degré à deux variables; posons

$$x^2 = \alpha,\ 2xy = \beta,\ y^2 = \gamma,$$

la forme homogène du quatrième degré deviendra une forme homogène du second degré à trois variables:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + 6C\alpha\gamma + 2D\beta\gamma + E\gamma^2,$$

et cette forme homogène, qui est incomplète puisqu'elle manque du terme en β^2, peut, en introduisant un paramètre arbitraire λ, s'écrire

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = A\alpha^2 + \lambda\beta^2 + E\gamma^2 + 2D\beta\gamma \\ + 2(3C - 2\lambda)\gamma\alpha + 2B\alpha\beta.$$

Si l'on détermine λ de manière à annuler le discriminant de cette forme homogène du second degré, on aura l'équation du troisième degré :

$$\begin{vmatrix} A & B & 3C - 2\lambda \\ B & \lambda & D \\ 3C - 2\lambda & D & E \end{vmatrix} = 0$$

et chaque racine de cette équation, portée dans la forme homogène $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$, la transformera en la somme algébrique de deux carrés :

$$(m\alpha + n\beta + p\gamma)^2 + (m'\alpha + n'\beta + p'\gamma)^2,$$

et par conséquent transformera $f(x, y)$ en

$$(mx^2 + 2nx + p)^2 + (m'x^2 + 2n'x + p')^2,$$

comme le fait la méthode de Ferrari; nous recommandons à nos lecteurs de se familiariser avec ce procédé.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. S. Realis à M. G. de Longchamps. — ..... Permettez-moi, Monsieur, au sujet des notes insérées aux pages 102 et 141 du *Journal de Mathématiques spéciales* (1883), de rappeler un article publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2e Série, t. IV, p. 209) et où j'ai rattaché la résolution de l'équation cubique

$$x^3 - 3px + q = 0$$

à celle des équations de Moivre.

Après avoir établi dans cet article le fait très connu que, dans le cas particulier de

$$q^2 - 4p^3 = 0,$$

deux racines de l'équation sont égales, j'ai signalé la décomposition :

$$x^3 - 3x\sqrt[3]{\frac{q}{2}} + p = \left(x + 2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}\right)\left(x - \sqrt[3]{\frac{q}{2}}\right)^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$x^3 - 3px + 2p\sqrt{p} = (x + 2\sqrt{p})(x - \sqrt{p})^2.$$

Cette décomposition, très facile à obtenir directement, permet donc. dans la théorie de l'équation du troisième degré. de traiter le cas de deux racines égales, préalablement à la résolution algébrique de l'équation générale.

Il n'y a là, assurément, rien de nouveau, et je ne rappelle ici cette identité que parcequ'elle me semble de nature à simplifier et à compléter la conclusion de la seconde note mentionnée. E. VAZEILLE.

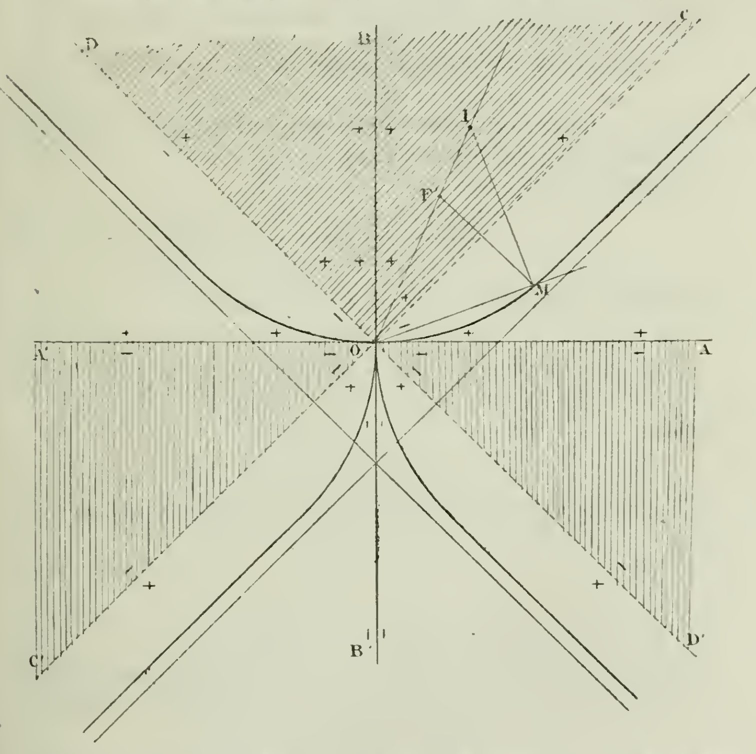
QUESTION 58

Solution par M. Gindre.

On donne la courbe dont l'équation est

$$y^4 - x^4 + 2ax^2y = 0.$$

1° On propose d'abord de construire cette courbe C; *2° soit* M *un point quelconque de* C, *on joint* OM, *et on trace une droite* Δ, *symétrique de* OM *par rapport à la bissectrice de l'angle des*



axes; cette droite Δ *rencontre la perpendiculaire élevée au point* M *à la droite* OM, *en un point* I *: démontrer que le lieu géométrique de ce point* I *est une hyperbole équilatère; 3° sur* OI

on prend OI′ = MI. *Démontrer que le lieu du point* I′ *est un cercle.*

1° Pour construire la courbe précédente, je pose

$$y = tx,$$

et j'obtiens pour x et y les valeurs

$$x = \frac{2at}{1 - t^4}, \qquad y = \frac{2at^2}{1 - t^4}$$

en fonction d'un seul paramètre variable t.

Je remarque d'abord que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des y; il suffira donc, pour obtenir entièrement la courbe, de faire varier t de o à $\frac{\pi}{2}$ et de o à $-\frac{\pi}{2}$.

Les valeurs de x et y deviennent infinies pour

$$t = \pm 1.$$

Il y aura donc deux directions asymptotiques, qui sont les bissectrices des angles des axes.

La différence

$$y - x = \frac{2at^2 - 2at}{1 - t^4} = \frac{-2at}{(1 + t^2)(1 + t)}$$

devient $-\frac{a}{2}$ pour $t = +1$, et la somme

$$y + x = \frac{2at(1 + t)}{1 - t^4} = \frac{2at}{(1 + t^2)(1 - t)}$$

devient $-\frac{a}{2}$ pour

$$t = -1.$$

La courbe présente donc les deux asymptotes réelles

$$y = x - \frac{a}{2},$$

$$y = -x - \frac{a}{2}.$$

Ces deux asymptotes rencontrent la courbe aux points déterminés par les valeurs de t satisfaisant aux équations

$$(1 - t)^2(t^2 + 2t - 1) = 0,$$

et

$$(1 + t)^2(t^2 - 2t - 1) = 0.$$

La courbe présente un point triple à l'origine, les tan-

gentes en ce point sont les axes eux-mêmes, l'axe des y étant une tangente double.

La courbe a la forme ci-contre.

2° Je considère un point quelconque N de C, déterminé par la valeur t: la droite Δ, symétrique de OM, par rapport à la bissectrice de l'angle des axes, sera déterminée par l'angle IOX, dont la tangente est

$$\operatorname{tg}\left[2\left(\frac{\pi}{4}-\lambda\right)+\lambda\right]=\frac{\pi}{2}-\lambda=\frac{1}{t}.$$

Les coordonnées du point I seront

$$x = \mathrm{OI}\,.\cos\overline{\mathrm{IOX}}$$

et

$$y = \mathrm{OI}\,.\sin\overline{\mathrm{IOX}}.$$

Mais

$$\mathrm{OI} = \frac{\mathrm{OM}}{\cos\frac{\pi}{2}-2\lambda} = \frac{\mathrm{OM}}{\sin 2\lambda}$$

et

$$\mathrm{OM} = \frac{\sqrt{4a^2t^4+4a^2t^2}}{1-t^4} = \frac{2at}{(1-t^2)\sqrt{1+t^2}};$$

par suite le lieu du point I sera défini par

$$x = \frac{2at\cos\overline{\mathrm{IOX}}}{(1-t^2)\sqrt{1+t^2}\sin 2\lambda} = \frac{at}{1-t^2}$$

$$y = \frac{2at\sin\overline{\mathrm{IOX}}}{(1-t^2)\sqrt{1+t^2}\sin 2\lambda} = \frac{a}{1-t^2}$$

Ces relations définissent une hyperbole équilatère, dont le centre est joint au point $x=0$, $y=\frac{a}{2}$ et dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices de l'angle des axes : on construit facilement cette hyperbole, au moyen des deux relations

$$x = ty, \qquad y = \frac{a}{1-t^2}.$$

3° On prend sur la droite Δ, un point I', tel que MI = OI';
or $\mathrm{MI} = \mathrm{OM}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-2\lambda\right) = \frac{\mathrm{OM}}{\operatorname{tg}2\lambda} = \frac{\mathrm{OM}\,(1-t^2)}{2t} = \frac{a}{\sqrt{1+t^2}}$

Les coordonnées du point I′ seront donc données par

$$x = \mathrm{OI'} \cos \overline{\mathrm{IOX}} = \mathrm{MI} \sin \lambda = \frac{at}{1 + t^2}$$

$$y = \overline{\mathrm{OI'}} \sin \overline{\mathrm{IOX}} = \mathrm{MI} \cos \lambda = \frac{a}{1 + t^2}$$

Ce lieu défini par les équations

$$x = ty \quad \text{et } y = \frac{a}{2 + t^2}$$

est un cercle, ayant pour centre le point $x = 0$, $y = \dfrac{a}{2}$,

et pour rayon la longueur $\dfrac{a}{2}$.

Nota.— La même question a été résolue par MM. de Kerdrel, à Kéruzoret; Ferval, Azéma, au lycée Henri IV, à Paris; Levaire, pensionnat des Maristes, à Plaisance; Amouroux, à Grenoble; Giat, à Moulins; Pornay, à Toulouse Corot, à Troyes.

BIBLIOGRAPHIE

Éléments de la théorie des déterminants, avec de nombreux exercices, par *P. Mansion*, professeur ordinaire à l'Université de Gand (quatrième édition). Paris, librairie Gauthier-Villars.

Ce petit ouvrage de M. Mansion est trop connu de la plupart de nos lecteurs, il a eu un trop réel et trop légitime succès pour que nous voulions en faire ici une analyse. Tous ceux qui s'intéressent au mouvement moderne des mathématiques savent quelle large part cette théorie des déterminants et ses applications multiples ont prise dans nos cours de mathématiques spéciales. C'est cette algèbre nouvelle qui a si profondément attaqué l'enseignement ancien, et lui a substitué, avec un autre ordre d'idées, des méthodes et des démonstrations nouvelles. On peut dire, croyons-nous, sans exagération, que les propriétés des déterminants, et la pratique du calcul algébrique qui leur correspond, sont la base la plus ordinaire de cet enseignement nouveau auquel nous venons de faire allusion.

Nous ne rappelons ce fait très connu que pour en déduire l'observation (à l'adresse de nos jeunes lecteurs, candidats à l'École Polytechnique ou à l'École Normale) qu'il devient de plus en plus nécessaire de se familiariser avec l'algèbre des déterminants. C'est cette pensée qui nous pousse à leur signaler, comme une chose des plus utiles pour eux, la lecture du livre de M. Mansion. Ces éléments renferment un très grand nombre d'exercices, parmi lesquels beaucoup sont résolus. La quatrième

édition renferme aussi un chapitre préliminaire traitant des déterminants à deux ou trois lignes. Les démonstrations sont présentées sous un jour tout à fait simple et élémentaire; les commençants, ceux pour qu la notation des indices offre quelque difficulté, pourront, en lisant l'ouvrage que nous leur recommandons ici, franchir plus facilement les premières difficultés que présente la théorie des déterminants.

G. L.

QUESTIONS PROPOSÉES

88. — On considère une ellipse E, et le cercle Δ décrit sur le petit axe BB′ comme diamètre. Sur BB′, à partir du centre O, on prend deux points P, P′ tels que l'on ait

$$OP = OP' = \frac{bc}{a};$$

par ces points P et P′, on mène deux droites parallèles et dans la même direction; ces droites rencontrent Δ en des points Q et Q′. Trouver le lieu décrit par le point de rencontre des tangentes à Δ aux points Q et Q′. *(G. L.)*

89. — On considère un cercle Δ, et l'on prend sur la circonférence un point mobile M. Ayant joint ce point aux extrémités d'un diamètre fixe AB, du point M on abaisse sur AB une perpendiculaire MP; le cercle décrit de M comme centre avec MP pour rayon rencontre MA en A′ et MB en B′. Le lieu décrit par le point de rencontre de MP et de A′B′ est une courbe du dixième degré, ayant pour points quadruples les points A et B. On montrera que si AB est l'axe des x, l'équation peut se résoudre par rapport à y, et l'on donnera la forme générale de cette courbe, qui est une unicursale. *(G. L.)*

90. — Construire le lieu des pieds des normales menées d'un point fixe S, à la suite des circonférences qui touchent deux droites fixes données. — Examiner : 1° le cas particulier où le point fixe S est sur l'une des deux droites données; 2° le cas où le point S est également distant des deux droites données; 3° le cas où le point S se transporte à l'infini dans une direction donnée. *(E. V.)*

91.— On donne un point fixe O et une droite fixe AB; pour chaque point P de AB on prend, normalement à AB, PM $= \lambda \cdot OP$, λ étant une constante. Quel est le lieu du point M, et quel est le problème simple de géométrie descriptive que l'on peut regarder comme l'origine du problème actuel?

(E. V.)

92. — On donne une circonférence fixe O, et une droite fixe, AB. Sur chaque tangente à la circonférence on prend le point M, de telle sorte que le point de contact P soit le milieu du segment QM limité d'un côté au point M, et de l'autre côté sur la droite fixe AB. Quel est le lieu du point M? – On examinera en particulier le cas où la droite AB est tangente à la circonférence, et le cas particulier où la droite AB est un diamètre de la circonférence. *(E. V.)*

93. — On donne deux coniques fixes U et V, et un point fixe S ; par le point S, on mène une transversale arbitraire qui détermine sur U un segment (m', m'') et sur V un segment (n'', n''), et l'on demande : 1° le lieu du centre de l'involution déterminée par ces deux segments ; 2° le lieu des points doubles de cette involution. — Expliquer comment ce dernier lieu peut devenir le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe à une série de coniques homofocales. *(E. V.)*

AVIS

L'abondance des matières nous oblige à remettre au prochain numéro la suite de l'étude sur les nouvelles fractions continues.

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 378-4.

SUR UNE

NOUVELLE ESPÈCE DE FRACTIONS CONTINUES

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir année 1883, p. 193, 217, 241, 269.)

XIV. Application à un exemple numérique. — Avant d'aller plus loin dans cette théorie, il sera peut-être utile de montrer sur un exemple numérique comment on peut, *par de simples additions*, extraire une racine carrée en appliquant la méthode que nous exposons.

Prenons une équation du second degré, à coefficients commensurables, par exemple l'équation

$$x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Cette équation a une racine supérieure à l'unité et nous pourrons trouver, par notre méthode, des valeurs de plus en plus approchées de la plus petite racine $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$. Comme nous l'avons démontré, les calculs que nous allons indiquer donnent des nombres ayant cette irrationnelle pour limite.

A cet effet, considérons l'équation de récurrence,

$$u_n - 3u_{n-1} + u_{n-2} = 0$$

et prenons quatre nombres *arbitrairement*, $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1$; $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$. Ces nombres doivent, naturellement, être pris avec une valeur très simple, et sous cette réserve que l'on n'ait pas $\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 = 0$.

Pour le dire en passant, cette latitude absolue laissée aux constantes initiales permet, par un choix convenablement fait, de se rapprocher plus rapidement de la valeur de l'irrationnelle ; mais cette considération n'est pas entrée dans la détermination du choix précédent, qui n'a été inspiré que par la pensée de prendre des valeurs initiales simples et, aussi, par une autre idée que nous indiquerons tout à l'heure.

Les nombres récurrents α_n, β_n se calculent alors par les formules

$$\alpha_n = 3\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}.$$
$$\beta_n = 3\beta_{n-1} - \beta_{n-2};$$

et l'on peut écrire .

$$\frac{X}{Y} = \frac{1+1+2+5+13+34+233+610+1597+4181+10946+\dots}{1+2+5+13+34+\dots\dots}.$$

On voit d'abord, d'après ce résultat, quelle est l'idée à laquelle nous venons de faire allusion. La loi de récurrence des fonctions β étant la même que celle des fonctions α, si l'on fait en sorte de choisir

$$1^\circ\ \beta_0 = \alpha_1,\quad 2^\circ\ \beta_1 = \alpha_2 = 3\alpha_1 - \alpha_0,$$

les nombres β_2, β_3, ... seront respectivement égaux aux nombres α_3, α_4, ... ; et les calculs se trouvent ainsi abrégés de moitié.

Calculons maintenant les réduites successives, comme le montre le tableau ci-dessous :

$\frac{X_0}{Y_0}$	$\frac{X_1}{Y_1}$	$\frac{X_2}{Y}$	$\frac{X_3}{Y_3}$	$\frac{X_4}{Y_4}$	$\frac{X_5}{Y_5}$	$\frac{X_6}{Y_6}$	$\frac{X_7}{Y_7}$
$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{9}{21}$	$\frac{22}{55}$	$\frac{56}{144}$	$\frac{145}{377}$	$\frac{378}{987}$
1	0,6..	0,5	0,4..	0,38..	0,38..	0,38..	0,38..

$\frac{X_8}{Y_8}$	$\frac{X_9}{Y_9}$	$\frac{X_{10}}{Y_{10}}$	$\frac{X_{11}}{Y_{11}}$
$\frac{988}{2584}$	$\frac{2585}{6765}$	$\frac{6766}{17711}$	$\frac{17712}{46368}$
0,38..	0,38..	0,38..	0,381..

Si l'on rapproche ces nombres du résultat connu :

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0,381\,9682\dots$$

on voit que c'est seulement la réduite d'indice 11 qui a donné le chiffre exact des millièmes; mais il faut considérer que les termes qui composent cette réduite ont été obtenus par un procédé des plus simples et qui consiste : 1° à tripler le nombre précédemment obtenu; 2° à retrancher de ce résultat le nombre anté-précédent; 3° à ajouter tous les nombres ainsi calculés.

Mais on peut encore abréger ces calculs et obtenir, par voie récurrente, les nombres X_n, Y_n, comme nous allons l'indiquer maintenant.

XV. Récurrence des fonctions X_n et Y_n. — L'équation proposée étant

$$x^2 - 2px + q = 0, \qquad (A)$$

on a, pour calcul des fonctions α, les égalités suivantes

$$(1)\left\{\begin{array}{r} \alpha_n - 2p\alpha_{n-1} + q\alpha_{n-2} = 0, \\ \alpha_{n-1} - 2p\alpha_{n-2} + q\alpha_{n-3} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_2 - 2p\alpha_1 + q\alpha_0 = 0. \end{array}\right.$$

D'ailleurs, on a aussi,

$$X_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Les égalités (1) donnent donc

$$X_n - \alpha_0 - \alpha_1 - 2p(X_{n-1} - \alpha_0) + qX_{n-2} = 0. \qquad (B)$$

Changeons n en $n - 1$, nous avons

$$X_{n-1} - \alpha_0 - \alpha_1 - 2p(X_{n-2} - \alpha_0) + qX_{n-3} = 0$$

et, par suite,

$$X_n - (2p + 1)X_{n-1} + (2p + q)X_{n-2} - qX_{n-3} = 0. \qquad (C)$$

C'est une relation de récurrence à laquelle on peut appliquer le théorème de Lagrange, et, en observant que l'équation génératrice est, dans cet exemple,

$$z^3 - (2p + 1)z^2 + (2p + q)z - q = 0,$$

ou

$$(z - 1)(z^2 - 2pz + q) = 0,$$

on voit donc que, en appelant x', x'' les racines de (A), on a

$$X_n = A + Bx'^n + Cx''^n. \qquad (D)$$

Cette formule s'applique, bien entendu, aux fonctions Y_n, en choisissant convenablement les constantes A, B, C.

XVI. Calcul des constantes A, B, C. — En faisant, successivement, dans la formule (B), $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, on a

$$X_0 = \alpha_0 = A + B + C,$$
$$X_1 = \alpha_0 + \alpha_1 = A + Bx' + Cx'',$$
$$X_2 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = A + Bx'^2 + Cx''^2.$$

Nous allons résoudre ces trois équations, en tenant compte des relations

$$\alpha_2 - 2p\alpha_1 + q\alpha_0 = 0,$$
$$x' + x'' = 2p,$$
$$x'x'' = q.$$

Le déterminant Δ de ces inconnues est

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x' & x'' \\ 1 & x'^2 & x''^2 \end{vmatrix}$$

ou

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x' - 1 & x'' - 1 \\ 1 & x'^2 - 1 & x''^2 - 1 \end{vmatrix}$$

ou, enfin.

$$\Delta = (x' - x'')(q - 2p + 1) = (x'' - x')(x' - 1)(x'' - 1).$$

Les racines de l'équation (A) ne sont pas commensurables et, dans cette hypothèse, Δ n'est pas nul. Un calcul évident donne pour A, B, C les valeurs suivantes :

$$A = \frac{\alpha_1 + \alpha_0 (1 - 2p)}{(x' - 1)(x'' - 1)},$$
$$B = \frac{x'(\alpha_1 - \alpha_0 x'')}{(x' - x'')(x' - 1)},$$
$$C = \frac{(x''\alpha_1 - \alpha_0 x')}{(x'' - x')(x'' - 1)}.$$

La constante A peut être nulle, si la constante α_1 vérifie l'égalité

$$\alpha_1 = \alpha_0 (2p - 1),$$

mais les constantes B et C sont nécessairement différentes de zéro, x' et x'' n'étant pas des nombres commensurables.

XVII. Récurrence des fonctions Z_n. — Pour étudier les fonctions $\frac{X_n}{Y_n}$ et, notamment, pour savoir si elles vont, ou non, en croissant, il est naturel de former la différence :

$$\frac{X_n}{Y_n} - \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}},$$

et l'on est ainsi conduit à poser

$$Z_n = X_n Y_{n-1} - Y_n X_{n-1}.$$

Nous nous proposons de rechercher la récurrence de ces fonctions Z_n.

L'égalité (B) donne, après avoir posé $K = \alpha_1 + \alpha_0(1 - 2p)$,

$$X_n = 2pX_{n-1} - qX_{n-2} + K.$$

On a, de même,

$$Y_n = 2pY_{n-1} - qY_{n-2} + K'. \quad [K' = \beta_1 + \beta_0(1 - 2p)].$$

On en déduit, par combinaison,

$$X_nY_{n-1} - Y_nX_{n-1} = q(X_{n-1}Y_{n-2} - Y_{n-1}X_{n-2}) + KY_{n-1} - K'X_{n-1}$$

ou

$$Z_n = qZ_{n-1} + KY_{n-1} - K'X_{n-1}$$

et, par suite,

$$Z_{n-1} = qZ_{n-2} + KY_{n-2} - K'X_{n-2},$$
$$Z_{n-2} = qZ_{n-3} + KY_{n-3} - K'X_{n-3}.$$

Multiplions ces trois dernières égalités respectivement par : 1, $-2p$, et q; le facteur de K se trouve égal à K' ; celui de K', égal à K ; et nous avons, finalement,

$$Z_n - (2p + q)Z_{n-1} + q(1 + 2p)Z_{n-2} - q^2Z_{n-3} = 0.$$

C'est la loi de récurrence des fonctions Z_n.

XVIII. Recherche de l'intégrale Z_n. — Pour trouver la fonction Z_n, nous devrons considérer l'équation

$$x^3 - (2p + q)x^2 + q(1 + 2p)x - q^2 = 0,$$

ou la suivante :

$$(x - q)(x^2 + 2px + q) = 0.$$

Ainsi les trois racines de l'équation génératrice sont : x', x'' et $x'x''$. L'intégrale Z_n est donc, conformément au théorème de Lagrange, donnée par la formule

$$Z_n = A'x'^nx''^n + B'x'^n + C'x''^n.$$

En posant

$$\delta = \alpha_0\beta_1 - \beta_0\alpha_1.$$

on trouve, d'abord,

$$Z_1 = -\delta.$$
$$Z_2 = -(2p + q)\delta,$$
$$Z_3 = (q - q^2 - 2pq - 4p^2)\delta :$$

puis

$$-A' = \frac{\delta}{(x' - 1)(x'' - 1)}.$$

$$-B' = \frac{\delta}{(x'' - 1)(x'' - x')}.$$

$$-C' = \frac{\delta}{(x' - 1)(x' - x'')}.$$

Ces quantités ont une somme nulle, mais chacune d'elles représente un nombre fini et différent de zéro.

(A suivre.)

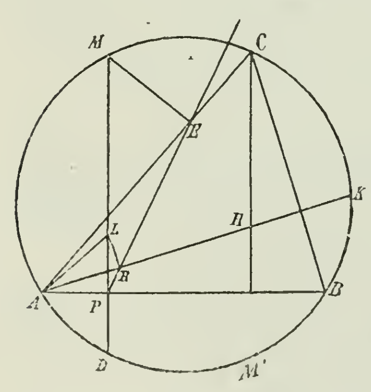
NOTE SUR LA DROITE DE SIMSON

Par **M. Weill**, professeur de Mathématiques spéciales au Collège Chaptal.

(*Suite*, voir page 11.)

Théorème XV. — *Une droite de Simson relative à un point* M *et à un triangle* ABC *est droite de Simson relative au triangle* ABH *et au point de rencontre des hauteurs du triangle* MAB.

Abaissons du point M une perpendiculaire MP sur AB, laquelle rencontre en D le cercle circonscrit. Soit PE la droite de Simson correspondant à M et au triangle ABC. Soit AK la hauteur du triangle ABC, elle rencontre en R la droite PE; élevons en R une perpendiculaire sur AK, cette perpendiculaire rencontre MP en L. Notre théorème sera démontré si nous prouvons que l'on a



$$PL = PD, \text{ ou } ALP = ADP.$$

Or, on a

$$ALP = ARP = RPB - RAP.$$

$$RPB = \frac{\pi}{2} - RPL = \frac{\pi}{2} - MAE.$$

Donc RPB a pour mesure la moitié de l'arc CM', M étant diamétralement opposé à M; RAP a pour mesure la moitié de l'arc KB. Donc ALP a pour mesure

$$\frac{1}{2}\,\text{arc}\,.\,CM' - \frac{1}{2}\,\text{arc}\,KB = \frac{1}{2}\,(CK + BM')$$
$$= \frac{1}{2}\,(\pi - AM')$$
$$= \frac{1}{2}\,(AM).$$

Donc on a bien $ALP = ADP$.

Théorème XVI. — *Une droite de Simson relative à un point* M *et au triangle* ABC *est droite de Simson relative aux trois triangles formés avec deux sommets du premier et le point de concours de ses hauteurs.*

Ce théorème n'est que la traduction du précédent.

Théorème XVII. — *L'hyperbole équilatère qui passe par les trois sommets d'un triangle passe par le point de concours des hauteurs de ce triangle; son centre est sur le cercle des neuf points du triangle; ses asymptotes sont tangentes à une hypocycloïde à trois rebroussements.*

Ce théorème résulte des précédents.

Théorème XVIII. — *Par un point passent trois droites de Simson; il existe un triangle ayant pour hauteurs ces trois droites et pour côtés trois autres droites de Simson.*

Rappelons que si l'on considère une droite de Simson rencontrant le cercle des neuf points en P et P_1, et si l'on prend sur ce cercle deux arcs PQ et P_1Q_1, dont l'un est double de l'autre, la droite QQ_1 est une droite de Simson.

Soit E le point de rencontre des deux droites de Simson PP_1 et QQ_1. Les perpendiculaires P_1G, Q_1K à ces droites seront des droites de Simson, puisqu'elles coupent les premières à angle droit sur le cercle des neuf points. On a

$$\text{arc}\,P_1Q_1 = 2\,.\,\text{arc}\,PQ,$$

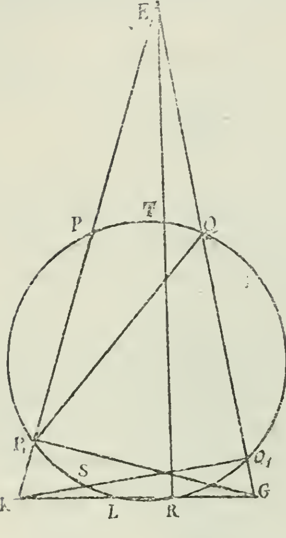
donc EQP_1 est isoscèle, donc $QE = QP_1$.

Par suite, $QE = QG$. De même $EP = PK$.

Ceci prouve que le triangle EKG a pour son cercle des neuf points le cercle considéré.

Donc, si L et R sont les points où KG rencontre ce cercle,

L est le milieu de KG, et R est le pied de la troisième hauteur du triangle EKG. On a donc



$$LK = LG = LQ_1.$$

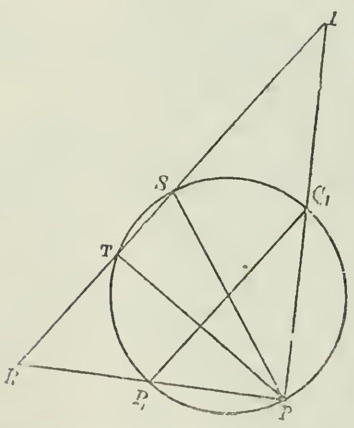
Le triangle Q_1LK étant isoscèle, les angles LKQ_1 et LQ_1K sont égaux; donc l'arc RQ_1 est double de l'arc LS. Comme Q_1S est droite de Simson, on voit que KG est aussi droite de Simson. Actuellement, si l'on considère les trois droites de Simson, KL, KS, KP, les trois droites de Simson qui leur sont perpendiculaires sont: ER, troisième hauteur du triangle EKG, EQ, P_1G; elles forment un triangle dont les trois premières sont les hauteurs. Il reste à démontrer que ER est droite de Simson; or elle rencontre le cercle en un point T, et l'on a

$$TEQ = SKL;$$

donc

$$\text{arc}TQ = \text{arc}LS = \frac{1}{2} \text{ arc } RQ_1,$$

donc la proposition est démontrée.



Théorème XIX. — *La distance des points de contact de deux droites de Simson rectangulaires avec leur enveloppe est constante, et la droite qui joint les deux points est une droite de Simson.*

Soient PQ_1, et PP_1 deux droites de Simson rectangulaires passant par un point P du cercle des neuf points. Si l'on prolonge PQ_1 et PP_1 de longueurs $Q_1L = PQ_1$ et $P_1R = PP_1$, les points L et R sont

eux ou ces deux droites touchent leur enveloppe. LR rencontre le cercle au point S diamétralement opposé à P et au point T symétrique de P par rapport à P_1Q_1. Donc on a

$$\text{arc PT} = 2 \,.\, \text{arc } Q_1S.$$

Donc LR est une droite de Simson ; sa longueur est constante et égale à quatre fois le rayon du cercle des neuf points. Il est à remarquer que PT est une droite de Simson.

Théorème XX. — *Toute tangente à l'hypocycloïde à trois rebroussements en un point* P *rencontre la courbe en deux points* M, N, *tels que les tangentes à la courbe en ces points sont rectangulaires: le segment* MN *est de longueur constante; il existe une tangente à l'hypocycloïde, perpendiculaire à la première, et passant par le point de rencontre des tangentes en* M *et* N.

Ce théorème n'est qu'un énoncé du précédent.

Théorème XXI.— *L'hypocycloïde à trois rebroussements, enveloppe des droites de Simson, est une courbe de la troisième classe et du quatrième degré.*

Ce théorème résulte des théorèmes XVIII et XIX, convenablement interprétés.

Théorème XXII. — *Étant donnés un point* M *et un triangle* ABC, *si du point* M *on abaisse une perpendiculaire sur la droite de Simson qui lui correspond, cette perpendiculaire est une droite de Simson relative au triangle obtenu en menant par les sommets de* ABC *des parallèles aux côtés opposés.*

Abaissons du point M les perpendiculaires ME, MD sur AB et BC. La droite ED sera la droite de Simson relative au point M et au triangle ABC. Menons par le point C une parallèle à AB, laquelle rencontre en G la droite ME, en C_1 le cercle circonscrit à ABC, et en R la perpendiculaire abaissée de M sur DE. Cette dernière perpendiculaire rencontre DE en K, et AB en L. On a

$$EMK = KEL = BMD = GMC_1.$$

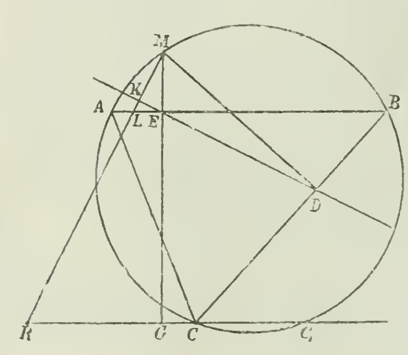
Donc

$$GR = GC_1.$$

Il est facile de démontrer que le triangle ABC, et le triangle A′B′C′ obtenu en menant par les sommets du premier des

parallèles aux côtés opposés, sont homothétiques, le centre d'homothétie étant le centre de gravité de $A'B'C'$. On en conclut que le point de concours des hauteurs du triangle $A'B'C'$ est au point de rencontre des perpendiculaires élevées en C_1, A_1, B_1, sur les côtés $A'B'$, $B'C'$, $A'C'$. Soit H_1 ce point.

Élevons en R une perpendiculaire sur GR, elle rencontrera H_1M en un point M_1. On aura $H_1M = MM_1$ à cause de $GC_1 = GR$. Dès lors ce point M_1 appartiendra aux trois perpendiculaires élevées aux côtés de $A'B'C'$ par le point R et les deux points analogues à R. Donc enfin MR est droite de Simson relative à M_1 et aux côtés du triangle $A'B'C'$. On voit de plus que lorsque M varie, la droite MM_1 passe par le point fixe H_1.



Théorème XXIII. — *Étant donnés une parabole et un triangle circonscrit, si l'on considère le triangle obtenu en menant par les sommets du premier des parallèles aux côtés opposés, il existe une parabole inscrite à ce triangle et ayant pour tangente au sommet l'axe de la première. La droite qui joint les foyers des deux paraboles passe par le point de concours* H_1 *des hauteurs du grand triangle; on a* $H_1F = FF_1$, *en désignant par* F *et* F_1 *le foyer de la première parabole et celui de la seconde.*

Ce théorème est une traduction du précédent.

Théorème XXIV. — *On considère un triangle fixe* ABC *et une suite de paraboles inscrites à ce triangle; par le foyer* F *de chacune d'elles on mène une droite faisant avec l'axe de la parabole un angle donné* α; *l'enveloppe de ces droites est une hypocycloïde à trois rebroussements. Quand* α *varie, toutes les hypocycloïdes correspondantes sont égales entre elles et ne font que tourner autour du centre du cercle circonscrit au triangle.*

Soient F et F_1 deux positions du foyer, et FK, F_1K_1 les deux droites correspondantes, qui rencontrent le cercle circonscrit au triangle en F et K, et en F_1 et K_1. L'angle des droites FK et F_1K_1 est égal à celui des droites de Simson correspondant au triangle ABC et aux deux points F,F_1. Donc cet angle est la moitié de l'angle au centre FOF_1. Il a pour mesure

$$\frac{1}{2} \text{ arc } KK_1 - \frac{1}{2} \text{ arc } FF_1 ;$$

donc on a

$$\text{arc } KK_2 = 2 \ . \ \text{arc } FF_1.$$

Par suite, en laissant fixe la droite FK, on voit que la droite variable F_1K_1 enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements. Le centre du cercle fixe de cette courbe est en O, et son rayon est triple de celui du cercle circonscrit au triangle ABC. Ceci démontre le théorème énoncé.

Donnons à α une valeur, et considérons les droites FX, F_1X_1 . . . correspondantes. Elles seront tangentes à une même hypocycloïde. D'un point quelconque P menons à cette courbe les trois tangentes ; les tangentes perpendiculaires à celles-là formeront un triangle RST dont les premières sont les hauteurs. Ceci posé, FX. F_1X_1, etc., seront les axes d'une parabole variable inscrite au triangle RST ;cela résulte des théorèmes précédents ; on voit que le triangle RST peut être choisi d'une double infinité de manières ; il a un cercle des neuf points toujours le même. *(A suivre.)*

QUESTION 59

Solution par M. Jérôme Callé, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Grenoble.

Lieu des centres des coniques de surface donnée circonscrites à un triangle. — Examiner spécialement le cas des hyperboles. Étudier dans ce cas les branches infinies et les sinuosités de la courbe. (Amigues.)

Prenons pour axes deux côtés OA et OB du triangle, et

posons

$$OA = 2a, \quad OB = 2b.$$

Soit θ l'angle des axes.

L'équation générale des coniques circonscrites sera

$$Ax(x - 2a) + 2Bxy + Cy(y - 2b) = 0. \qquad (1)$$

Soit (x, y) le centre d'une de ces coniques. La surface de la conique devant être constante, par suite le rectangle des carrés des axes constant et égal à m^4, on aura entre x et y la relation

$$(Aax + Cby)^2 \sin^2\theta + m^4(B^2 - AC) = 0. \qquad (2)$$

D'ailleurs, x et y satisfont aux deux relations

$$\left\{\begin{array}{l} A(x - a) + By = 0 \\ Bx + C(y - b) = 0. \end{array}\right. \qquad (3)$$

Éliminant A, B, C entre (2) et (3), on aura l'équation du lieu. Or de (3) on tire

$$A = -\frac{By}{x - a}; \quad C = -\frac{Bx}{y - b}.$$

Portant dans (2), il vient, après suppression du facteur B^2, évanouissement des dénominateurs et réduction dans le dernier terme,

$$x^2y^2(bx + ay - 2ab)^2 \sin^2\theta$$
$$- m^4(x - a)(y - b)(bx + ay - ab) = 0. \qquad (I)$$

Le lieu cherché est donc du sixième degré.

Nous avons supposé que le produit des carrés des axes était positif; nous nous sommes donc placé dans le cas des ellipses. Pour nous mettre dans le cas des hyperboles, il suffira de changer le signe de m^4.

I. Cas des ellipses. Points doubles, tangentes. — On voit aisément sur l'équation qu'il y a *trois points doubles*, dont les coordonnées sont

$$(a.o), \quad (o.b) \quad \text{et} \quad (a.b).$$

Ce sont les milieux des trois côtés du triangle.

Portant l'origine au premier, A' (milieu de OA), l'équation devient

$$(x + a)^2y^2(bx + ay - ab)^2 \sin^2\theta$$
$$- m^4x(y - b)(bx + ay) = 0. \qquad (I')$$

Les tangentes en ce point sont données par l'équation

$$a^4 b \sin^2 \theta \cdot y^2 + m^4 axy + m^4 bx^2 = 0.$$

La condition de réalité est

$$m^4 a^2 (m^4 - 4a^2 b^2 \sin^2 \theta) > 0,$$

ou

$$m^2 \geq 2ab \sin \theta,$$

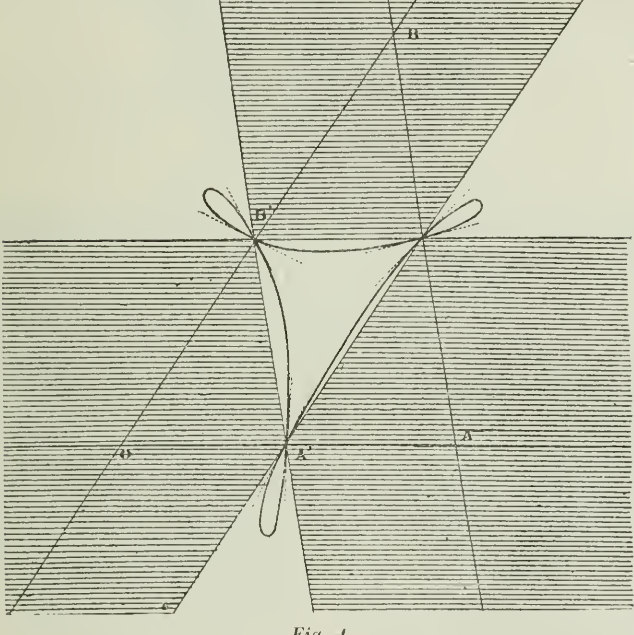


Fig. 1.

c'est-à-dire que le rectangle des axes de la conique doit être supérieur ou égal à la surface du triangle donné. Si cette condition est remplie, les deux tangentes sont situées dans le deuxième angle des axes. — La condition est évidemment la même pour les autres points doubles, car rien ne distingue l'un des côtés du triangle des deux autres. On peut d'ailleurs le voir très aisément par deux nouveaux transports de coordonnées. Donc :

Si $m^2 > 2ab \sin \theta$, la courbe a trois points doubles réels, avec tangentes distinctes (*fig. 1*).

Si $m^2 = 2ab \sin \theta$, la courbe a trois points de rebroussement (*fig. 2*).

Si $m^2 < 2ab \sin \theta$, la courbe a trois points doubles imaginaires (*fig. 3*).

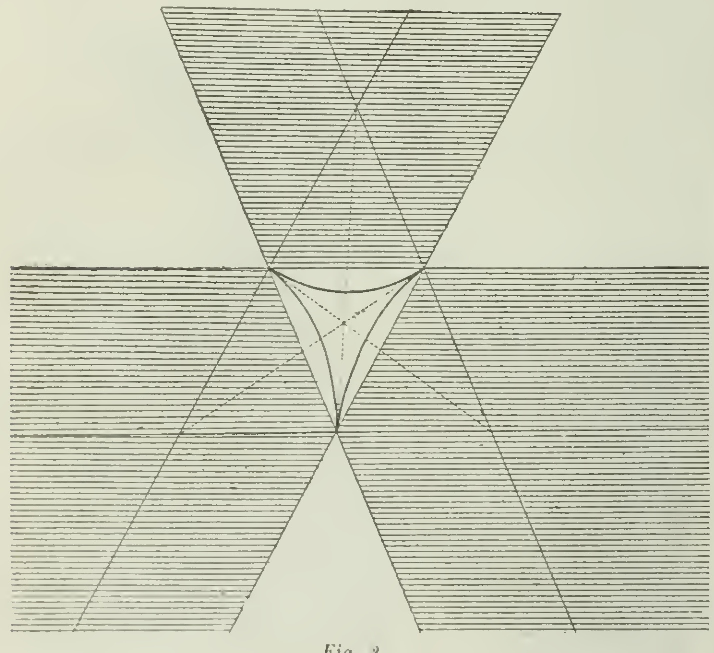


Fig. 2.

— Dans le cas où les deux tangentes se confondent, leur coefficient angulaire commun est

$$t = - \frac{m^4}{2a^2b \sin^2 \theta}$$

et en tenant compte de la relation

$$m^2 = 2ab \sin \theta, \qquad t = - \frac{b}{2a}.$$

La tangente est donc la médiane correspondant au côté OA. De même aux deux autres points.

Voyons si ces points doubles ne peuvent pas être *points doubles d'inflexion.*

Dans (I'), posons $y = tx$; cette équation devient après suppression de la racine $x^2 = 0$

$$t^2(x + a)^2[(b + at)x - ab]^2 \sin^2 \theta - m^4(tx - b)(b + at) = 0.$$

La droite $y = tx$ sera tangente d'inflexion, si nous pouvons trouver une valeur de t annulant à la fois les coefficients des deux termes de degré moindre, c'est-à-dire satisfaisant aux équations :

$$a^4 b \sin^2 \theta t^2 + m^4 at + m^4 b = 0$$
$$2a^4 b \sin^2 \theta t^2 + m^4 at + m^4 b = 0,$$

ce qui exige évidemment $a = 0$, ou $b = 0$.

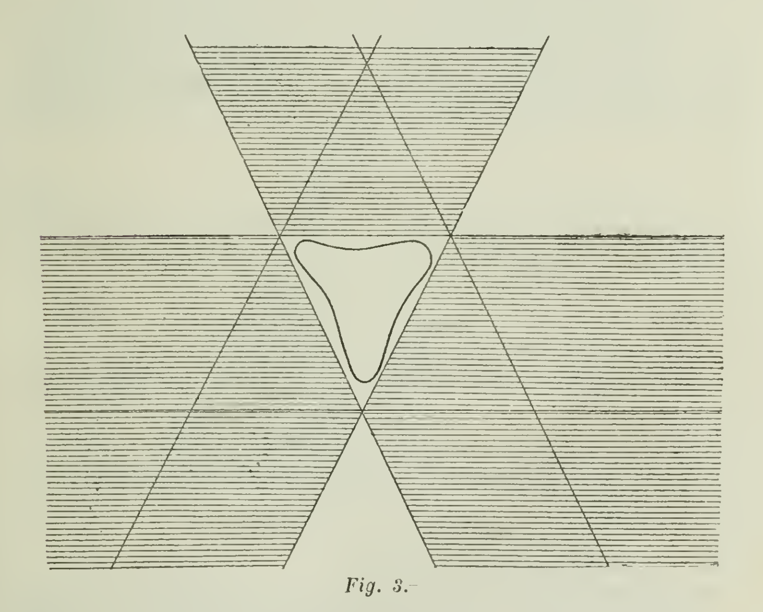


Fig. 3.

Régions. — On voit immédiatement en construisant les droites $x - a = 0$, $y - b = 0$, $bx + ay - ab = 0$, qu'il ne peut y avoir de points de la courbe dans les régions ombrées.

Asymptotes. — Il y a trois directions asymptotiques,

qui sont les trois côtés du triangle. Les deux axes sont les asymptotes de leurs directions. — Le troisième côté du triangle, ne jouissant d'aucune propriété distincte, sera aussi l'asymptote de la sienne. On le vérifie aisément, d'ailleurs, en cherchant l'ordonnée à l'origine, qui est racine de l'équation

$$\frac{u^2}{1\,.\,2}\,\varphi''_m(1\,.\,c) + u\varphi'_{m-1}(1\,.\,c) + \varphi_{m-2}(1\,.\,c) = 0,$$

qui se réduit à $(u - 2b)^2 = 0$.

Dans le cas présent, les asymptotes sont dans les régions ombrées, donc les branches de courbe correspondantes sont imaginaires.

Remarque. — Il est clair que le lieu des centres sera imaginaire si on donne à m^2 une valeur inférieure au rectangle des axes de l'ellipse minimum circonscrite au triangle, lequel est, comme on sait,

$$\frac{8ab \sin \theta}{3\sqrt{3}}.$$

II. Cas des hyperboles. — L'équation s'obtient en changeant le signe de m^4 dans (I), ce qui donne

$$x^2y^2(bx + ay - 2ab)^2 \sin^2 \theta$$
$$+ m^4(x - a)(y - b)(bx + ay - ab) = 0. \qquad \text{(II)}$$

Voyons quels sont les changements :

Les asymptotes sont les mêmes, car elles ne dépendent pas de m^4.

Les points doubles sont aussi les mêmes, et la condition de réalité des tangentes en ces points est, en changeant le signe de m^4,

$$m^4a^2(m^4 + 4a^2b^2 \sin^2 \theta) > 0.$$

Elle est donc toujours remplie.

Les points doubles ne peuvent devenir points de rebroussement dans ce cas, sauf le cas particulier de $a = 0$, où leur coefficient angulaire commun serait infini : car les coefficients de y^2 et de xy s'annulent dans leur équation.

C'est encore dans les seuls cas particuliers de $a = 0$, $b = 0$, que les points doubles pourront devenir points doubles d'inflexion.

Les régions ombrées sont simplement transposées.
La courbe générale a la forme représentée par la figure 4.

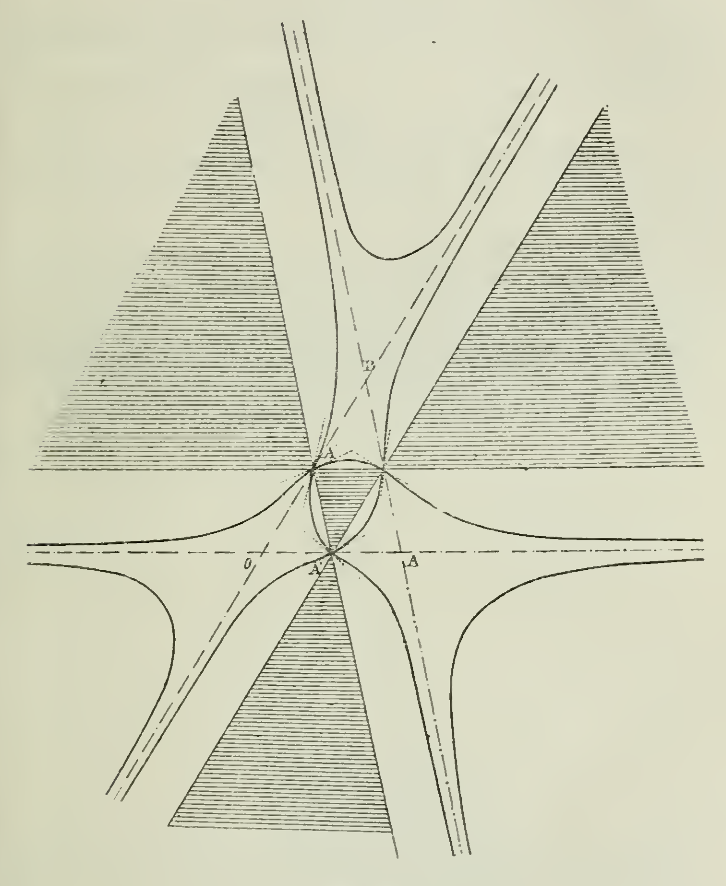


Fig. 4.

Cas particuliers. — 1° $a = 0$. — Ce cas peut convenir à des ellipses et à des hyperboles. L'énoncé se transforme en remplaçant « *coniques circonscrites au triangle* OAB », par « *coniques tangentes en* O *à une droite donnée* OX *et passant par un point fixe* C ».

Cas des ellipses. — L'équation devient

$$b^4x^4y^2 \sin^2\theta - m^4x^2(y-b) = 0.$$

$x^2 = 0$, axe des y. — L'origine est la limite du point double A′ et l'axe des y est à lui-même sa tangente double d'inflexion en ce point.

Il reste la courbe du quatrième degré

$$bx^2y^2 \sin^2\theta - m^4(y - b = 0. \qquad \text{(III)}$$

Il ne peut y avoir de points du lieu au-dessous de la droite $y = b$, qui est tangente en son point d'intersection avec OY.

Les deux axes sont asymptotes. A l'axe des x correspondent quatre branches imaginaires, à celui des y deux imaginaires et deux réelles.

Points de tangence verticale. — Ils sont donnés par l'équation

$$2bx^2y \sin^2\theta - m^4 = 0,$$

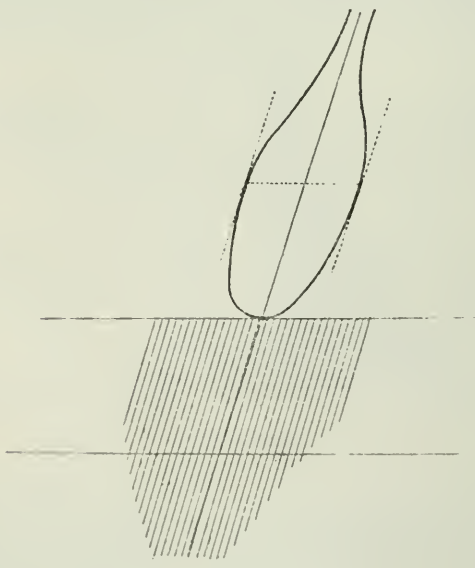


Fig 5.

qui, combinée avec (3), donne

$$y = 2b.$$

Par suite

$$x = \pm \frac{m^2}{2b \sin \theta}.$$

La courbe a la forme indiquée (*fig.* 5).

Cas des hyperboles.

$$x^2 = 0,$$

et

$$bx^2y^2 \sin^2 \theta + m^4(y - b) = 0.$$

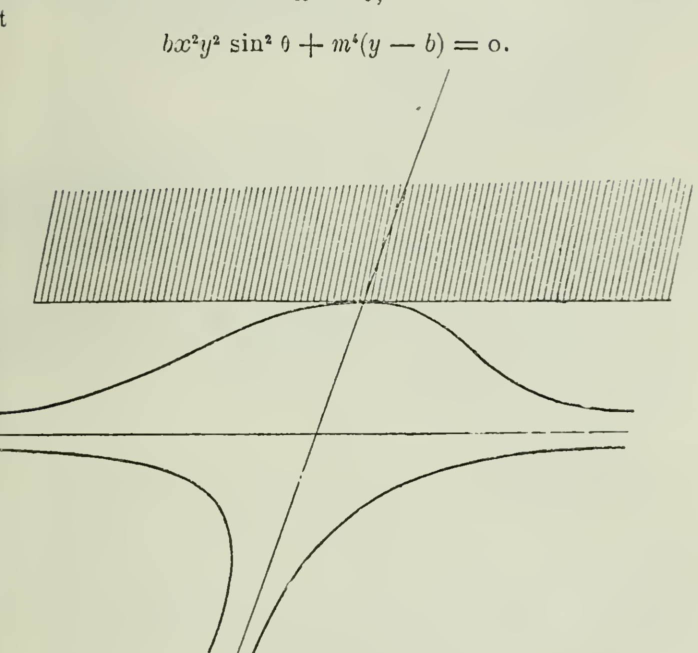


Fig. 6.

Pas de points de cette courbe au-dessus de $y = b$. Cette droite lui est tangente sur OY. — L'axe des x est asymptote double correspondant à quatre branches réelles; l'axe des y est asymptote double correspondant à deux branches réelles et deux imaginaires.

Les points de tangence verticale ont encore leur ordonnée réelle : $y = 2b$, mais leur abscisse imaginaire, car

$$x_2 = - \frac{m^4}{4b^2 \sin^2 \theta}.$$

La courbe a la forme représentée *(fig. 6)*.

Pour $b = 0$, on aurait les deux mêmes courbes disposées de même, par rapport au côté OA; et aussi pour $c = 0$.

2° $a = \infty$. L'énoncé se transforme en changeant : *coniques circonscrites à un triangle* OAB, *en coniques passant en deux points donnés* O *et* B, *et ayant une direction asymptotique donnée* OA. L'énoncé ne convient plus alors qu'à des hyperboles.

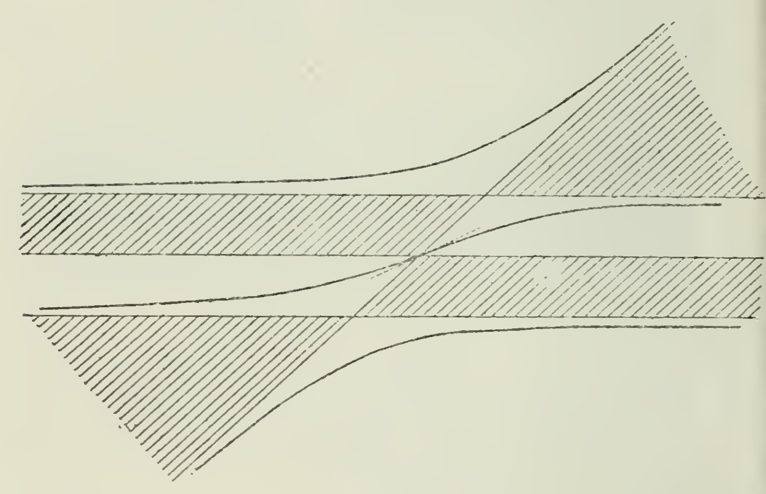


Fig. 7.

L'équation devient

$$x^2y^2(y - 2b)^2 \sin^2 \theta - m^4(y - b)^2 = 0,$$

qui se décompose en deux cubiques :

$$xy(y - 2b) \sin \theta - m^2(y - b) = 0, \qquad (fig.\ 7)$$

$$xy(y - 2b) \sin \theta + m^2(y - b) = 0. \qquad (fig.\ 8)$$

Les droites $x = 0$, $y = 0$. $y = b$, $y = 2b$, séparent le plan en régions inversement disposées pour les deux courbes.

Les droites $x = 0$, $y = 0$, $y = 2b$, sont asymptotes.

La courbe OY au point $y = b$, où la tangente a pour coefficient angulaire :

dans la première,

$$-\frac{b^2 \sin \theta}{m^2}$$

dans la deuxième,

$$-\frac{b^2 \sin \theta}{m^2}$$

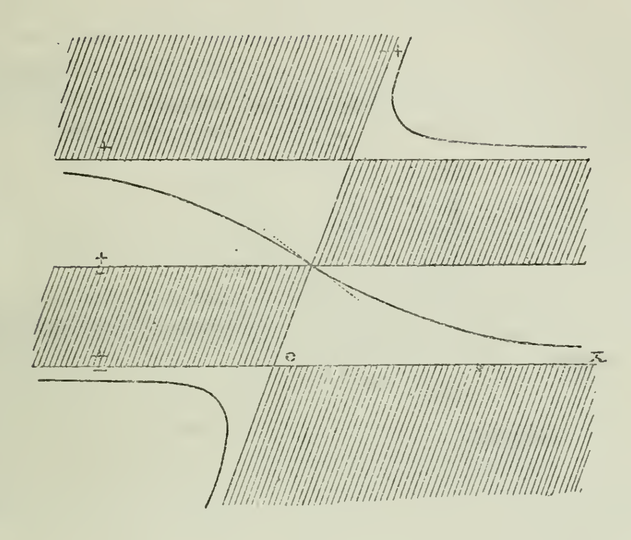


Fig 8.

Ces points sont points d'inflexion, car la tangente a trois points communs avec la courbe.

Nota. — La même question a été résolue par MM. de Kerdrel, à Kerazoret; Giat, à Moulins.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Niewenglowski à M. G. de Longchamps.

.... M. Walecki a donné dans le numéro de janvier une vérification très simple de la règle de multiplication de deux déterminants. Il n'est peut-être pas inutile de faire observer que le même procédé peut être appliqué, sans modification, au cas où l'on donne deux tableaux rectangulaires au lieu de deux déterminants.

QUESTIONS PROPOSÉES

94. — Nous proposons à nos jeunes lecteurs de démontrer, avec simplicité et élégance. au moyen des relations entre les coefficients et les racines, que la condition

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ C & D & E \end{vmatrix} = 0$$

exprime que les racines de l'équation

$$Ax^4 - 4Bx^3 + 6C \cdot x^2 - 4Dx + E = 0$$

sont en proportion harmonique, c'est-à-dire, sont liées par la relation

$$2.(\alpha\beta + \gamma\delta) = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta)$$ *(E. V.)*

95. — L'équation

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$$

ayant toutes ses racines réelles et *de même signe*, démontrer que l'équation

$$a_0 \cos \varphi + a_1 \cos (\varphi + \theta)x + a_2 \cos (\varphi + 2\theta)x^2 + \ldots + a_n \cos (\varphi + n\theta) x^n = 0$$

a toutes ses racines réelles. quels que soient les angles φ et θ.

(E. Laguerre.)

96. — On considère une strophoïde droite S; par le sommet de la courbe, son point double, et un point M mobile sur S, on fait passer une circonférence Δ; enfin par M on mène une parallèle à l'asymptote de S et cette parallèle rencontre Δ en un point I. Trouver le lieu de ce point.

Ce lieu est une circonférence; on donnera, après la solution analytique de ce problème, une démonstration géométrique du résultat trouvé. *(G. L.)*

97. — Soit M un point d'une strophoïde, ayant pour sommet O et pour point double O'. Du point O' comme centre avec O'O pour rayon décrivons un cercle Δ. Si du point M on abaisse une perpendiculaire sur OO', cette droite ren-

contre Δ en deux points parmi lesquels on distinguera particulièrement le point H qui jouit de la propriété que $MH = MO$.

1° Reconnaître l'exactitude de cette proposition;

2° Démontrer que si les perpendiculaires à OM, au point O et les tangentes en H à Δ se coupent en T, TM est la tangente à la strophoïde;

3° Démontrer que si l'on prend $MH' = MH$, le lieu du point H' est une cissoïde.

4° Reconnaître que la tangente au point H' à la cissoïde passe, elle aussi, par le point T; et faisant alors abstraction de la strophoïde considérée d'abord, déduire des remarques précédentes une construction de la tangente à la cissoïde.

98. — On considère une parabole fixe, et un cercle de rayon constant, mais variable de position. On suppose que le cercle se déplace dans le plan sous la condition que, dans chacune de ses positions, le cercle mobile et la parabole fixe aient un système de tangentes communes rectangulaires. On propose de trouver et d'étudier le lieu que décrit le centre du cercle quand il occupe dans le plan toutes les positions compatibles avec la condition donnée. *(E. B.)*

99. — On donne dans le plan une droite fixe DD' et deux points fixes O et A. — Par le point O on mène deux cercles tangents tous deux à la droite fixe DD' et à une autre droite quelconque issue du point fixe A. On demande d'étudier le lieu décrit par le second point M d'intersection de ces deux cercles quand la droite AB tourne autour du point A.

(E. B.)

100.— On donne une circonférence fixe dont le centre est C et un point O dans son plan. Par le point O on mène une tangente OA au cercle C. Par un point B pris sur cette droite OA on mène une perpendiculaire à OA, et une parallèle BD à la droite OC, D désignant l'un des points où cette parallèle rencontre le cercle C. Enfin du point O comme centre, avec OD pour rayon, on décrit une circonférence qui coupe en M et M' la perpendiculaire élevée à OA en B. On demande d'étudier le lieu des points M et M' quand le point B se déplace sur la tangente OA. *(E. B.)*

101. — Construire, point par point, au moyen d'une équerre, la courbe qui correspond à l'équation

$$x^{4n} = \frac{y}{h}(y - h)^{4n},$$

n designant un nombre entier positif. *(G. L.)*

102. — On donne une ellipse E, et l'on considère la droite Δ, qui a pour équation

$$\frac{x}{a} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

Soit M un point pris sur l'ellipse, et soit Δ' la tangente en ce point; Δ' rencontre Δ en un point P. On joint ce point P au sommet de droite A, et on élève à AP une perpendiculaire Δ'' par le point A. Démontrer que la droite AM est bissectrice de l'angle formé par Δ'' avec le grand axe AA'. Déduire de cette remarque une construction de la tangente en un point de l'ellipse au moyen de la règle et de l'équerre. On suppose que les sommets de la courbe sont seuls connus. *(G. L.)*

103. — Lieu des sommets des paraboloïdes qui passent par une parabole donnée et par deux points donnés symétriques par rapport au plan de la parabole. On distinguera les parties du lieu qui sont des sommets de paraboloïdes elliptiques et celles qui sont des sommets de paraboloïdes hyperboliques. *(E. Amigues.)*

Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 2786-4

SUR UNE

NOUVELLE ESPÈCE DE FRACTIONS CONTINUES

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite et fin*, v. t. VII, p. 197, 213, 241, 269; et t. VIII, p. 25.)

XIX. — L'étude complète des fractions continues que nous avons définies au début de ce mémoire, nous entraînerait très loin, et bien au delà des limites qui nous sont tracées dans ce journal. Nous voulons seulement montrer, en terminant ce travail, comment on peut, dans certains cas particuliers tout au moins, rapprocher les fractions continues étudiées ici, de celles qu'on désigne habituellement sous cette qualification et en prenant le mot *fractions continues* dans son sens élémentaire le plus général (Alg. Laurent, t. II, p. 143).

XX. — Plaçons-nous dans le cas particulier qui correspond aux hypothèses suivantes :

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 1,$$
$$\beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 2p - 1,$$
$$q = 1.$$

Le paramètre p reste seul arbitraire et les considérations qui suivent s'appliquent uniquement aux irrationnelles de la forme

$$\sqrt{p^2 - 1}.$$

Nous nous proposons donc de développer la plus petite racine de l'équation

$$x^2 - 2px + 1 = 0. \qquad (1)$$

La fonction X_n (§ XV, formule D) est donnée par la formule

$$X_n = A + Bx'^n + Cx''^n \qquad (2)$$

et les formules établies plus haut (§ XVI) donnent

$$A = 1, \quad B = \frac{1}{x' - x''}, \quad C = -\frac{1}{x' - x''} \text{ (*)} \qquad (3)$$

On a aussi :

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2p - 1, \ldots$$
$$\beta_0 = 1 = \alpha_1; \quad \beta_1 = 2p - 1 = \alpha_2, \ldots$$

et, en général.

$$\beta_{n-1} = \alpha_n. \qquad (4)$$

D'après la définition des fonctions X_n et Y_n, définition qui correspond aux formules :

$$X_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n,$$
$$Y_n = \beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_n,$$

nous avons

$$X_n = 1 + Y_{n-1}. \qquad (5)$$

Il suffit donc de calculer les fonctions X_n pour avoir les fonctions Y_n, et pour calculer, par suite, les réduites successives.

La fonction X_n, d'après les formules (2) et (3), est donnée par l'égalité

$$X_n = 1 + \frac{x'^n - x''^n}{x' - x''},$$

ou par la suivante,

$$X_n = 1 + U_n. \qquad (6)$$

en posant, avec M. Ed. Lucas (**),

$$U_n = \frac{x'^n - x''^n}{x' - x''}.$$

Nous rattachons ainsi, dans le cas particulier que nous examinons, les réduites de nos fractions continues à ces fonctions U_n que M. Ed. Lucas a nommées *fonctions simplement périodiques* pour marquer, croyons-nous, qu'elles jouissent des relations de récurrence qui sont vérifiées par les fonctions $\sin nx$ et $\cos nx$.

(*) La formule que donne C, au paragraphe cité, renferme une erreur typographique. Au lieu de

$$C - \frac{(x''\alpha_1 - \alpha_0 x')}{(x' - x'')(x' - 1)},$$

il faut lire

$$C = \frac{x''\alpha_1 - \alpha_0 x')}{(x' - x'')(x' - 1)}.$$

(**) *Nouvelle correspondance mathématique* (1877, p. 370).

XXI. Relation de récurrence entre deux fonctions U_n consécutives. — Nous allons montrer qu'entre deux fonctions U_n consécutives existe la relation identique

$$U_n^2 - (x' + x'')U_nU_{n-1} + x'x''U_{n-1}^2 = (x'x'')^{n-1}.$$

En effet, des égalités

$$U_n = \frac{x'^n - x''^n}{x' - x''}, \qquad U_{n-1} = \frac{x'^{n-1} - x''^{n-1}}{x' - x''},$$

on déduit, successivement,

$$U_n - x'U_{n-1} = x''^{n-1},$$
$$U_n - x''U_{n-1} = x'^{n-1};$$

et, par combinaison,

$$(U_n - x'U_{n-1})(U_n - x''U_{n-1}) = (x'x'')^{n-1}. \qquad (A)$$

C'est, sous une autre forme, la relation annoncée.

XXII. Relation entre deux fonctions $\frac{X_n}{Y_n}$ consécutives. — Posons, pour abréger l'écriture,

$$\xi_n = \frac{X_n}{Y_n};$$

nous allons reconnaître, en nous appuyant sur l'identité (A), établie ci-dessus, qu'il existe une relation homographique entre deux fonctions ξ consécutives.

Nous avons démontré, plus haut, que nous avions (§ XX, éq. 6)

$$X_n = 1 + U_n$$

et (§ XX, éq. 5)

$$X_n = 1 + Y_{n-1}.$$

Cette dernière relation donne

$$Y_n = X_{n+1} - 1$$

ou, d'après la première,

$$Y_n = U_{n+1}.$$

Nous pouvons donc poser

$$\xi_n = \frac{1 + U_n}{U_{n+1}}. \qquad (B)$$

D'autre part, la relation (A) appliquée au cas particulier qui nous occupe, et qui suppose $x'x'' = 1$, donne (*)

$$u_n^2 - 2pu_n u_{n-1} + u_{n-1} = 1.$$

(*) Pour éviter toute confusion, nous désignons ici par u_n, la fonction U_n quand on suppose $x'x'' = 1$.

Cette égalité peut se transformer de la manière suivante. Ajoutons et retranchons $2u_n u_{n-1}$, et nous avons

$$(u_n + u_{n-1})^2 - 1 = 2(p+1)u_n u_{n-1}$$

ou

$$(u_n + u_{n-1} + 1)(u_n + u_{n-1} - 1) = 2(p+1)u_n u_{n-1}$$

ou, encore,

$$\left(\frac{1 + u_{n-1}}{u_n} + 1\right)\left(1 - \frac{1 - u_n}{u_{n-1}}\right) = 2(p+1). \quad (A')$$

Mais, d'après l'égalité (B), on peut écrire

$$\xi_{n-1} = \frac{1 + u_{n-1}}{u_n}$$

et

$$\xi_{n-2} = \frac{1 + u_{n-2}}{u_{n-1}}.$$

Cette dernière égalité peut être transformée en observant que l'on a

$$u_n - 2pu_{n-1} + u_{n-2} = 0$$

et, par suite,

$$\xi_{n-2} = \frac{1 + pu_{n-1} - u_n}{u_{n-1}} = 2p + \frac{1 - u_n}{u_{n-1}}.$$

D'après cela, la relation (A′) devient

$$(\xi_{n-1} + 1)(2p + 1 - \xi_{n-2}) = 2(p+1). \quad (C)$$

C'est la relation homographique annoncée.

XXIII. Développement de ξ_n en fraction continue *(sens ordinaire)*. — La relation (C) (en changeant n en $n+1$) donne

$$1 + \xi_n = \frac{2(p+1)}{2(p+1) - (1 + \xi_{n-1})}.$$

En appliquant, successivement, la propriété qu'exprime cette égalité à $n-1$, $n-2$, etc., on a

$$1+\xi_n = \cfrac{2(p+1)}{2(p+1) - \cfrac{2(p+1)}{2(p+1) - \cfrac{(2p+1)}{(2p+1)}}}$$

$$\cdots$$

$$+ 2(p+1) - \frac{p+1}{p}.$$

Dans ce développement, le nombre des barres horizontales est égal à n, et le dernier élément $\frac{p+1}{p}$ a été calculé en observant que l'on a

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1$$

et, par suite,

$$\xi_0 = 1.$$

On peut ainsi, et c'est le point que nous avons voulu mettre en lumière, rapprocher, du moins dans des cas particuliers, le calcul des irrationnelles du second degré par notre méthode du calcul de ces expressions par le développement en fractions continues ordinaires.

On trouvera plus loin, dans l'analyse que nous faisons d'un mémoire de M. Landry, d'autres considérations sur le calcul des irrationnelles du second degré.

SUR LA SOMME DES SINUS OU COSINUS

DE TROIS ARCS

DONT LA SOMME EST UN MULTIPLE DE LA DEMI-CIRCONFÉRENCE

Par M. **G. Fouret**, répétiteur à l'École polytechnique.

I. — Les tangentes trigonométriques de trois arcs, a, b, c, dont la somme est un multiple quelconque $k\pi$, positif ou négatif, de la demi-circonférence, vérifient la relation bien connue

$$\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b + \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c. \quad (1)$$

Si, au lieu de la somme des tangentes, on considère la somme des sinus ou des cosinus des mêmes arcs, on arrive, par des transformations d'ailleurs fort simples, à des résultats qui diffèrent, suivant le résidu de k par rapport au module 4.

Posons

$$k = 4m + r (r = 0, 1, 2, 3),$$

m désignant un entier positif ou négatif. On aura, en donnant successivement à r les quatre valeurs indiquées, les

quatre couples de relations suivantes (*) :

$$r = 0 \left\{ \begin{aligned} \sin a + \sin b + \sin c &= -4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} \\ 1 + \cos a + \cos b + \cos c &= 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} \end{aligned} \right.$$

$$r = 1 \left\{ \begin{aligned} \sin a + \sin b + \sin c &= 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} \\ -1 + \cos a + \cos b + \cos c &= 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} \end{aligned} \right.$$

$$r = 2 \left\{ \begin{aligned} \sin a + \sin b + \sin c &= 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} \\ 1 + \cos a + \cos b + \cos c &= -4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} \end{aligned} \right.$$

$$r = 3 \left\{ \begin{aligned} \sin a + \sin b + \sin c &= -4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} \\ -1 + \cos a + \cos b + \cos c &= -4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} \end{aligned} \right.$$

On reconnaît aisément que ces quatre couples de relations, bien qu'exigeant chacune un calcul spécial, se déduisent des deux formules

$$\left. \begin{aligned} \sin a + \sin b + \sin c &= 4 \sin \frac{r\pi - a}{2} \sin \frac{r\pi - b}{2} \sin \frac{r\pi - c}{2} \\ (-1)^r + \cos a + \cos b + \cos c &= 4 \cos \frac{r\pi - a}{2} \cos \frac{r\pi - b}{2} \cos \frac{r\pi - c}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

lorsqu'on y fait successivement $r = 0, 1, 2, 3$.

II. — Nous allons démontrer les relations (2) d'une manière plus directe. Nous ferons usage, dans ce but, de la formule d'Euler

$$e^{\theta i} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

dont on déduit immédiatement

$$\cos \theta = \frac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{2i}.$$

(*) Nous laissons au lecteur le soin de les démontrer.

Ajoutons membre à membre les relations (2), après avoir multiplié les deux membres de la première par i; nous obtenons

$$(-1)^r + e^{ai} + e^{bi} + e^{ci} \tag{3}$$
$$= \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')(\beta + \beta')(\gamma + \gamma') - \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')(\gamma - \gamma'),$$

en posant pour abréger

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = e^{\frac{r\pi - a}{2}} & \alpha' = e^{\frac{-r\pi + a}{2}} \\ \beta = e^{\frac{r\pi - b}{2}} & \beta' = e^{\frac{-r\pi + b}{2}} \\ \gamma = e^{\frac{\pi - c}{2}} & \gamma' = e^{\frac{-r\pi + c}{2}} \end{array}\right\} \tag{4}$$

Mais le second membre de (3), quels que soient α, β, γ, α', β', γ', est identique à

$$\alpha'\beta'\gamma' + \alpha'\beta\gamma + \alpha\beta'\gamma + \alpha\beta\gamma'.$$

En y remplaçant α, β, γ, α', β', γ' par les valeurs (4), on obtient

$$e^{(-3r\pi+a+b+c)\frac{i}{2}} + e^{(r\pi-b-c+a)\frac{i}{2}} + e^{(r\pi-c-a+b)\frac{i}{2}} + e^{(r\pi-a-b+c)\frac{i}{2}}.$$

Or cette expression se réduit identiquement au premier membre de la relation (3), si l'on suppose

$$a + b + c = k\pi = (4m + r)\pi, \tag{5}$$

et que l'on tienne compte des identités

$$e^{2m\pi i} = 1, \qquad e^{r\pi i} = (-1)^r.$$

Les relations (2) se trouvent ainsi démontrées dans toute leur généralité.

III. — Cherchons si, inversement, en supposant vérifiées les relations (2) ou la relation (3) qui leur est équivalente, on est en droit d'en conclure

$$a + b + c = k\pi,$$

k désignant un entier quelconque, positif ou négatif. A cet effet, nous pouvons toujours poser, quels que soient a, b, c,

$$a + b + c = (4m + r)\pi + \omega,$$

m et r ayant les significations définies plus haut, et ω désignant un angle positif inférieur à π.

On voit alors facilement que la relation (3) peut se mettre

sous la forme très simple

$$\left[e^{-\frac{\omega}{2}i} - 1\right]\left[e^{ai} + e^{bi} + e^{ci} - e\right] = 0.$$

Or la dernière relation se dédouble en

$$e^{-\frac{\omega}{2}i} = 1 \qquad (6)$$

et $$e^{ai} + e^{bi} + e^{ci} = e^{\left(r\pi + \frac{\omega}{2}\right)i}. \qquad (7)$$

De (5) on conclut $\omega = 0$, puisque ω est compris entre zéro et π. On retrouve ainsi la condition moyennant laquelle nous avons démontré les formules (2). Mais nous venons de trouver que cette condition n'est pas nécessaire pour que ces formules (2) aient lieu. Il suffit, en effet, qu'à défaut de (4) la relation (6) soit vérifiée.

Cette relation (6) se subdivise d'ailleurs en deux autres qui sont (*)

$$\cos a + \cos b + \cos c = (-1)^r \cos\frac{\omega}{2}$$

$$\sin a + \sin b + \sin c = (-1)^r \sin\frac{\omega}{2}$$

Ainsi, contrairement à ce qui a lieu pour la formule (1) rappelée au début de cette note, laquelle ne peut être vérifiée que par trois angles dont la somme soit un multiple de π, les relations (2) peuvent être vérifiées séparément ou ensemble par une infinité de combinaisons de trois angles qui ne remplissent pas cette condition.

Remarques. — 1° Des relations (2) divisées membre à membre, on déduit

$$\frac{\sin a + \sin b + \sin c}{(-1)^r + \cos a + \cos b + \cos c}$$
$$= \operatorname{tang}\frac{r\pi - a}{2}\operatorname{tang}\frac{r\pi - b}{2}\operatorname{tang}\frac{r\pi - c}{2}.$$

2° Les relations (2) s'appliquent à des équimultiples quelconques des angles a, b, c. De

(*) La détermination des systèmes de valeurs de a, b et c satisfaisant à la fois à ces deux équations est un problème d'analyse indéterminée que nous ne résoudrons pas ici, mais qui est évidemment possible.

$$a + b + c = (4m + r)\pi \quad (r = 0, 1, 2, 3)$$

on conclut, en effet, en désignant par n un nombre entier quelconque,

$$na + nb + nc = (4m' + r')\pi \quad (r' = 0, 1, 2, 3),$$

m' étant un entier.

Cette simple remarque fournit immédiatement, entre les trois angles d'un triangle, les deux relations très générales qui suivent, et dans lesquelles n désigne un entier quelconque, r le résidu de n par rapport au module 4 :

$$\sin na + \sin nb + \sin nc$$
$$= 4 \sin \frac{r\pi - na}{2} \sin \frac{r\pi - nb}{2} \sin \frac{r\pi - nc}{2}$$
$$(-1)^n + \cos na + \cos nb + \cos nc$$
$$= 4 \cos \frac{r\pi - na}{2} \cos \frac{r\pi - nb}{2} \cos \frac{r\pi - nc}{2}$$

auxquelles on peut joindre

$$\operatorname{tang} na + \operatorname{tang} nb + \operatorname{tang} nc = \operatorname{tang} na \operatorname{tang} nb \operatorname{tang} nc.$$

On déduirait immédiatement des dernières formules, en y faisant $n = 1, 2, 3, 4$, des relations bien connues que l'on rencontre dans la plupart des traités de trigonométrie.

NOTE SUR LA DROITE DE SIMSON

Par M. **Weill**, professeur de Mathématiques spéciales au Collège Chaptal.

(*Suite et fin*, voir page 30.)

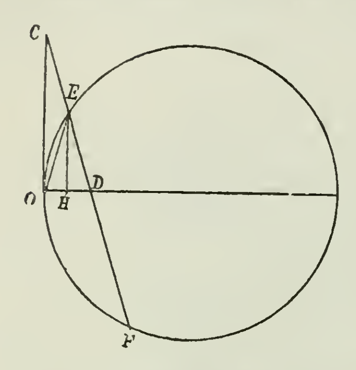
Théorème XXV. — *Soient* C *et* D *les points où une tangente variable à l'hypocycloïde rencontre deux tangentes rectangulaires à la courbe, se coupant en* O *sur le cercle des neuf points, on aura*

$$\frac{\overline{CD}^2}{DO} = \text{const.}$$

si CO *est tangente en* O *au cercle des neuf points.*

D'après les propriétés connues des hypocycloïdes, il existe sur le cercle des neuf points trois points O, O′, O″, formant les

sommets d'un triangle équilatéral, et où la courbe touche le cercle. Soit O un de ces points et OD le diamètre passant en O ; les arcs OE et OF étant l'un moitié de l'autre,



on a

$$OE = EG = ED.$$

Abaissons sur le diamètre la perpendiculaire EH. On aura

$$\frac{\overline{OE}^2}{OH} = 2\,R\,;$$

d'où

$$\frac{\overline{CD}^2}{OD} = \frac{4\overline{OE}^2}{2OH} = 4\,R.$$

Théorème XXVI. — *Réciproquement, si une droite variable* CD *intercepte sur droites rectangulaires deux segments* OD, OC *tels que l'on ait*

$$\frac{\overline{CD}^2}{DO} = \text{const.} = l,$$

la droite CD *enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements.*

Prenons OE = OC et menons BEA perpendiculaire à CD, et CA′ perpendiculaire sur CD. Comme OB = OC, on a OA = OA′, donc

$$\frac{\overline{AB}^2}{AO} = l.$$

Menons EK perpendiculaire sur EO. On a

$$DEK = \frac{\pi}{2} - DEO = \frac{\pi}{2} - DCO = EDK.$$

Donc

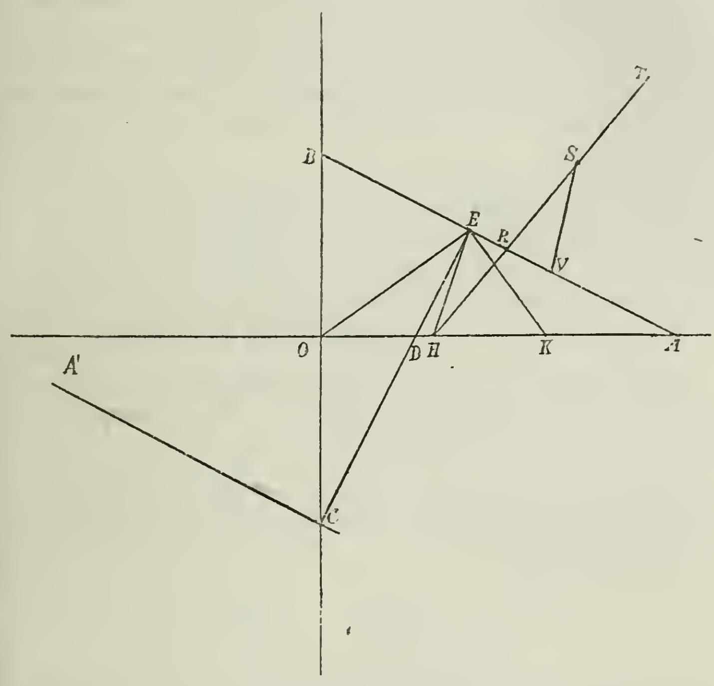
$$KD = KE = KA\,;$$

ddon

$$OD + 2DK = OA$$
$$OD + OA = 2OK$$
$$OK = \frac{OD + OA}{2} = l.$$

Le point K est donc fixe, et le point E se trouve sur le cercle décrit sur OK comme diamètre. Du point H, milieu

de OK, avec HO comme rayon, décrivons un cercle, il passera par E et coupera BA en E et R. Prolongeons HR et prenons ST = SR = RH, et SV = SR.



Désignons par α l'angle OCD = OED = OAB.

On a

$$DOE = \frac{\pi}{2} - 2\alpha,$$

d'où

$$OHE = \pi - 2\,DOE = 4\alpha.$$

On a aussi

$$KEA = \alpha$$

$$KEH = HKE = 2\alpha,$$

donc

$$HEA = 3\alpha;$$

d'où

$$HRE = 3\alpha,$$

et

$$\text{RHA} = 2\alpha,$$
$$\text{TSV} = 6\alpha = 3\text{RHA}.$$

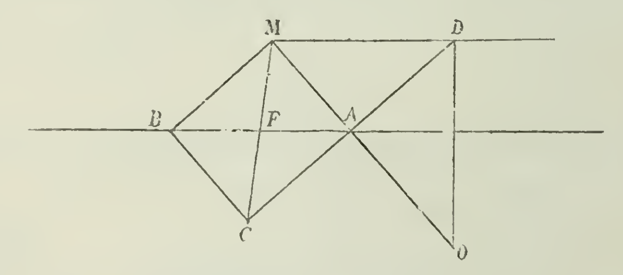
Donc V appartient à une hypocycloïde à trois rebroussements ayant, au point V, AB pour tangente. Le point E appartenant au cercle des neuf points correspondant à AB considérée comme droite de Simson, il en résulte que EDC est aussi droite de Simson, et, par suite, touche la même hypocycloïde. C. Q. F. D.

Théorème XXVII. — *Étant donnés un cercle, un diamètre, et la tangente à l'extrémité, la droite qui joint les projections d'un point du cercle sur ces deux droites fixes, a pour enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements.*

Ce théorème n'est qu'un autre énoncé du précédent.

Théorème XXVIII. — *L'enveloppe des axes des paraboles osculatrices à un cercle donné en un point donné est une hypocycloïde à trois rebroussements.*

Ce théorème n'est qu'un cas particulier du théorème XXIV. On peut aussi le démontrer directement en s'appuyant sur le théorème XXVII.



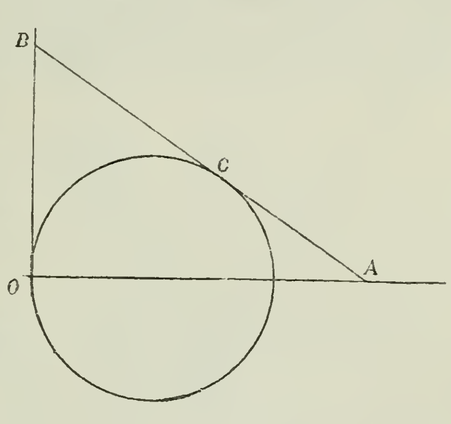
Soit AB l'axe de la parabole, M un point de la courbe, MA la normale; on obtient le point O, centre de courbure en M, d'après une construction connue, en menant la parallèle MD à l'axe, la perpendiculaire en A à AM, laquelle rencontre en D la parallèle à l'axe, et enfin la perpendiculaire DO à l'axe. Ceci posé, prolongeons DA d'une longueur égale à elle-même en C, et menons la tangente MB à la parabole, MC passera

par le milieu de AB, qui est le foyer. C est un point du cercle décrit sur OM comme diamètre.

Revenant aux données de la question, on voit que le cercle décrit sur OM comme diamètre est fixe, ainsi que la tangente MB en M, point fixe donné, par lequel doit passer la parabole variable ayant pour cercle osculateur donné en M le cercle de centre O. Dès lors, l'axe AB passe par les projections du point C sur les deux droites fixes MB, MO; donc.....

On peut remarquer que le lieu du foyer est le cercle décrit sur ME comme diamètre. E étant le milieu de MO.

Théorème XXIX. — *Soient* OA *le diamètre d'un cercle,* OB *la tangente à l'extrémité,* AB *une tangente variable touchant le cercle en* C *et rencontrant en* A *et* B *les droites fixes. La parabole qui touche les deux droites en* A *et* B *a pour enveloppe l'hypocycloïde à trois rebroussements qui est l'enveloppe de la droite joignant les projections de* C *sur les droites fixes.*



Ce théorème est une conséquence du théorème XXVII.

Théorème XXX. — *Étant donné un triangle* ABC, *et* H *le point de concours des hauteurs : à partir du sommet* C, *prenons sur le prolongement de la hauteur une longueur* CE = DH *et par le point* E *menons une parallèle à* AB. *En opérant de même sur les trois hauteurs, nous formerons un triangle* A'B'C' *homothétique inverse de* ABC.

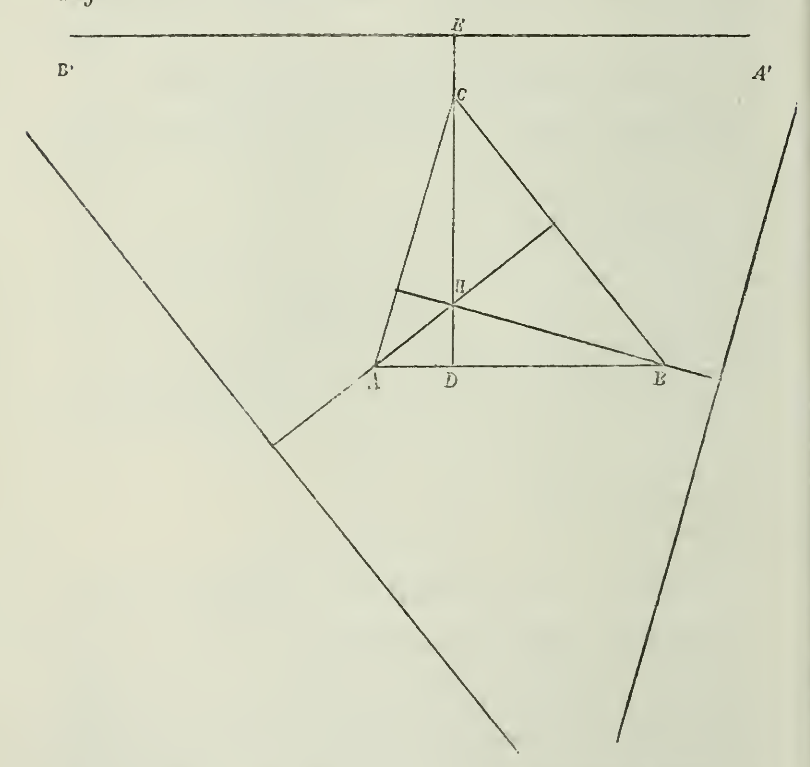
1° *Les côtés du triangle* A'B'C' *sont trois fois plus grands que ceux de* ABC.

2° *Les cercles des neuf points des deux triangles sont concentriques.*

3° Le centre commun de ces deux cercles est le centre d'homothétie des deux triangles.

4° Étant donnée une droite de Simson PQ *relative à un point* M *et au triangle* ABC, *si* Q *est le point où elle touche son enveloppe, la perpendiculaire à* PQ *au point* Q *est droite de Simson relative au triangle* A′B′C′ *et à un point* M′.

5° MM′ *passe par le point de concours des hauteurs du triangle* A′B′C′.



Nous laissons aux jeunes lecteurs du journal le soin de démontrer ce dernier théorème. Il est à remarquer que la quatrième partie du théorème est un cas particulier d'un théorème bien connu, savoir, que la développée d'une hypocycloïde est une hypocycloïde semblable.

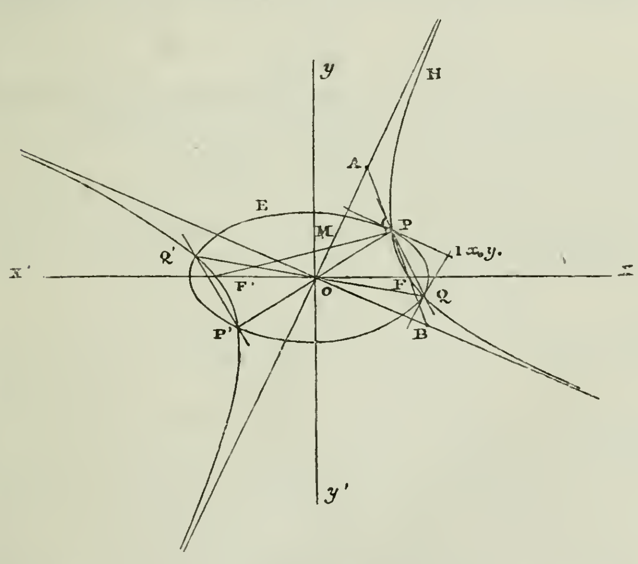
QUESTION 23

Solution par M. Léon Clément, élève en Mathématiques spéciales au Lycée de Rouen.

On considère une ellipse E *rapportée à ses axes*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

et un diamètre quelconque PP′. *Par les extrémités* P, P′ *de ce diamètre et par les foyers de l'ellipse donnée, on fait passer une hyperbole équilatère* H, *qui rencontre* E *en deux points diamétralement opposés* Q, Q′. *Ceci posé, aux points* P, Q *on mène les tangentes à* E; *ces droites se rencontrent en un point* I :



1° Trouver le lieu de ce point quand PP′ *tourne autour du centre de* E. *Ce lieu est le cercle circonscrit au rectangle construit sur les axes.*

2° Au point I, *on abaisse des perpendiculaires sur les asymp-*

totes de H : *trouver le lieu de ces projections. Ce lieu est la podaire du centre de l'ellipse* E.

3° On demande de vérifier ces deux résultats par des considérations géométriques. en établissant d'abord le théorème élémentaire suivant : on considère un triangle ABC, *et sur la base* BC, *deux points* D *et* D' *également éloignés du milieu de* BC. *Soit* D'' *le symétrique de* D *par rapport au point* A. *La droite* D'D'' *rencontre* AC *en un point* M; *la droite qui va de* D' *au milieu de* MC *est parallèle à* AB. (G. L.)

1. — Soient x_0y_0 les coordonnées du point I. La polaire PQ de ce point a pour équation

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - 1 = 0.$$

L'équation de P'Q symétrique de PQ par rapport au centre O est

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + 1 = 0.$$

L'équation générale des coniques passant par les points d'intersection des droites PQ, P'Q' et de l'ellipse est

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + \left(\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2}\right)^2 - 1 = 0. \quad (1)$$

Exprimons que c'est une hyperbole équilatère :

$$\frac{\lambda}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^4} + \frac{\lambda}{b^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 0\,;$$

d'où

$$a^2b^2\lambda = -\frac{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}{a^2 + b^2}.$$

Exprimons en outre qu'elle passe par les foyers F, F' de l'ellipse :

$$\lambda\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) + \frac{c^2x_0^2}{a^4} - 1 = 0,$$

$$\lambda\,\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2x_0^2 - a^4}{a^4},$$

d'où

$$a^2b^2\lambda = c^2x_0 - a^4.$$

En égalant les deux valeurs de $a^2b^2\lambda$ on a l'équation qui lie x_0 et y_0 :

$$c^2x_0 - a^4 + \frac{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}{a^2 + b^2} = 0$$

ou $$(a^4 - b^4)\,x_0^2 - a^4(a^2 + b^2) + b^4x_0^2 + a^4y_0^2 = 0.$$

$$x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2.$$

Le lieu du point I est donc le cercle circonscrit au rectangle construit sur les axes.

2. — L'équation des asymptotes des coniques représentées par l'équation (1) est

$$\left(\frac{\lambda}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^4}\right)x^2 + \frac{2x_0y_0}{a^2b^2}\,xy + \left(\frac{\lambda}{b^2} + \frac{y_0^2}{b^4}\right)y^2 = 0$$

ou, en multipliant par a^2b^2,

$$\left(b^2\lambda + \frac{b^2x_0^2}{a^2}\right)x^2 + 2x_0y_0xy + \left(a^2\lambda + \frac{a^2y_0^2}{b^2}\right)y^2 = 0.$$

Remplaçons λ par

$$\frac{c^2x_0 - a^4}{a^2b^2}.$$

Le coefficient de x^2 devient égal à

$$\frac{c^2x_0^2 - a^4 + b^2x_0^2}{a^2} = x_0^2 - a^2,$$

et en tenant compte de la relation $x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$, le coefficient de x^2 est $b^2 - y_0^2$.

Donc l'équation des asymptotes de l'hyperbole équilatère H est

$$(a^2 - x)\,y^2 + 2x_0y_0xy + (b^2 - y_0{}^2)x^2 = 0,$$

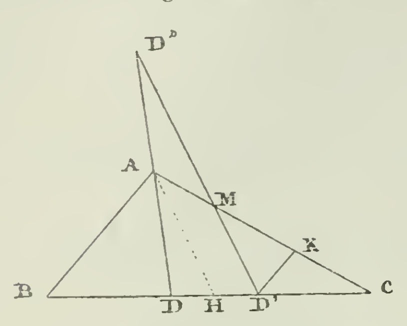
et par conséquent l'équation aux coefficients angulaires des asymptotes est

$$(a^2 - x_0^2)\,\alpha^2 + 2x_0y_0\alpha + b^2 - y_0^2 = 0.$$

Or, comme on le sait, cette équation donne aussi les coefficients angulaires des tangentes menées du point x_0y_0 à l'ellipse; donc ces tangentes sont parallèles aux asymptotes de H, et par suite le lieu des projections du point I sur les asymptotes est évidemment la podaire du centre de l'ellipse.

3. — Avant de traiter la question géométriquement, démontrons d'abord le théorème élémentaire énoncé. Soit H milieu de BC, et K le milieu de MC *(fig. 2)*.

La droite AH est évidemment parallèle à D'D''. Par suite les deux triangles CMD', CAH sont semblables et donnent



$$\frac{CM}{CA} = \frac{CD'}{CH}.$$

Divisons par 2 les deux membres de cette égalité, nous aurons

$$\frac{CK}{CA} = \frac{CD'}{BA}.$$

Ce qui prouve que D'K est parallèle à BA.

C. Q. F. D.

Remarquons que si l'angle BAC est droit, la droite D'K est perpendiculaire au milieu de MC, et par suite elle se confond avec la bissectrice de l'angle MD'C.

Ceci posé, revenons à la question. Menons PF *(fig. 1)*. Soient A et B les points d'intersection de cette droite avec les asymptotes. Les points P et F sont également éloignés du milieu de AB : car on sait que PA = FB. Joignons le point F', symétrique de F par rapport au point O, au point P. La tangente IP à l'ellipse est bissectrice de l'angle APF'; et comme l'angle AOB est droit, la droite IP est, d'après la remarque précédente, parallèle à OB. On démontrerait de même que la tangente IQ est parallèle à OA. Les tangentes considérées étant respectivement parallèles aux asymptotes de l'hyperbole équilatère H, on reconnaît de suite les deux théorèmes à démontrer.

VARIÉTÉS

Nous publions, à l'usage de nos lecteurs, le texte même de Newton sur la méthode d'approximation qui porte le nom de cet illustre géomètre.

On lit (page 10 du premier volume des *Opuscules*, édi-

tion de 1774, publiée à Lausanne et à Genève, par Jean Castillion, chez Marc-Michel Bousquet et C[ie]) :

NUMERALIS ÆQUATIONUM AFFECTARUM RESOLUTIO

Quia tota difficultas in resolutione latet, modum quo ego utor in Æquatione Numerali primùm illustrabo.

Sit $y^3 - 2y - 5 = 0$, resolvenda : et sit 2, numerus qui minus quam decimâ sui parte differt à Radice quæsitâ. Tum pono $2 + p = y$, et substituo hunc ipsi valorem in Æquationem, et inde nova prodit

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$$

cujus radix p exquirenda est, ut Quotienti addatur. Nempe (neglectis $p^3 + 6p^2$ ob parvitatem) $10b - 1 = 0$, sive $p = 0,1$, prope veritatem est; itaque scribo 0,1 in Quotiente, et suppono $0,1 + q = p$, et hunc ejus valorem, ut prius substituo, unde prodit

$$q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0$$

et cum $11,23q + 0,061 = 0$ veritati prope accedat, sive fere sit q æqualis $-0,0054$ (dividendo nempe donec tot eliciantur figuræ quot locis primæ figuræ hujus et principalis Quotientis exclusive distant) scribo $-0,0054$ in inferiori parte Quotientis, cùm negativa sit.

Et supponens $-0,0054 + r = q$, hunc ut prius substituo, et operationem sic produco quousque placuerit. Verùm si ad bis tot figuras tantùm quot in Quotiente jam reperiuntur unâ demptâ, operam continuare cupiam, pro q substituo $-0,0054 + r$ in hanc $6,3q^2 + 11,23q + 0,061$, scilicet primo ejus Termino (q^3) propter exilitatem suam neglecto, et prodit

$$6,3\ .\ r^2 + 11,16196r + 0.000541708 = 0$$

fere, sive (rejecto $6,3r^2$)

$$r = \frac{-0,000541708}{11,16196} = -0,00004853$$

fere, quam scribo in negativa parte Quotientis. Denique negativam partem Quotientis ab affirmativa subducens habeo 2,09455147 Quotientem quæsitum.

Æquationes plurium dimensionum nihilo secius resolvuntur, et operam sub fine, ut hic factum fuit, levabis, si primos ejus Terminos gradatim omiseris.

Præterea notandum est quòd in hoc exemplo, si dubitarem an $0,1 = p$ veritati satis accederet, pro $10p - 1 = 0$, finxissem

$$6p^2 + 10p - 1 = 0$$

et ejus radicis primam Figuram in Quotiente scripsissem; et secundam vel tertiam Quotientis Figuram sic explorare convenit, ubi in Æquatione ista ultimò resultante quadratum coefficientis penultimi Termini, non sit decies majus quam factus ex ultimo termino ducto in coefficientem Termini antepenultimi.

Imo laborem plerumque minus, præsertim in Æquationibus plurimarum dimensionum, si Figuras omnes Quotientis addendas dicto modo (hoc est extrahendo minorem Radicum, ex tribus ultimis Terminis Æquationis novissime resultantis) exquiras : isto enim modo Figuras duplo plures qualibet vice Quotienti lucraberis.

Hæc methodus resolvendi Æquationes pervulgata an sit nescio, certe mihi videtur præ reliquis simplex, et usui accommodata. Demonstratio ejus ex ipso modo operandi patet, undè cum opus sit, in memoriam facile revocatur.

A la page 37 du même volume, Newton reproduit le même procédé en l'abrégeant, et reproduit aussi le diagramme suivant qui accompagne le premier texte.

Nous donnons ici ce diagramme :

$y^2 - 2y - 5 = 0$		$+ 2{,}10000000$ $- 0{,}00544853$ $+ 2{,}09455147 = y$
$2 + p = y$	y^3 $- 2y$ $- 5$	$+ 8 + 12p + 6p^2 + p^3$ $- 4 - 2p$ $- 5$
	Summa	$- 1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0{,}1 + q = p$	p^3 $+ 6p^2$ $+ 10p$ $- 1$	$0{,}001 + 0{,}03q + 0{,}3q^2 + q^3$ $+ 0{,}06 + 1{,}2 + 6{,}0$ $+ 1 + 10$ $- 1$
	Summa	$0{,}061 + 11{,}23q + 6{,}3q^2 + q^3$
$- 0{,}0054 + r = q$	$+ 6{,}3q^2$ $+ 11{,}23q$ $+ 0{,}61$	$+ 0{,}000183708 - 0{,}06804r + 6{,}3r^2$ $- 0{,}060642 + 11{,}23$ $+ 0{,}061$
	Summa	$+ 0{,}000541708 + 11{,}16196r + 6{,}3r^2$

On voit donc que, dès l'origine, la méthode de Newton consiste, en désignant par a une valeur approchée de la racine, à poser :

$$x = a + y$$

puis dans l'équation transformée :

$$f(a + y) = 0$$

négliger toutes les puissances de l'inconnue y au delà de la première; ce qui réduit l'équation à : $f(a) + y f'(a) = 0$, et donne pour la formule de correction :

$$[z = - f(a) : f'(a)]$$

C'est donc à ces quelques mots bien simple que se réduit l'exposé historique de la méthode d'approximation de Newton.

La discussion qui suit l'exposé historique a été faite trop souvent déjà; et nous pouvons nous dispenser de la reproduire ici.

E. V.

QUESTIONS PROPOSÉES

104. — Une surface du second degré a un centre donné, et passe par un cercle donné. Lieu de ses sommets. On distinguera les points du lieu suivant la nature de la surface dont ils sont les sommets. *(E. Amigues.)*

105. — Lieu du centre d'une surface de second ordre qui passe par une ellipse donnée et par deux points symétriques par rapport au plan de cette ellipse. Le lieu cherché est une surface que l'on décomposera en régions dont les points soient des centres de surfaces de même genre.

(E. Amigues.)

106. — Si A et A′ sont deux polynômes de degré n à coefficients réels, et si B et B′ sont deux polynômes de degré moindre que $2n$, on ne peut avoir l'identité

$$A^3 + B = A'^3 + B'$$

sans avoir les deux suivantes :

$$A = A',$$
$$B = B'.$$

(E. Amigues.)

107.— On sait que le lieu du centre d'une hyperbole équilatère inscrite à un triangle est un cercle ; faire voir que ce cercle est conjugué par rapport au triangle.

(E. Amigues.)

108. — On donne un triangle rectangle et isoscèle, et on lui circonscrit un cercle et une hyperbole équilatère variable. Ces deux courbes ont alors en commun trois points fixes et un point variable. Par ce dernier, on mène la tangente au cercle. Lieu du point d'intersection de cette tangente avec les parallèles menées par le sommet de l'angle droit aux asymptotes de l'hyperbole correspondante.

(E. Amigues.)

109. — Condition pour que les équations de quatre droites représentent des génératrices d'un hyperboloïde.

(E. Lemoine.)

110. — Condition pour que les équations de trois droites représentent des génératrices d'un paraboloïde.

(*E. Lemoine.*)

111. — Les points de contact des tangentes menées à une développante de cercle par un point quelconque de son plan, appartiennent à un limaçon de Pascal. (*G. Fouret.*)

112. — On considère un triangle rectangle ABC inscrit dans une parabole, et dont l'hypoténuse est une normale de la courbe; trouver le lieu décrit par le centre du cercle inscrit à ce triangle. (*G. L.*)

113. — On donne un point fixe O, et deux autres points : l'un A fixe, et l'autre B mobile mais restant à une distance invariable du point O; on demande le lieu des sommets et des foyers des ellipses qui ont pour centre commun le point O, et sont telles en outre que A et B soient les extrémités de deux diamètres conjugés. (*E. V.*)

114. — Parmi toutes les coniques circonscrites à un même triangle ABC, on considère seulement la série de celles pour chacune desquelles les normales en A, B, C, sont concourantes, et l'on demande le lieu du point de concours. (*E. V.*)

115. — Construire la courbe représentée par l'équation :

$$x^4 + y^4 - 2x^2 - 2g^2 + 1 = 0. \qquad (E.\ V.)$$

116. — Construire la podaire de l'origine relativement à la courbe que représente l'équation :

$$x^3 + y^3 - a^3 = 0. \qquad (E.\ V.)$$

117. — Étudier les formes successives de la courbe représentée par l'équation :

$$x^3 + y^3 - 3axy + \lambda = 0.$$

quand on fait varier λ. (*E. V.*)

118. — Trouver la relation qui existe entre trois dérivées successives d'ordre quelconque de la fonction

$$(x^2 - 1)^n;$$

montrer qu'il ne peut exister de relation entre deux dérivées successives; la dérivée d'ordre p est exactement divisible par la dérivée d'ordre $2n - p$. Soit $f(x)$ une des dérivées de

$(x^2 - 1)^n$; $f'(x)$ et $f''(x)$ étant les dérivées première et seconde de $f(x)$, la relation qu'il s'agit de trouver aura la forme

$$Af(x) + Bf'(a) + Cf''(x) = 0;$$

chercher s'il existe d'autres fonctions entières du même degré vérifiant la même identité. *(L. Lévy.)*

119. — Soient Ox, Oy deux droites, P un plan perpendiculaire à Ox au point O. Dans le plan P, on mène une droite ON, et dans le plan NOy une droite OM telle que

$$\frac{\sin MON}{\sin NOy} = K;$$

trouver le lieu géométrique de la droite OM lorsque la droite ON tourne autour du point O dans le plan P.

(L. Lévy.)

120. — Discuter la surface représentée par l'équation

$$x^4 - y^4 + z^4 + 4xy^2z - 2x^2z^2 + 2a^2(y^2 + 2xz)$$
$$- 4a(x^2 + z^2)y - a^4 = 0.$$

(E. Catalan.)

ERRATUM

Dans la question 89, publiée au numéro de janvier, au lieu de : « le lieu décrit est une courbe du *dixième* degré », il faut dire : « est une courbe du *douzième* degré ». On peut ajouter qu'elle se décompose en deux courbes du *sixième* degré. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 6032-4.

SUR UN MÉMOIRE (*) DE M. LANDRY

Par M. **G. de Longchamps.**

L'article que nous avons publié récemment (**) sur le problème de Pell, nous a procuré la communication d'un mémoire de M. Landry, mémoire que nous avons lu avec le plus grand intérêt, qui touche par un point au problème de Pell, et qui nous paraît renfermer plusieurs points dignes de fixer l'attention.

1. — Le point de départ du mémoire que nous voulons analyser est le développement de $\sqrt{A}$ en fraction continue, ce mot étant pris dans son sens général (***).

En posant

$$A = a^2 + r, \qquad (r \leq 2a)$$

et en remarquant que

$$\sqrt{A} = a + \sqrt{A} - a,$$

on a

$$\sqrt{A} = a + \frac{(\sqrt{A} - a)(\sqrt{A} + a)}{\sqrt{A} + a};$$

ou, enfin,

$$\sqrt{A} = a + \frac{r}{a + \sqrt{A}}.$$

De cette égalité, on déduit

$$\sqrt{A} = a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \cdot}}}$$

(*) *Cinquième mémoire sur la théorie des nombres*, par M. *F. Landry*, licencié ès sciences mathématiques. Librairie Hachette, juillet 1856.

(**) *Journal de Mathématiques élémentaires* (1884, p. 15).

(***) V. *Traité d'algèbre*, par *H. Laurent*, p. 341.

Ce développement sert de base au mémoire qui nous occupe.

2. — On sait (*) que si une fraction continue f est de la forme

$$f = a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots}}}$$

les réduites sont

$$U_0 = \frac{a_0}{1}, \quad U_1 = \frac{a_0 b_1 + a_1}{b_1}, \quad U_2 = \frac{b_2(a_0 b_1 + a_1) + a_2 a_0}{b_2 b_1 + a_2}, \ldots$$

Posant

$$X_n = b_n X_{n-1} + a_n X_{n-2},$$
$$Y_n = b_n Y_{n-1} + a_n Y_{n-2},$$

on a

$$U_n = \frac{X_n}{Y_n}.$$

On sait aussi qu'en faisant

$$Z_n = X_n Y_{n-1} - X_{n-1} Y_n,$$

on a

$$Z_n = - a_n Z_{n-1}.$$

De ces relations on peut déduire le théorème suivant, donné par M. Landry, et qui l'a conduit à une solution de l'équation indéterminée

$$x^2 - Ay^2 = \pm r^m.$$

3. Théorème. — *Si l'on considère deux réduites consécutives* $\frac{m}{m'}$, $\frac{p}{p'}$ *de la fraction continue* f, *on a*

$$p^2 - Ap'^2 = - r(m^2 - Am'^2).$$

Nous nous proposons d'établir ce théorème remarquable par une voie différente de celles que M. Landry a employées; mais cette démonstration repose sur une relation importante entre *deux réduites consécutives*, et que nous établirons d'abord.

(*) V. *Alg.* Laurent (*Loc. cit.*).

4. Théorème. — *Dans la fraction continue* f, *deux réduites consécutives* U_n, U_{n-1} *vérifient constamment la relation*

$$U_n = \frac{A + aU_{n-1}}{a + U_{n-1}}. \qquad (1)$$

On a, en effet, par la définition de U_n,

$$U_n = a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \cdots + 2a + \cfrac{r}{2a}}};$$

la lettre r, qui entre dans cette expression, y figurant n fois.

Cette égalité donne

$$U_n - a = \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \cdots + 2a + \cfrac{r}{2a}}},$$

ou

$$\frac{r}{U_n - a} = 2a + \cfrac{r}{2a + \cdots + 2a + \cfrac{r}{2a}}.$$

Retranchant a aux deux membres, nous aurons

$$\frac{r}{U_n - a} - a = a + \cfrac{r}{2a + \cdots + 2a + \cfrac{}{2a}}.$$

Dans le second membre, la lettre r figure $(n - 1)$ fois.

Nous pouvons donc écrire

$$\frac{r}{U_n - a} - a = U_{n-1}.$$

Cette égalité, en tenant compte de la formule

$$A = a^2 + r,$$

est la relation (1), que nous voulions établir.

5. Récurrence des termes de deux réduites consécutives. — La relation (1) peut s'écrire

$$\frac{X_n}{Y_n} = \frac{AY_{n-1} + aX_{n-1}}{aY_{n-1} + X_{n-1}}.$$

Cette formule conduit à soupçonner la loi qui lie les fonctions X_n, Y_n, aux termes X_{n-1}, Y_{n-1}, de la réduite précédente. Nous allons montrer que l'on a constamment

$$X_n = AY_{n-1} + aX_{n-1},$$
$$Y_n = aY_{n-1} + X_{n-1}.$$

Nous supposons pourtant que les réduites sont calculées par le procédé arithmétique ordinaire, celui qui est naturellement indiqué par les formes :

$$\frac{a}{1}, \quad a + \frac{r}{2a}, \quad a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a}}, \ \ldots$$

et, sous cette réserve formelle, que les fractions obtenues :

$$\frac{X_0}{Y_0}, \quad \frac{X_1}{Y_1}, \quad \frac{X_2}{Y_2}, \ \ldots$$

n'ont pas été simplifiées, s'il arrive qu'elles soient susceptibles de l'être. C'est dans ces conditions que les fonctions X_n, Y_n sont bien déterminées ; X_n désignant le numérateur, et Y_n le dénominateur, de la réduite U_n, réduite calculée comme nous venons de le dire.

Les premières réduites :

$$\frac{a}{1}, \quad \frac{2a^2 + r}{2a}, \quad \frac{4a^3 + 3ar}{4a^2 + r}, \ \ldots$$

donnent, d'après la définition précédente,

$$X_0 = a, \quad X_1 = 2a^2 + r, \quad X_2 = 4a^3 + 3ar, \ \ldots$$
$$Y_0 = 1, \quad Y_1 = 2a, \quad Y_2 = 4a^2 + r, \ \ldots$$

et l'on vérifie, immédiatement, que l'on a

$$X_1 = AY_0 + aX_0, \quad \text{ou } 2a_2 + r = (a^2 + r)\, 1 + a^2;$$
$$Y_1 = aY_0 + X_0, \quad \text{ou } 2a = a.1 + a.$$

De même,

$$X_2 = AY_1 + aX_1, \text{ ou } 4a^3 + 3ar = 2a\,(a^2 + r) + a\,(2a^2 + r)$$
$$Y_2 = aY_1 + X_1, \text{ ou } 4a^2 + r = 2a^2 + (2a^2 + r).$$

Ainsi la loi se vérifie pour les premières fonctions X, Y; il est aisé de voir que cette loi est générale et qu'elle s'applique aux fonctions X_n, Y_n quel que soit n.

Supposons, en effet, que nous ayons

$$X_{n-1} = AY_{n-2} + aX_{n-2}, \qquad (1)$$

et,

$$Y_{n-1} = aY_{-2} + X_{n-2}; \qquad (2)$$

et proposons-nous de montrer que cette loi subsiste pour les fonctions X_n, Y_n.

Nous avons d'abord, par les formules connues, rappelées plus haut,

$$\left.\begin{aligned} X_n &= 2aX_{n-1} + rX_{n-2}, \\ Y_n &= 2aY_{n-1} + rY_{n-2}. \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

D'autre part, les égalités (1) et (2) donnent:

$$X_{n-1} - aY_{n-1} = rY_{n-2},$$
$$aX_{n-1} - AY_{n-1} = -rX_{n-2}.$$

Substituons les valeurs de rY_{n-2}, rX_{n-2} dans les formules (A). et nous obtenons les résultats suivants:

$$\left.\begin{aligned} X_n &= aX_{n-}^{1} + AY_{n-1}, \\ Y_n &= aY_{n-1} + X_{n-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (G)$$

Les formules de récurrence que nous avions soupçonnées sont donc démontrées.

6. — Par exemple, dans l'un des cas numériques examinés par M. Landry, dans le mémoire cité, celui où l'on considère le développement de $\sqrt{31}$, on a

$$\sqrt{31} = 5 + \cfrac{6}{10 + \cfrac{6}{10 + \cdots}} \qquad \left(\begin{aligned} A &= 31 \\ a &= 5 \\ r &= 6 \end{aligned}\right);$$

ainsi qu'il résulte de l'égalité

$$31 = 5^2 + 6.$$

Les réduites sont, dans cet exemple,

$$\frac{X_0}{Y_0} = \frac{5}{1}, \quad \frac{X_1}{Y_1} = \frac{56}{10}, \quad \frac{X_2}{Y_2} = \frac{590}{106}, \quad \frac{X_3}{Y_3} = \frac{6236}{1120}, \ldots$$

Chacune de ces réduites peut se calculer au moyen de la réduite précédente et l'on a bien, conformément à la loi que nous avons établie,

$$56 = 5 \times 5 + 31 \times 1 \qquad 10 = 5 \times 1 + 5$$
$$590 = 5 \times 56 + 31 \times 10 \qquad 106 = 5 \times 10 + 56$$
$$11236 = 5 \times 590 + 31 \times 106 \qquad 1120 = 5 \times 106 + 590$$

. . . .

Le point sur lequel nous venons de nous arrêter a pour but de montrer la liaison très simple qui unit les éléments X_n, Y_n, aux éléments analogues et immédiatement précédents X_{n-1}, Y_{n-1}. Il est le seul qui nous soit personnel dans la présente note, laquelle, comme nous l'avons dit plus haut, a surtout pour but de montrer comment M. Landry est arrivé à la résolution de l'équation de Pell et, aussi, à celle d'une équation plus générale. Mais ce point nous a paru avoir quelque intérêt parce qu'il est, ordinairement, très difficile de trouver une relation de récurrence simple entre les fonctions X_n, Y_n, et les fonctions voisines X_{n-1}. Y_{n-1}. Cette relation est plus puissante que la relation ordinaire entre X_n, Y_n; X_{n-1}, Y_{n-1}; X_{n-2}, Y_{n-2}; elle permet de reconnaître rapidement les propriétés des nombres récurrents X_n, Y_n.

(A suivre.)

CONSTRUCTION

DU CENTRE DE L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE

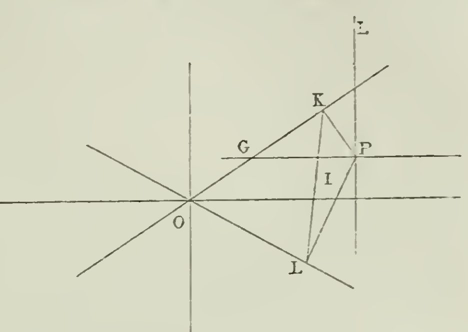
PASSANT PAR LES PIEDS DES NORMALES

MENÉES A UNE CONIQUE A CENTRE, PAR UN POINT DONNÉ

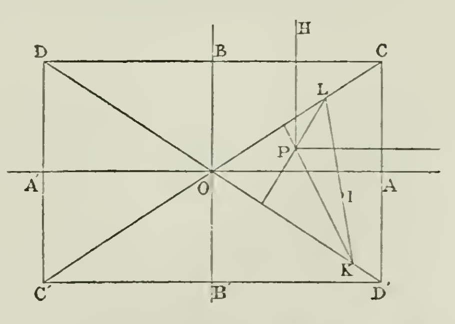
Par M. **Niewenglowski**, professeur au Lycée Louis-le-Grand.

Supposons d'abord que la conique donnée (C) soit une hyperbole. On sait, d'une manière générale, que l'hyperbole équilatère (E) passant par les pieds des normales à une conique

issues d'un point P, ne change pas, quand on remplace la conique par une autre, homothétique à la première, et ayant même centre. On peut donc remplacer l'hyperbole donnée par le système de ses deux asymptotes; par conséquent, les pieds K, L des perpendiculaires abaissées du point P sur les asymptotes de l'hyperbole donnée sont deux points de l'hyperbole équilatère (E). Je dis que le centre cherché est au point I, milieu de KL. Il suffit de prouver que PK et PL sont deux cordes supplémentaires de l'hyperbole (E). Pour cela, remarquons que si l'on mène par le point P des droites PG, PH, parallèles aux axes de l'hyperbole (C), on forme un faisceau harmonique (P, GHKL) composé de ces deux parallèles et des perpendiculaires aux asymptotes, puisque les rayons de ce faisceau sont respectivement perpendiculaires à ceux du faisceau formé par les axes et les asymptotes de l'hyperbole (C).



Cette construction est bien connue. La suivante, relative au cas de l'ellipse, l'est peut-être moins.



Supposons que la conique (C) soit une ellipse. Soient CC′, DD′ les diagonales du rectangle construit sur les deux axes AA′, BB′ de l'ellipse. Je mène par le point P la droite PK perpendiculaire à CC′ et je prends son intersection avec *l'autre* diagonale DD′; de même L est l'intersection de CC′ avec la perpendiculaire abaissée de P sur DD′.

Je dis que le milieu I de KL est encore le centre de l'hyperbole équilatère (E) relative à l'ellipse donnée. En effet, on voit d'abord, comme dans le cas précédent, que PK et PL sont deux cordes supplémentaires de l'hyperbole (E), car le faisceau (O, ABCD) étant harmonique, il en est de même du faisceau (P, GHKL) formé par les perpendiculaires PK, PL et par les parallèles aux axes : PG, PH. Il n'y a donc plus qu'à prouver que K et L sont des points de l'hyperbole (E). Or il y a une ellipse homothétique à la proposée, ayant même centre, et passant par le point K. Dans cette ellipse. les droites CC′, DD′ sont conjuguées, puisqu'elles donnent les directions des diamètres conjugués égaux; donc la tangente en K est parallèle à CC′, et par suite K est le pied d'une normale à cette ellipse, menée par le point P. Or l'hyperbole (E) est à la même place que pour l'ellipse (C), donc (E) passe par K, et aussi par L pour la même raison. La proposition est donc établie. Ces résultats sont faciles à vérifier par le calcul.

SUR LE LIMAÇON DE PASCAL

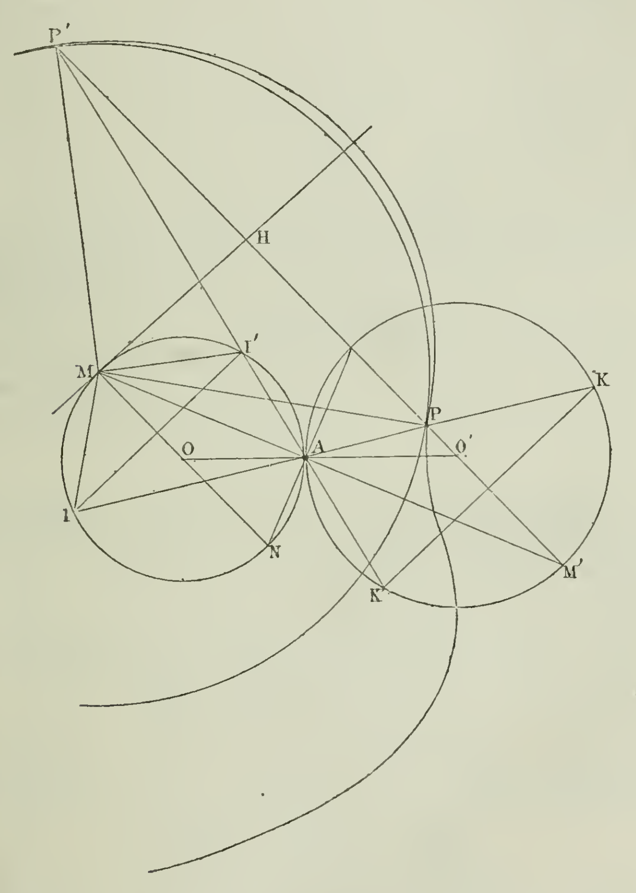
Par **M. Hadamard**, élève en Mathématiques spéciales,
au Lycée Louis-le-Grand.

Le limaçon de Pascal est anallagmatique (c'est-à-dire que l'on peut trouver une transformation par rayons vecteurs réciproques dans laquelle il soit son propre homologue). — La propriété devient illusoire lorsque le limaçon se réduit à une épicycloïde.

Soit le limaçon défini par le cercle O, le point A de ce cercle et la longueur a. Par le point A faisons passer un cercle O′ tangent au premier, et dont nous déterminerons ultérieurement le rayon. Imaginons qu'un cercle, ayant son centre en un point variable M du cercle O, se déplace de façon à couper toujours orthogonalement le cercle O′. Considérons l'enveloppe d'un tel cercle.

Pour cela soient deux positions M et M_1 de ce cercle.

Puisque le point O′ a même puissance par rapport aux cercles M et M_1, leur corde commune sera la perpendiculaire abaissée du point O′ sur la ligne qui joint leurs centres. Si alors on suppose que, le cercle M restant fixe, le cercle M_1 tend à se



confondre avec lui, on voit à la limite que les points de contact du cercle M avec son enveloppe seront ses deux points P et P′ d'intersection avec la perpendiculaire abaissée du point O′ sur les tangentes menées par le point M au cercle O; de sorte que l'enveloppe en question sera le lieu des points P et P′.

Or ce lieu est une courbe anallagmatique; car l'on a constamment $O'P' \times O'P' = \overline{O'A}^2$; et nous allons établir que c'est un limaçon de Pascal.

Pour cela joignons AP qui coupe O en I et le cercle O' en K; A'P' qui coupe le cercle O en I' et le cercle O' en K'. Les points P et P' étant réciproques par rapport au cercle O', la droite KK' est perpendiculaire au diamètre OPP', et par suite II' est perpendiculaire à OM. Dès lors l'angle de MP et de MI est égal à l'angle des demi-droites symétriques de celles-là par rapport à OM, qui sont MI' et le prolongement de MP'. Donc les angles PMI, P'MI' sont supplémentaires.

Mais dans le cercle O, les angles MIP, MI'P' sont égaux ou supplémentaires. Or ils ne peuvent être supplémentaires, sans quoi la somme des angles des deux triangles serait supérieure à 4 droits. Ils sont donc égaux.

D'ailleurs, on a MP = MP' et MI = MI' et, par suite, la construction ordinaire d'un triangle dans lequel on connaît deux côtés, et l'angle opposé à l'un d'eux montre que les angles IPM, I'P'M sont égaux ou supplémentaires.

Or, pour la même raison que plus haut, ils ne peuvent être supplémentaires; ils sont donc aussi égaux. Il en résulte l'égalité des triangles MIP, M'I'P' et par suite celle de leurs angles en M. Ces angles, étant à la fois égaux et supplémentaires, sont donc droits.

Dès lors, si N désigne le point diamétralement opposé au point M et que nous joignions AN, les triangles MIP, ANM sont semblables et donnent $IP = MN \cdot \dfrac{MP}{MA}$.

Or $MP = \sqrt{MA \cdot MM'}$, M' étant le point d'intersection de la droite MA avec le cercle O'. Donc

$$\frac{MP}{MA} = \sqrt{\frac{MM'}{MA}} = \sqrt{\frac{OO'}{OA}}.$$

D'où

$$IP = 2\sqrt{OA \cdot OO'} = \text{const.}$$

L'enveloppe du cercle M est donc un limaçon de Pascal. D'ailleurs, on peut disposer du rayon O'A de façon à ce que ce limaçon coïncide avec le limaçon donné; il suffira de

prendre OO′ troisième proportionnelle entre OO′ et $\frac{a}{2}$. Si donc on détermine le point O′ par cette construction, ce point sera le pôle d'une transformation par rayons vecteurs réciproques dans laquelle le limaçon se correspondra à lui-même.

NOTE SUR UN THÉORÈME DE JOACHIMSTHAL

Nous avons remarqué dans le *Traité de Géométrie* de MM. E. Rouché et C. de Comberousse (5me édition, page 448, 2me partie) l'énoncé d'un théorème remarquable sur les normales aux coniques.

Nous croyons que cette proposition n'est pas très connue, et nous espérons que nos lecteurs nous sauront gré d'indiquer un moyen de l'établir. Le théorème s'énonce ainsi :

Si d'un sommet A *d'une ellipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

on abaisse des perpendiculaires sur les quatre normales qu'on peut mener d'un point P (α, β) *à cette conique, les quatre points (tels que* Q*) où ces perpendiculaires rencontrent de nouveau la courbe appartiennent à un même cercle.*

Voici comment on pourrait établir ce théorème :

Soit PM une des quatre normales issues de P (*); si M est son point d'incidence et que φ désigne l'angle d'anomalie correspondant à ce point, de sorte que $a \cos \varphi$ et $b \sin \varphi$ soient respectivement l'abscisse et l'ordonnée de M, l'équation qui fournit les valeurs de φ relatives aux pieds des quatre normales issues de P est, comme on sait :

$$a\alpha \sin \varphi - b\beta \cos \varphi = (a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$(a^2 - b^2)^2 \sin^2 2\varphi = 2\,(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2) - 2\,(a^2\alpha^2 - b^2\beta^2) \cos 2\varphi - 4ab\alpha\beta \sin 2\varphi$$

Or il est facile de voir que l'angle 2φ est l'anomalie du

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

point Q; car AQ étant parallèle à la tangente à l'ellipse au point M, si l'on se reporte aux propriétés projectives du cercle décrit sur $2a$ comme diamètre, les arcs d'ellipse AM et AQ sont les projections de deux arcs de cercle dont l'un est la moitié de l'autre, et qui ont respectivement pour mesure les angles d'anomalie de M et de Q.

Si donc on pose, dans l'équation précédente,

$$x = a \cos 2\varphi, \quad y = b \sin 2\varphi,$$

elle deviendra

$$\frac{(a^2 - b^2)^2}{b^2} y^2 = 2(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2) - 2(a^2\alpha^2 - b^2\beta^2)\frac{x}{a} - 4a\alpha\beta y$$

et s'appliquera, par conséquent, aux coordonnées des quatre points Q. Ces points sont donc à la rencontre de l'ellipse proposée avec le lieu que représente l'équation précédente, si l'on y regarde x et y comme des coordonnées courantes.

Mais on a identiquement entre les coordonnées d'un point de l'ellipse la relation

$$x^2 + \frac{a^2y^2}{b^2} - a^2 = 0.$$

Si donc on multiplie cette relation par $a^2 - b^2$, et qu'on en retranche la première, l'équation résultante s'appliquera encore aux coordonnées des points tels que Q et représentera, par conséquent, un lieu passant par ces points. Il vient ainsi

$$(a^2 - b^2)(x^2 + y^2 - a^2) - 2(a^2\alpha^2 - b^2\beta^2)\frac{x}{a} - 4a\alpha\beta y$$
$$+ 2(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2) = 0,$$

équation qui représente bien un cercle.

Si l'on pose $\alpha' = a\dfrac{a^2\alpha^2 - b^2\beta^2}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}$, et $\beta' = b\dfrac{2ab\alpha\beta}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}$, cette équation prend la forme remarquable :

$$x^2 + y^2 - a^2 - 2\frac{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}{a^2 - b^2}\left(\frac{\alpha' x}{a^2} + \frac{\beta' y}{b^2} - 1\right) = 0$$

d'où l'on déduit immédiatement un deuxième théorème. Observons, en effet, que α' et β' sont les coordonnées du point S où la perpendiculaire abaissée de A sur OP rencontre de nouveau la courbe ; pour le vérifier, il suffit de

combiner les deux équations

$$\beta x - \alpha y = 0 \text{ et } \alpha(x - a) + \beta y = 0,$$

en y supprimant les solutions $x = a$ et $y = 0$.

Or $\frac{\alpha' x}{a^2} + \frac{\beta' y}{b^2} - 1 = 0$ est l'équation de la tangente à l'ellipse en ce point $S(\alpha'\beta')$; par conséquent :

Si on abaisse d'un sommet A *de l'ellipse une perpendiculaire sur le diamètre* OP, *perpendiculaire qui rencontre de nouveau la courbe en un point* S, *la tangente à la conique en* S *est la corde commune au cercle des points* Q *et à la circonférence* $x^2 + y^2 = a^2$.

Joachimsthal conclut de là une solution élégante du problème suivant :

Abaisser d'un point P *des normales sur une ellipse supposée tracée.*

Si l'on mène de A la perpendiculaire AS sur le diamètre OP, et qu'on détermine les intersections K et K′ de la tangente en S avec le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, il suffira ensuite de mener une circonférence passant en K et K′ et ayant son centre sur la droite

$$y = \frac{2a\alpha\beta}{a^2 - b^2},$$

parallèle au grand axe et facile à construire ; cette circonférence coupera la courbe aux quatre points désignés par la lettre Q, et les perpendiculaires abaissées du point P sur les quatre droites AQ seront les quatre normales cherchées.

Le même procédé de calcul s'applique sans modifications à l'hyperbole ; il suffit de déterminer les coordonnées d'un point de la courbe par les formules

$$x = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad y = b \operatorname{tang} \varphi.$$

Le théorème de Joachimsthal était proposé comme question d'examen par Abel Transon, pendant qu'il était examinateur d'admission à l'École polytechnique ; c'est pour répondre à

cette question que j'indiquais et que j'indique encore à mes élèves la solution suivante :

Désignons par (α, β) les coordonnées relativement aux axes de l'ellipse du point S d'où partent les quatre normales ; puis transportons l'origine au sommet de droite ; l'équation de l'ellipse devient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{2x}{a} = 0$$

et l'équation du faisceau des quatre projetantes sera

$$(\alpha x + \beta y)^2(b^2x^2 + a^2y^2) - c^4x^2y^2 = 0.$$

Le système de ces deux équations peut être remplacé par le suivant :

$$b^2x^2 + a^2y^2 + 2ab^2x = 0$$

$$c^4x^2y^2 + 2ab^2x\left[\alpha^2x^2 + 2\alpha\beta xy - \frac{\beta^2}{a^2}\ (b^2x^2 + 2ab^2x)\right] = 0$$

Supprimons dans la dernière équation le facteur x^2, ce qui revient à supprimer, dans l'intersection, quatre fois le sommet de l'ellipse, les quatre points restants seront sur la conique :

$$c^4y^2 + 2ab^2\left[\alpha^2x + 2\alpha\beta y - \frac{b^2\beta^2}{a^2}\ (x + 2a)\right] = 0 \quad (u)$$

qui a les mêmes directions principales que l'ellipse : donc les quatre points d'intersection avec l'ellipse sont sur une même circonférence.

On peut même remarquer que cette conique est une parabole ; ce qui ramène à la méthode classique : intersection d'un cercle et d'une parabole.

E. V.

QUESTION 51

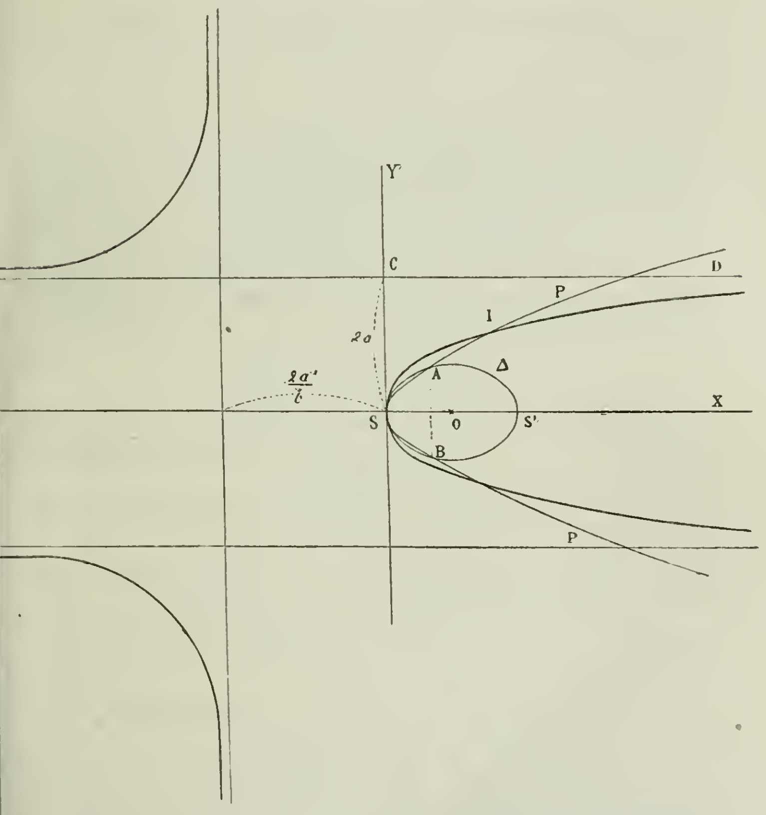
Solution par M. Clément, élève au Lycée de Rouen.

On considère une conique à centre Δ *; soit* S *l'un des sommets de cette courbe et* AB *une corde principale. On trace une parabole* P *passant par les points* A *et* B, *et ayant, elle aussi, le point* S *pour sommet. Soit* I *le point de contact de la parabole* P

avec une droite à la fois tangente à Δ *et à* P. *Lieu de ce point* I *quand la corde* AB *se meut parallèlement à elle-même.* (G. L.)

Considérons le sommet de gauche S de l'ellipse; prenons pour axe des x le grand axe de l'ellipse, et pour axe des y la tangente au sommet S. L'équation de l'ellipse est alors

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2ab^2x = 0.$$



L'équation de la parabole ayant le point S pour sommet et passant par les points A, B est de la forme

$$y^2 = 2px.$$

Soit $y = \alpha x + \frac{p}{2\alpha}$ l'équation d'une tangente à cette para-

bole. Exprimons que cette droite est tangente à l'ellipse Δ; en éliminant y entre l'équation de la tangente et celle de Δ, et en exprimant que l'équation obtenue a deux racines égales, on trouve la condition

$$b \times \frac{p^2}{\alpha^2} + 4a^2p - 4a^2b = 0.$$

Le point I se trouve sur le diamètre de la parabole conjuguée de la direction α, diamètre dont l'équation est

$$y = \frac{p}{\alpha}.$$

En éliminant α et p entre les trois dernières équations, on trouve pour l'équation du lieu du point I

$$bxy^2 + 2a^2y^2 - 4a^2bx = 0.$$

Construisons cette courbe qui est symétrique par rapport à l'axe des x. On tire de là

$$x = \frac{2a^2y^2}{4a^2b - by^2} = \frac{2a^2}{\frac{4a^2b}{y^2} - b}.$$

Pour $y = 0$, on a $x = 0$, et l'axe des y est tangent à l'origine.

Lorsqu'on fait croître y, x augmente et reste positif tant que $y^2 > 4a^2$.

Pour $y = 2a$, on a $x = \infty$; soit CD la droite $y = 2a$; cette droite est asymptote.

Lorsque y croît de $2a$ à $+\infty$, x croît de $-\infty$ à $-\frac{2a^2}{b}$.

La droite $x = -\frac{2a^2}{b}$ est asymptote. Ces valeurs négatives de x correspondent au cas où la droite AB se confond avec la tangente Sy et où la parabole est tout entière située du côté des x négatifs.

La symétrie par rapport à l'axe des x permet d'achever le tracé de la courbe. Si au lieu de considérer le sommet de gauche S de l'ellipse, on considérait le sommet de droite S', la courbe obtenue serait symétrique de la précédente par rapport au centre O de l'ellipse.

NOTA — La même question a été résolue par MM. Rat, à Marseille; Coulom, au collège Chaptal, à Paris. Les auteurs de ces solutions ont essayé de trouver la modification que subit le lieu lorsque la conique donnée devient une hyperbole.

QUESTION 56

Solution par M. COROT, élève au Lycée de Troyes.

Trouver le lieu des centres des cercles passant par le point de rebroussement d'une cardioïde, et tangente à la courbe en un autre point. Par le second point d'intersection de deux des cercles précédents, on mène une droite quelconque qui rencontre les deux cercles en A et A'. Démontrer que les tangentes aux cercles en A et A' se coupent sur la cardioïde.

L'équation de la cardioïde rapportée à son axe pris pour axe polaire et à son point de rebroussement O pris pour pôle est

$$\rho = 2a(1 - \cos\theta).$$

Un cercle passant par le point O et dont les coordonnées du centre sont r et α a pour équation

$$\rho = 2r\cos(\theta - \alpha).$$

Il sera tangent à la cardioïde si l'on a

$$\frac{2r\cos(\theta-\alpha)}{-2r\sin(\theta-\alpha)} = \frac{2a(1-\cos\theta)}{2a\sin\theta} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}},$$

ou

$$\cot g(\theta - \alpha) = -\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \cot g\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right);$$

d'où

$$\theta = \pi + 2\alpha.$$

Pour avoir l'équation du lieu cherché, il faut éliminer ρ et θ entre les deux premières équations et cette dernière; cela donne :

$$r\cos(\pi + \alpha) = a[1 - \cos(\pi + 2\alpha)] = a(1 + \cos 2\alpha)$$

ou

$$-r\cos\alpha = 2a\cos^2\alpha$$

ou

$$r = 2a \cos (\pi + \alpha).$$

Le lieu est donc un cercle de rayon a et dont le centre est sur OX'.

Prenons deux points $I(r_1, \alpha_1)$ $I'(r_2, \alpha_2)$ sur ce cercle, on a

$$r_1 = 2a \cos (\pi + \alpha_1), \quad r_2 = 2a \cos (\pi + \alpha_2).$$

Ces points I et I' sont les centres de deux cercles passant par O et ayant alors respectivement pour équation :

$$\rho = 4a \cos (\pi + \alpha_1) \cos (\theta - \alpha_1),$$
$$\rho = 4a \cos (\pi + \alpha_2) \cos (\theta - \alpha_2).$$

Si par leur second point d'intersection on mène une sécante qui les coupe en A et A', nous savons que l'angle AOA' est constant et égal à l'angle IOI', c'est-à-dire $\alpha_2 - \alpha_1$, en supposant $\alpha_2 > \alpha_1$.

Menons donc par O deux droites

$$\theta = K, \quad \theta = K + \alpha_2 - \alpha_1.$$

La première coupe le cercle I en un point A qui a pour coordonnées

$$\rho_1 = 4a \cos(\pi + \alpha_1) \cos (K - \alpha_1), \quad \theta = K.$$

La deuxième coupe le cercle I' en un point A' qui a pour coordonnées

$$\rho_2 = 4a \cos (\pi + \alpha_2) \cos (K - \alpha_1), \quad \theta = K + \alpha_2 - \alpha_1.$$

La tangente au point A a pour équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos (\theta - K)}{4a \cos(\pi + \alpha_1) \cos(K - \alpha_1)} + \frac{\sin (K - \alpha_1)}{4a \cos(\pi + \alpha_1) \cos^2(K - \alpha_1)} \sin(\theta - K)$$

ou

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos (\theta + \alpha_1 - 2K)}{4a \cos (\pi + \alpha_1) \cos^2 (K - \alpha_1)}.$$

La tangente en A' a aussi pour équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos [\theta - (K + \alpha_2 - \alpha_1)]}{4a \cos (\pi + \alpha_2) \cos^2 (K - \alpha_1)}$$
$$+ \frac{\sin (K - \alpha_1)}{4a \cos (\pi + \alpha_2) \cos^2 (K - \alpha_1)} \sin [\theta - (K + \alpha_2 - \alpha_1)]$$

ou

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos [2K - 2\alpha_1 + \alpha_2 - \theta]}{4a \cos (\pi + \alpha_2) \cos^2 (K - \alpha_1)}.$$

La coordonnée θ du point de rencontre des tangentes sera donnée en égalant les deux membres de leurs équa-

tions, c'est-à-dire en posant

$$\frac{\cos(\theta + \alpha_1 - 2K)}{\cos(\pi + \alpha_1)} = \frac{\cos(2K - 2\alpha_1 + \alpha_2 - \theta)}{\cos(\pi + \alpha_2)}.$$

ou

$$\cos(\theta + \alpha_1 + \alpha_2 - 2K + \pi) + \cos(\theta + \alpha_1 - \alpha_2 - 2K - \pi)$$
$$= \cos(\theta + \alpha_1 - \alpha_2 - 2K - \pi) + \cos(2K - 3\alpha_1 + \alpha_2 - \theta - \pi)$$

ou

$$\theta = 2(K - \alpha_1) - \pi,$$

et par suite

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos(\pi + \alpha_2)}{4a\cos(\pi + \alpha_2)\cos^2(K - \alpha_1)}$$

ou

$$\rho = 4a\cos^2(K - \alpha_1).$$

Portant ces valeurs de θ et de ρ dans l'équation de la cardioïde, on a l'identité

$$4a\cos^2(K - \alpha_1) = 4a\cos^2(K - \alpha_1),$$

ce qui prouve que les tangentes se coupent sur la cardioïde.

QUESTION 61

Solution par M. Clément, élève au Lycée de Rouen.

On considère une ellipse rapportée à ses axes AA', BB'. *D'un point* C *pris sur l'axe* Oy *avec* CA = CA' *pour rayon, on décrit un cercle* Δ, A *et* A' *désignant les extrémités du grand axe.*

1. — *Soit* M *un point mobile sur* Δ ; *par ce point* M *on mène à l'ellipse des tangentes. La droite qui joint les points de contact rencontre* Δ *en deux points* P *et* Q, *et les tangentes en* P *et* Q *à* Δ *se rencontrent en un point* I *dont on demande le lieu géométrique quand* M *parcourt la circonférence.*

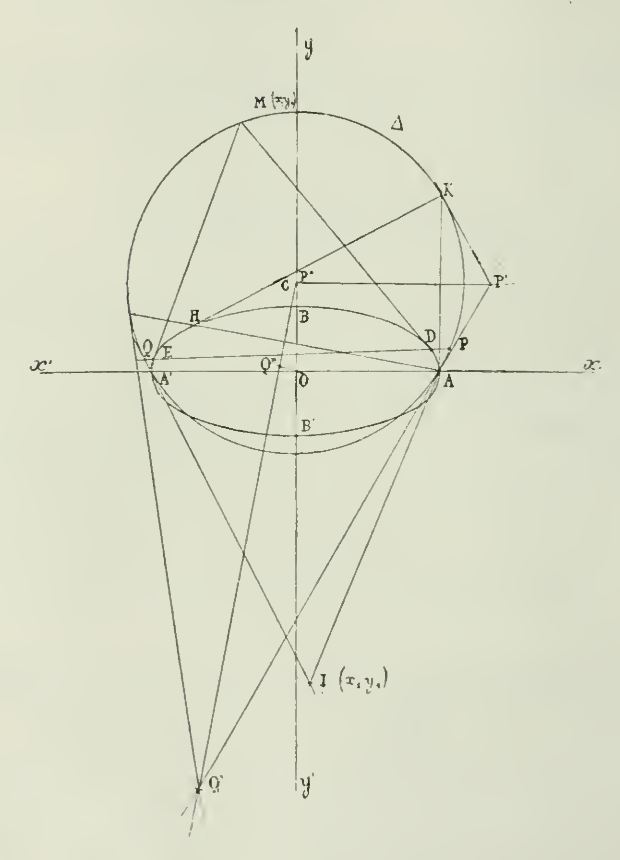
2. — *Ce lieu est une conique* U, *dont on demande de déterminer le genre d'après la position du point* C *sur* Oy.

3. — *Construire cette conique en supposant* $a^2 = 3b^2$, *et en admettant que* C *coïncide avec* B.

4. — *La tangente en* A *au cercle rencontre* U *en deux points* P' *et* Q'. *Trouver le lieu de* P' *et celui de* Q' *quand* C *décrit* Oy,

5. — *De l'origine on abaisse une perpendiculaire* OP″ *sur* CP′, *et une autre* OQ″ *sur* CQ′. *Trouver le lieu de* P″ *et celui de* Q″.

(G. L.)



1. — Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes.

Posons OC $= d$; alors l'équation du cercle Δ est

$$x^2 + y^2 - 2dy - a^2 = 0.$$

Soient x_0, y_0 les coordonnées d'un point M de la circon-

férence, et x_1, y_1 les coordonnées du point I. On a la relation

$$x_0^2 + y_0^2 - 2dy_0 - a^2 = 0. \qquad (1)$$

La polaire DE du point M par rapport à l'ellipse a pour équation

$$b^2x_0x + a^2y_0y - a^2b^2 = 0.$$

La polaire PQ du point I par rapport au cercle a pour équation

$$x_1x + (y_1 - d)y - dy_1 - a^2 = 0.$$

Exprimons que ces deux polaires coïncident:

$$\frac{b^2x_0}{x_1} = \frac{a^2y_0}{y_1 - d} = \frac{a^2b^2}{dy_1 + a^2}.$$

Éliminons x_0, y_0 entre ces deux relations et la relation (1), nous aurons le lieu du point I:

$$\frac{a^4x_1^2}{(dy_1 + a^2)^2} + \frac{b^4(y_1 - d)^2}{(dy_1 + a^2)^2} - \frac{2b^2d(y_1 - d)}{dy_1 + a^2} - a^2 = 0$$

ou, en chassant les dénominateurs et ôtant les indices,

$$a^4x^2 + b^4(y - d)^2 - 2b^2d(y - d)(dy + a^2) - a^2(dy + a^2)^2 = 0$$

Cette équation développée devient

$$a^4x^2 + \left|\begin{array}{l} b^4 \\ -2b^2d^2 \\ -a^2d^2 \end{array}\right| y^2 \left|\begin{array}{l} -2b^4d \\ +2b^2d^3 \\ -2a^2b^2d \\ -2a^4d \end{array}\right| y \left|\begin{array}{l} +b^4d^2 \\ +2a^2b^2d^2 \\ -a^6 \end{array}\right| = 0$$

équation d'une conique.

2. — Considérons la quantité $B^2 - AC$; ici B est nul et A est positif;

Donc si

$$b^4 - 2b^2d^2 - a^2d^2 > 0,$$

c'est-à-dire si

$$d^2 < \frac{b^4}{a^2 + 2b^2},$$

la conique sera une ellipse.

Si

$$d^2 > \frac{b^4}{a^2 + 2b^2},$$

le lieu du point I sera une hyperbole; et enfin si

$$d^2 = \frac{b^4}{a^2 + 2b^2},$$

le lieu sera une parabole (*).

3. — On suppose $a^2 = 3b^2$, $d = b$, et il s'agit de construire la courbe. On a dans ce cas

$$d^2 > \frac{b^4}{a^2 + 2b^2},$$

c'est-à-dire que la courbe est une hyperbole.

Son équation est

$$9b^4x^2 - 4b^4y^2 + 24b^5y - 20b^6 = 0$$

ou

$$9x^2 - 4y^2 - 24by - 20b^2 = 0.$$

Oy est l'axe transverse, et les points situés sur cet axe, c'est-à-dire les sommets, sont donnés par l'équation

$$y^2 + 6by + 5b^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$y = \left| \begin{array}{l} -5b \\ -b. \end{array} \right.$$

Le centre a pour coordonnées

$$x = 0, \qquad y = 3b.$$

Les directions asymptotiques α sont données par l'équation

$$9 - 4\alpha^2 = 0,$$

d'où

$$\alpha = \pm \frac{3}{2}.$$

Par conséquent, comme on a les coordonnées du centre, les équations des asymptotes sont

$$\left\{ \begin{array}{l} y + \dfrac{b}{3} = \dfrac{3}{2}x \\ y + \dfrac{b}{3} = -\dfrac{3}{2}x. \end{array} \right.$$

On a les sommets, les asymptotes ; on peut donc construire les foyers et par suite la courbe.

(*) Il fallait indiquer, au moyen d'une construction géométrique, la position du point qui est situé sur l'axe des y et qui correspond à la parabole

G. L.

4. — *Lieu du point* P'. — Supposons que le point mobile M vienne coïncider avec le point A ; la polaire du point A par rapport à l'ellipse est la perpendiculaire AK à l'axe des x ; le pôle de cette droite AK par rapport au cercle, c'est le point P'. On voit que le point P' est à l'intersection de la tangente en A au cercle et de la parallèle à Ox menée par le point C, c'est-à-dire à l'intersection des droites

$$ax - dy - a^2 = 0,$$
$$y = d.$$

En éliminant d, on a

$$y^2 = ax - a^2,$$

équation d'une parabole ayant pour axe Ox et pour sommet le point A.

Lieu du point Q'. — Considérons la polaire AH du point K par rapport à l'ellipse. Le point Q' est le pôle de cette droite par rapport au cercle ; il est donc situé sur la tangente en A au cercle et sur la perpendiculaire à AH menée par le point C. Les coordonnées du point K sont $x = a$, $y = 2d$; le coefficient angulaire de AH est donc

$$-\frac{b^2a}{2a^2d} = -\frac{b^2}{2ad}.$$

L'équation de CQ' est

$$y - d = \frac{2ad}{b^2}x$$

et l'équation de AP' : $ax - dy - a^2 = 0$.

En éliminant d entre ces deux équations, on a

$$ax - \frac{b^2y^2}{b^2 + 2ax} - a^2 = 0,$$

$$2a^2x^2 - b^2y^2 - \left.\begin{matrix} 2a^3 \\ + ab^2 \end{matrix}\right| x - a^2b^2 = 0.$$

Telle est l'équation du lieu du point Q'. Ce lieu est une hyperbole ayant Ox pour axe transverse et dont les coordonnées du centre sont

$$\left| \begin{array}{l} y = 0 \\ x = \dfrac{2a^2 - b^2}{4a}. \end{array} \right.$$

5. — *Lieu du point* P''. — Ce lieu est évidemment l'axe des y, puisque CP' est perpendiculaire sur Oy.

Lieu du point Q″. — L'équation de la perpendiculaire OQ″ abaissée du point O sur CQ′ est

$$y = \frac{b^2}{2ad}x.$$

En éliminant d entre les équations de CQ′ et de OQ″, on a l'équation du lieu de Q″

$$y + \frac{b^2x}{2ay} + \frac{x^2}{y} = 0,$$

$$2ax^2 + 2ay^2 + b^2x = 0,$$

équation d'un cercle passant par l'origine. Son centre a pour coordonnées

$$y = 0, \qquad x = \frac{b^2}{4a}.$$

Nota. — La même question a été résolue par MM. Laillard, au collège Chaptal, à Paris ; Giat, à Moulins ; Collin, à Dijon.

QUESTION PROPOSÉE

121. — Les cordes d'une ellipse des extrémités desquelles partent deux normales se coupant sur la développée sont normales à une ellipse homofocale de la première.

(L. Lévy.)

ERRATUM

Page 56, 2e ligne, remplacer le dernier terme e de la deuxième parenthèse par

$$e^{r\pi + \frac{\omega}{2}}.$$

Même page, lignes 6 à 12, remplacer (4) par (5), (5) par (6) et (6) par (7).

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 9570-4.

SUR UN MÉMOIRE DE M. LANDRY

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite et fin*, voir page 73.)

7. Démonstration du théorème de M. Landry. — Les formules (G) donnent la démonstration immédiate du théorème que nous avons énoncé plus haut (§ 3). M. Landry a donné, dans son mémoire, deux démonstrations très simples de l'égalité :

$$p^2 - Ap'^2 = - r(m^2 - Am'^2),$$

que vérifient les quatre termes m, m'; p, p'; de deux réduites consécutives : $\frac{p}{p'}$, $\frac{m}{m'}$. Voici comment on peut encore établir cette proposition.

Les relations (G) étant écrites sous la forme

$$m = ap + Ap',$$
$$m' = ap' + p;$$

donnent

$$m^2 - Am'^2 = (ap + Ap')^2 - A(ap' + p)^2,$$

ou

$$m^2 - Am'^2 = - (A - a^2)(p^2 - Ap'^2),$$

ou, enfin,

$$m^2 - Am'^2 = - r(p^2 - Ap'^2).$$

En revenant à la notation ordinaire, on a

$$X_n^2 - AY_n^2 = - r(X_{n-1}^2 - AY_{n-1}^2)$$

Tel est, dit M. Landry, le principe qui nous a frappé. Nous pensons avec lui que cette récurrence entre les fonctions X_n, Y_n, d'une part, et les fonctions X_{n-1}, Y_{n-1}, d'autre part, est remarquable, et la preuve de l'attention que nous semble mériter la formule précédente découle, en partie, de l'application très heureuse que l'auteur en a faite à l'analyse indéterminée.

8. Application du théorème de M. Landry à l'analyse indéterminée. — Nous ne pouvons développer ici, quelque intérêt que nous attachions à cette étude, tous

les points que soulève ce mémoire, dont le tort principal a été, sans doute, de n'avoir pas été connu à son heure. Nous indiquerons pourtant, en terminant cette note, l'usage que M. Landry a fait de son théorème, pour la résolution des équations indéterminées de la forme

$$x^2 - Ay^2 = \pm r^m.$$

C'est par cette application que le travail de M. Landry se rattache à l'équation de Pell, ou aux équations de même espèce, et qu'il mérite de prendre rang à côté des mémoires que nous avons cités dans notre article, rappelé plus haut.

Il résulte du théorème de M. Landry que si l'on développe $\sqrt{A}$ en fraction continue, par la formule qu'il a indiquée dans son mémoire, on a

$$X_n^2 - AY_n^2 = -r(X_{n-1}^2 - AY_{n-1}^2),$$
$$X_{n-1}^2 - AY_{n-1}^2 = -r(X_{n-2} - AY_{n-2}^2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X_2^2 - AY_2^2 = -r(X_1^2 - AY_1^2),$$
$$X_1^2 - AY_1^2 = -r;$$

et, par suite,

$$X_n^2 - AY_n^2 = (-1)^n r^n.$$

De cette formule résulte, d'une façon évidente, l'application signalée par M. Landry. Pour citer ses propres exemples, le tableau suivant montre l'usage qu'on en peut faire.

9. — Premier Exemple.

$$x^2 - 19y^2 = 3^4.$$

On a

$$19 = 4^2 + 3.$$

par conséquent,

$$\sqrt{19} = 4 + \cfrac{3}{8 + \cfrac{3}{8 +}}$$
$$\cdots$$

Réduites :

$$\frac{4}{1}, \quad \frac{35}{8}, \quad \frac{292}{67}, \quad \frac{2441}{560}.$$

$$x = 2441, \quad y = 560,$$

représentent une solution de l'équation proposée.

On peut vérifier que l'on a, en effet,

$$(2441)^2 - 19\,(560)^2 = 3^4,$$

ou,

$$5\,958\,481 - 5\,958\,400 = 81.$$

DEUXIÈME EXEMPLE.

$$x^2 - 31y^2 = -6^3.$$

On a

$$\sqrt{31} = 5 + \cfrac{6}{10 + \cfrac{6}{10 + \cdots}}$$

Réduites :

$$\frac{5}{1},\quad \frac{56}{10},\quad \frac{590}{106}.$$

$$x = 590,\quad y = 106,$$

constituent une solution de l'équation.

10. — Il y a dans le mémoire (*) de M. Landry plusieurs autres points très intéressants, tels que les rapprochements qu'il établit entre sa méthode et celles que Lagrange et Gauss ont indiquées pour résoudre les équations indéterminées, de l'espèce précédente. Mais nous regrettons de ne pouvoir, ici, insister davantage sur ces diverses parties.

Nous signalerons pourtant, en terminant cette notice, l'application faite par M. Landry, de la formule

$$\sqrt{A} = a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \cdots}}$$

à l'extraction des racines carrées.

(*) Si cette note intéressait quelque ami de l'arithmétique, et s'il désirait connaître plus complètement le mémoire en question, nous croyons qu'il peut le demander à l'auteur (77, rue Denfert-Rochereau), qui le lui enverra gracieusement.

Prenons l'exemple déjà cité

$$A = 31, \quad a = 5, \quad r = 6.$$

Si l'on fait abstraction de la partie entière, on peut former le tableau suivant :

Réduites :

$$\frac{6}{10} \quad \frac{60}{106} \quad \frac{636}{1120} \quad \frac{6720}{11836} \quad \frac{71016}{125080} \quad \frac{750480}{1321816} \quad \ldots ;$$

Valeurs décimales :

$$0{,}6;\ 0{,}566\ldots;\ 0{,}56785\ldots;\ 0{,}567759\ldots;$$
$$0{,}5677646\ldots;\ 0{,}567764348\ldots;$$

Mais posons maintenant

$$A = 31, \quad a = 5{,}5, \quad r = 0{,}75.$$

Nous avons alors :

$$\sqrt{31} = 5{,}5 + \cfrac{0{,}75}{11 + \cfrac{0{,}75}{11 + \ldots}}$$

Les réduites, abstraction faite de 5,5 sont :

$$\frac{75}{1100};\quad \frac{825}{12175};\quad \frac{913125}{13475000}.$$

Si on les convertit en décimales, on obtient :

$$0{,}068\ldots;\ 0{,}067761\ldots;\ 0{,}06776437\ldots;$$

et l'on a pour $\sqrt{31}$ les valeurs approchées :

$$5{,}568,\quad 5{,}567761,\quad 5{,}56776437.$$

Prenons maintenant les valeurs suivantes :

$$A = 31, \quad a = 5{,}56, \quad r = 0{,}0864.$$

Nous avons

$$\sqrt{31} = 5{,}56 + \cfrac{0{,}0864}{11{,}12 + \cfrac{0{,}0864}{11{,}12 + \ldots}}$$

Les deux premières réduites sont :

$$\frac{864}{111200},\quad \frac{960768}{123740800}.$$

Ces réduites augmentées de 5,56 donnent, respectivement,

5,567 769... ; (1) 5,567 764 367... (2)

Ainsi, en prenant pour point de départ deux chiffres décimaux exacts, le calcul d'une seule réduite a donné la valeur (1), dans laquelle, comme on peut le vérifier, il y a cinq chiffres décimaux exacts. Avec deux réduites on a la valeur (2) dans laquelle il y a huit chiffres exacts; la valeur de $\sqrt{31}$ étant comprise entre

5,567 764 363 5..., et 5,567 764 368 5...

Si nous ne nous trompons, cette méthode permet de calculer rapidement des valeurs approchées des irrationnelles du second degré.

ÉLIMINATION PAR LA MÉTHODE DE BEZOUT

PERFECTIONNÉE PAR CAUCHY

Solution par M. AMIGUES, professeur au lycée de Marseille.

Dans cette méthode, la démonstration du théorème réciproque offre quelque difficulté. Voici comment, depuis quelques années, j'expose cette question au lycée de Marseille.

1. — Soient $f(x) = 0$, et $\varphi(x) = 0$, deux équations algébriques et entières de degrés m et p.

On isole dans le premier membre de chacune tous les termes divisibles par x, puis on divise membre à membre, en supprimant le facteur x dans les deux termes du premier membre. C'est le facteur x qu'il faut seul supprimer, lors même que l'on aurait haut et bas en facteur une puissance de x supérieure.

On isole ensuite dans le premier membre de chacune des équations données tous les termes divisibles par x^2, puis on divise membre à membre, en supprimant le facteur x^2 dans les deux termes du premier membre, mais en se gardant bien de supprimer une puissance supérieure de x, si elle était en facteur.

On continue de même. Si l'on a $p = m$, on obtient ainsi m équations de degré $(m - 1)$. Si l'on a $p < m$, on peut

compléter le polynôme $\varphi(x)$ par des coefficients nuls de manière à le rendre de degré m, et on obtient encore m équations de degré $(m - 1)$.

C'est de cette façon que Cauchy obtient m équations de degré $m - 1$.

Bezout les obtenait d'une façon un peu moins simple.

Remarquons enfin que, dans le cas où $p < m$, il est bon de substituer aux $(m - p)$ dernières équations de Cauchy des équations plus avantageuses. On ne complète pas le polynôme $\varphi(x)$ par des coefficients nuls. Alors le calcul de Cauchy donne p équations. Seulement, et à la place des $(m - p)$ autres, on prend les $(m - p)$ équations suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 0 \\ x\varphi(x) &= 0 \\ x^2\varphi(x) &= 0 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x^{m-p-1}\varphi(x) &= 0 \end{aligned}$$

qui sont au plus de degré $(m - 1)$.

Nous obtenons ainsi m équations qui sont au plus de degré $(m - 1)$. Nous les appellerons les équations A.

Si dans les équations A on regarde x, $x^2 \ldots x^{m-1}$ comme autant d'inconnues distinctes, on a un système de m équations du premier degré à $(m - 1)$ inconnues et non homogènes. Nous appellerons ce système le système B.

2. — Cela posé, il est clair que si $x = \mu$ est une racine commune aux deux équations $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$, cette même valeur est aussi racine de chacune des équations A, puisque chacune de ces dernières est une conséquence des équations $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$. Mais alors on peut dire que

$$x = \mu, \quad x^2 = \mu^2, \quad x^3 = \mu^3 \ \ldots \ x^{m-1} = \mu^{m-1}$$

est une solution du système linéaire B ; et dès lors, ce système admettant une solution, il est nécessaire que son déterminant Δ soit nul.

En résumé, si les deux équations proposées ont une racine commune, il faut que l'on ait $\Delta = 0$.

Mais les raisonnements qui précèdent ne s'appliquent qu'à une racine commune finie. Je dis que le théorème est encore vrai pour une racine commune infinie. En effet, si les deux équations admettent une racine commune infinie, le coefficient de x^m dans $f(x)$ et celui de x^p dans $\varphi(x)$ sont nuls. Or les éléments de la première colonne du déterminant Δ sont tous nuls dans ce cas-là, comme il est facile de le vérifier.

Remarquons une propriété du déterminant Δ, qui nous sera utile pour la démonstration de la réciproque. Je dis que le déterminant Δ est *au plus* de degré p par rapport aux coefficients de $f(x)$ et *au plus* de degré m par rapport aux coefficients de $\varphi(x)$. Car les éléments des p premières lignes sont linéaires par rapport aux coefficients de f, et linéaires par rapport aux coefficients de φ, et ceux des $m - p$ dernières ne contiennent pas les coefficients de f et sont linéaires par rapport aux coefficients de φ.

3. — Réciproquement, si l'on a $\Delta = 0$, les équations $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ ont une racine commune finie ou infinie.

Si les deux équations ont des racines infinies, le théorème est démontré. Supposons donc que l'une d'elles au moins n'ait pas de racine infinie, et soit $\varphi(x) = 0$ celle-là. Désignons ses p racines, qui sont toutes finies, par

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \ldots \alpha_p.$$

La quantité $f(\alpha_1)$ est finie. Désignons-la par β_1. On a dès lors

$$f(\alpha_1) - \beta_1 = 0$$
$$\varphi(\alpha_1) = 0,$$

ce qui prouve que les deux équations

$$f(x) - \beta_1 = 0$$
$$\varphi(x) = 0$$

ont une racine commune $x = \alpha_1$. Donc il *est nécessaire* que le déterminant analogue à Δ et relatif à ces équations soit nul. Appelons ce déterminant Δ'. On a donc

$$\Delta' = 0\,;$$

Δ' est un polynôme de degré *au plus égal* à p par rapport aux coefficients de l'équation

$$f(x) - \beta_1 = 0$$

et par suite de degré *au plus égal* à p par rapport à β_1. La condition

$$\Delta' = 0$$

peut donc s'écrire

$$A + B\beta_1 + C\beta_1^2 + \ldots = 0$$

β_1 entrant dans le premier membre au plus avec le degré p.

Je dis que $A = \Delta$.

En effet, comme les équations

$$f(x) = 0$$
$$\varphi(x) = 0$$

se déduisent des équations

$$f(x) - \beta_1 = 0$$
$$\varphi(x) = 0$$

en faisant dans ces dernières $\beta_1 = 0$; de même Δ doit se déduire de Δ' en faisant dans Δ', $\beta_1 = 0$. On a donc bien

$$A = \Delta.$$

La condition ci-dessus peut alors s'écrire

$$\Delta + B\beta_1 + C\beta_1^2 + \ldots = 0$$

ou bien, en tenant compte de l'hypothèse $A = 0$,

$$B\beta_1 + C\beta_1^2 + \ldots = 0.$$

Ceci prouve que β_1, ou en d'autres termes $f(\alpha_1)$. est racine de l'équation

$$By + Cy^2 + \ldots = 0.$$

On prouverait de même que

$$f(\alpha_2), \quad f(\alpha_3) \ldots f(\alpha_p)$$

sont racines de cette équation, ce qui fait voir que cette équation atteint le degré p et qu'elle n'a pas d'autres racines que

$$f(\alpha_1), \quad f(\alpha_2) \ldots f(\alpha_p).$$

Or, elle a évidemment une racine nulle. Donc on a par exemple

$$f(\alpha_i) = 0$$

et par suite α_i est racine commune finie des équations

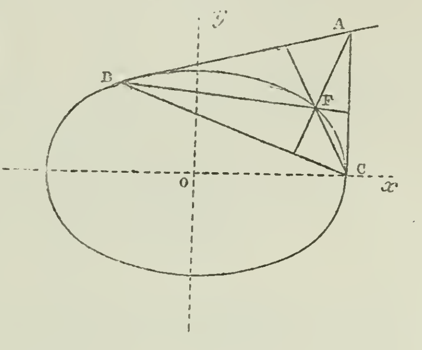
$$f(x) = 0$$
$$\varphi(x) = 0.$$

C. Q. F. D.

PROBLÈME SUR L'ELLIPSE

Solution par M. P. GIAT, élève de mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis (classe de M. Ed. Lucas).

Trouver le lieu du sommet A *d'un triangle* ABC *formé par deux tangentes* AB, AC *à une ellipse et la corde des contacts* BC, *et tel que ses trois hauteurs se coupent en* F *sur la courbe.*



Solution analytique.

Prenons pour axes de coordonnées les axes de l'ellipse. Désignons par φ_1, φ_2 et φ les paramètres angulaires de B, C et F.

L'équation de la droite BC est

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}=\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}.$$

La tangente au point B a pour équation

$$\frac{x}{a}\cos\varphi_1+\frac{y}{b}\sin\varphi_1=1 \qquad (1)$$

et la tangente au point C

$$\frac{x}{a}\cos\varphi_2+\frac{y}{b}\sin\varphi_2=1. \qquad (2)$$

L'équation de la droite CF est

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\varphi+\varphi_2}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\varphi+\varphi_2}{2}=\cos\frac{\varphi-\varphi_2}{2}.$$

Exprimons qu'elle est perpendiculaire sur AB, nous en déduisons

$$\frac{1}{a^2}\cos\varphi_1\cos\frac{\varphi+\varphi_2}{2}+\frac{1}{b^2}\sin\varphi_1\sin\frac{\varphi+\varphi_2}{2}=0$$

ou en effectuant et ordonnant par rapport à $\frac{\varphi}{2}$:

$$\cos\frac{\varphi}{2}\left(\frac{1}{a^2}\cos\varphi_1\cos\frac{\varphi_2}{2}+\frac{1}{b^2}\sin\varphi_1\sin\frac{\varphi_2}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{a^2}\cos\varphi_1\sin\frac{\varphi_2}{2}-\frac{1}{b^2}\sin\varphi_1\cos\frac{\varphi_2}{2}\right)\sin\frac{\varphi}{2}.$$

On aurait de même, en exprimant que la droite BF est perpendiculaire sur AC :

$$\cos\frac{\varphi}{2}\left(\frac{1}{a^2}\cos\varphi_2\cos\frac{\varphi_1}{2}+\frac{1}{b^2}\sin\varphi_2\sin\frac{\varphi_1}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{a^2}\cos\varphi_2\sin\frac{\varphi_1}{2}-\frac{1}{b^2}\sin\varphi_2\cos\frac{\varphi_1}{2}\right)\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Divisant ces deux égalités membre à membre, il nous vient :

$$\frac{\frac{1}{a^2}\cos\varphi_1\cos\frac{\varphi_2}{2}+\frac{1}{b^2}\sin\varphi_1\sin\frac{\varphi_2}{2}}{\frac{1}{a^2}\cos\varphi_2\cos\frac{\varphi_1}{2}+\frac{1}{b^2}\sin\varphi_2\sin\frac{\varphi_1}{2}}$$
$$=\frac{\frac{1}{a^2}\cos\varphi_1\sin\frac{\varphi_2}{2}-\frac{1}{b^2}\sin\varphi_1\cos\frac{\varphi_2}{2}}{\frac{1}{a^2}\cos\varphi_2\sin\frac{\varphi_1}{2}-\frac{1}{b^2}\sin\varphi_2\cos\frac{\varphi_1}{2}}$$

ou en simplifiant et en divisant par $\sin(\varphi_1-\varphi_2)$:

$$[b^4\cos\varphi_1\cos\varphi_2+a^4\sin\varphi_1\sin\varphi_2+a^2b^2$$
$$(1+\cos(\varphi_1-\varphi_2))]=0.$$

La solution $\varphi_1=\varphi_2$ correspond au cas où la droite BC est normale à l'ellipse. On a alors pour le lieu du point A le lieu du pôle des normales, ce qui était du reste à prévoir. Ecartons ce cas particulier. Il nous reste

$$b^4\cos\varphi_1\cos\varphi_2+a^4\sin\varphi_1\sin\varphi_2+a^2b^2$$
$$(1+\cos(\varphi_1-\varphi_2))=0. \qquad (3)$$

Nous aurons le lieu du point A en éliminant φ_1 et φ_2 entre les équations (1), (2) et (3).

Pour faire cette élimination, nous remarquerons que $\cos\varphi_1$ et $\cos\varphi_2$ sont racines de l'équation

$$\left(\frac{x}{a}\cos\varphi-1\right)^2=\frac{y^2}{b^2}(1-\cos^2\varphi),$$

obtenue en remplaçant $\sin\varphi_1$ par sa valeur en fonction de $\cos\varphi_1$ dans l'équation (1).

On a donc

$$\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 = \frac{1 - \frac{y^2}{b^2}}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}.$$

On aurait de même

$$\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \frac{1 - \frac{x^2}{a^2}}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}.$$

Remplaçons ces quantités par leurs valeurs dans l'équation (3), nous aurons le lieu demandé :

$$\frac{(a^2 + b^2)(b^2 - y^2)}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} + \frac{(a^2 + b^2)(a^2 - x^2)}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} + a^2b^2 = 0$$

ou en simplifiant

$$a^2x^2 + b^2y^2 = (a^2 + b^2)^2.$$

Le lieu cherché est donc une ellipse ayant même centre que l'ellipse donnée, et ses axes dirigés dans des directions perpendiculaires, leurs longueurs étant

$$\frac{(a^2 + b^2)}{b} \text{ et } \frac{(a^2 + b^2)}{a}.$$

Solution géométrique.

Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

Lemme. — *Si dans un triangle* ABC *on joint le milieu* E *d'un côté* BC *au point d'intersection* F *des hauteurs et si du sommet opposé on abaisse une perpendiculaire sur cette droite jusqu'à son intersection* K *avec* BC, *le point* K *est le conjugué harmonique du pied* D *de la hauteur issue de* A *par rapport aux deux points* B *et* C.

En effet posons pour abréger BD $= m$, DC $= n$ et AD $= h$. Les deux triangles rectangles BDF, DAC sont semblables comme ayant un angle aigu égal, et nous donnent

$$\frac{\text{DF}}{m} = \frac{n}{h},$$

d'où

$$DF = \frac{mn}{h}.$$

Les deux triangles rectangles DFE, KAD sont semblables pour la même raison. Donc

$$\frac{KD}{h} = \frac{FD}{ED}$$

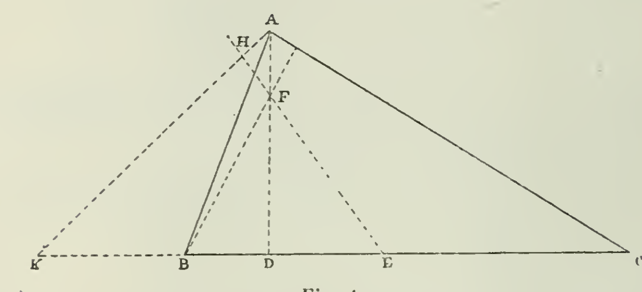


Fig. 1.

d'où

$$KD = \frac{mn}{ED}.$$

Mais

$$ED = \frac{n - m}{2},$$

donc

$$KD = \frac{2mn}{n - m},$$

$$KE = \frac{2mn}{n - m} + \frac{n - m}{2} = \frac{(n + m)^2}{2(n - m)}.$$

Par suite

$$ED \times EK = \frac{(m + n)^2}{4} = \overline{EB}^2.$$

C. Q. F. D.

Cela posé, revenons à la question. Joignons le centre O de l'ellipse au sommet A du triangle *(fig. 2)*; cette droite passe par le milieu E du côté BC. Joignons ce point E au point F d'intersection des hauteurs du triangle et du sommet A; abaissons une perpendiculaire sur cette droite. Soit K son intersection avec BC.

Les quatre points B, D, C, K formant une division harmonique et la droite BC étant la polaire du point A, la droite AK est la polaire du point D. Par conséquent la droite KF est tangente à l'ellipse, et comme cette droite passe par le point d'intersection de deux hauteurs du triangle EAK, elle est perpendiculaire sur OA. Le point R est donc sur le cercle circonscrit au triangle autopolaire ADK, puisque, par hypothèse, ce triangle est rectangle.

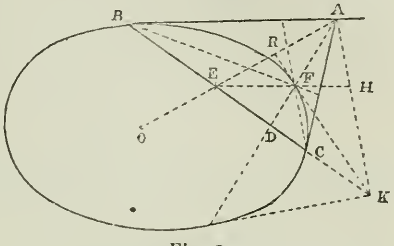


Fig. 2.

Or (théorème de M. Faure), ce cercle coupe orthogonalement le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse.

Par conséquent

$$OR \times OA = a^2 + b^2.$$

Le point A est donc situé sur la courbe polaire réciproque de l'ellipse donnée par rapport au cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à cette ellipse.

NOTE D'ANALYSE RÉCURRENTE

Par M. **R. Levavasseur**, élève au Lycée Charlemagne (*).

I. — Nous nous proposons de calculer une dérivée d'ordre quelconque de la fonction $y =$ arc sin x.

On sait que

$$y^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

J'en déduis

$$y^{(2)} = \frac{-\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{1 - x^2}}}{1 - x^2} = \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}},$$

(*) Maintenant élève à l'École Normale supérieure.

puis

$$y^{(3)} = \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}\,1 - x\dfrac{3(1-x^2)^2(-2x)}{2\sqrt{(1-x^2)^3}}}{(1-x^2)^3}$$

$$= \frac{(1-x^2)^3.1 + x.3x.(1-x^2)^2}{(1-x^2)^3\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$$= \frac{(1-x^2).1 + 3x.x}{\sqrt{(1+x^2)^5}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}}.$$

puis encore

$$y^{(4)} = \frac{\sqrt{(1-x^2)^5}.4x - (1+2x^2)\dfrac{5(1-x^2)^4(-2x)}{2\sqrt{(1-x^2)^5}}}{(1-x^2)^5}$$

$$= \frac{(1-x^2)4x + 5x(1+2x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^7}} = \frac{9x+6x^3}{\sqrt{(1-x^2)^7}}.$$

En général si N_p désigne le numérateur de la dérivée d'ordre $(p+1)$, N_{p-1} celui de la dérivée d'ordre p, on a la relation (1) $N_p = (2p-1)xN_{p-1} + (1-x^2)N'_{p-1}$.

En effet, soit

$$y^{(p)} = \frac{N_{(p-1)}}{\sqrt{(1-x^2)^{2p-1}}}$$

$$y^{(p+1)} = \frac{\sqrt{(1-x^2)^{2p-1}}\,N'_{p-1} - N_{p-1}\dfrac{(2p-1)(1-x^2)^{2p-2}(-2x)}{2\sqrt{(1-x^2)^{2p-1}}}}{(1-x^2)^{2p-1}}$$

$$= \frac{(1-x^2)^{2p-1}N'_{p-1} + (2p-1)x(1-x^2)^{2p-2}N_{p-1}}{(1-x^2)^{2p-1}\sqrt{(1-x^2)^{2p-1}}}$$

ou bien

$$y^{(p+1)} = \frac{(2p-1)xN_{p-1} + (1-x^2)N'_{p-1}}{\sqrt{(1-x^2)^{2p+1}}}.$$

ce qui démontre la relation (1).

On voit d'ailleurs que les dérivées d'ordre pair, $y^{(2)}, y \ldots$ $y^{(2m)}$ ont pour numérateur une fonction entière de x ne renfermant que les puissances impaires de cette variable ; et que les dérivées d'ordre impair, $y^{(1)}, y^{(3)}, y^{(5)}, \ldots\ y^{(2m+1)}$, ont pour numérateur une fonction entière de x ne renfermant

que les puissances paires de x. Ceci résulte de la relation (1). Supposons en effet que N_{p-1} ne renferme que les puissances impaires de x, pour fixer les idées : le produit xN_{p-1} ne renfermera que des puissances paires de x, N'_{p-1} n'est composée que de puissances paires de x, et comme elle est multipliée par $(1 - x^2)$, N_p ne renfermera que des puissances paires de x.

II. — Ainsi N_{2m} désignant le numérateur de la dérivée d'ordre $(2m+1)$, nous pouvons poser:

$$N_{2m} = \alpha_0^{(2m)} x^{2m} + \alpha_2^{(2m)} x^{2m-2} + \alpha_4^{(2m)} x^{2m-4}$$
$$+ \ldots + \alpha_{2k}^{(2m)} x^{2m-2k} + \ldots + \alpha_{2m-4}^{(2m)} x^4 + \alpha_{2m-2}^{(2m)} x^2 + \alpha_{2m}^{(2m)}.$$

La formule (1) nous donne la relation

$$N_{2m+1} = (4m+1)xN_{2m} + (1 - x^2)N'_{2m}.$$

Posons

$$N_{2m+1} = \alpha_0^{(2m+1)} x^{2m+1} + \alpha_2^{(2m+1)} x^{(2m-1)} + \alpha_4^{(2m+1)} x^{2m-3} + \ldots$$
$$+ \alpha_{2k+2}^{(2m+1)} x^{2m-2k-1} + \ldots + \alpha_{2m-2}^{(2m+1)} x^3 + \alpha_{2m}^{(2m+1)} x$$

et calculons les coefficients de N_{2m+1} en fonction des coefficients de N_{2m}, on a :

$$\begin{array}{rl|rl|}
N'^{2m} = & & + 2m\alpha_0^{(2m)} & \\
-x^2N'_{2m} = & -2m\alpha_0^{(2m)} & -(2m-2)\alpha_2^{(2m)} & \\
(4m+1)xN_{2m} = & (4m+1)\alpha_0^{(2m)} & +(4m+1)\alpha_2^{(2m)} & \\
\end{array}
\begin{array}{l} x^{2m+1} \quad\quad x^{2m-1} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} +(2m-2)\alpha_2^{(2m)} \\ -(2m-4)\alpha_4^{(2m)} \\ +(4m+1)\alpha_4^{(2m)} \end{array}\right| x^{2m-3} + \ldots \left.\begin{array}{l} +(2m-2k)\alpha_{2k}^{(2m)} \\ -(2m-2k-2)\alpha_{2k+2}^{(2m)} \\ +(4m+1)\alpha_{2k+2}^{(2m)} \end{array}\right| x^{2m-2k-1} + \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} +4\alpha_{2m-4}^{(2m)} \\ -2\alpha_{2m-2}^{(2m)} \\ +(4m+1)\alpha_{2-m2}^{(2m)} \end{array}\right| x^3 \quad \left.\begin{array}{l} +2\alpha_{2m-2}^{(2m)} \\ \\ +(4m+1)\alpha_{2m}^{(2m)} \end{array}\right| x$$

Donc

$$N_{2m+1} = (2m+1)\alpha_0^{(2m)} x^{2m+1} + [2m\alpha_0^{(2m)} + (2m+3)\alpha_2^{(2m)}]x^{2m-1}$$
$$+ [(2m-2)\alpha_2^{(2m)} + (2m+5)\alpha_4^{(2m)}]x^{2m-3} + \ldots$$
$$+ [(2m-2k)\alpha_{2k}^{(2m)} + (2m+2k+3)\alpha_{2k+2}^{(2m)}]x^{2m-2p-1} + \ldots$$
$$+ [4\alpha_{2m-4}^{(2m)} + (4m-1)\alpha_{2m-2}^{(2m)}]x^3 + [2\alpha_{2m-2}^{(2m)} + (4m+1)\alpha_{2m}^{(2m)}]x.$$

De là je déduis le tableau suivant :

$$
(\mathrm{A})\left\{
\begin{array}{l}
\alpha_0^{(2m+1)} = (2m+1)\alpha_0^{(2m)} \\
\alpha_2^{(2m+1)} = 2m\alpha_0^{(2m)} + (2m+3)\alpha_2^{(2m)} \\
\alpha_4^{(2m+1)} = (2m-2)\alpha_2^{(2m)} + (2m+5)\alpha_4^{(2m)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{2k+2}^{(2m+1)} = (2m-2k)\alpha_{2k}^{(2m)} + (2m+2k+3)\alpha_{2k+2}^{(2m)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{2m-2}^{(2m+1)} = 4\alpha_{2m-4}^{(2m)} + (4m-1)\alpha_{2m-2}^{(2m)} \\
\alpha_{2m}^{(2m+1)} = 2\alpha_{2m-2} + (4m+1)\alpha_{2m}^{(2m)}.
\end{array}\right.
$$

III. — Calculons de la même manière les coefficients de N^{2m} en fonction des coefficients de N_{2m-1}. D'après la formule (1) $N_{2m} = (4m-1)xN_{2m-1} + (1-x^2)N'_{2m-1}$. Nous pouvons poser

$$
N_{2m-1} = \alpha_0^{(2m-1)}x^{m-1} + \alpha_2^{(2m-1)}x^{2m-3} + \ldots + \alpha_{2k}^{(2m-1)}x^{2m-2k-1} + \ldots + \alpha_{2m-4}^{(2m-1)}x^3 + \alpha_{2m-2}^{(2m-1)}x.
$$

On a

$$
\begin{array}{l|l|l}
N'_{2m-1} = & & +(2m-1)\alpha_0^{(2m-1)} \\
-x^2N'_{2m-1} = -(2m-1)\alpha_0^{(2m-1)} & x^{2m} & -(2m-3)\alpha^{(2m-1)} \\
(4m-1)xN_{2m-1} = +(4m-1)\alpha_0^{(2m-1)} & & +(4m-1)\alpha_2^{(2m-1)}
\end{array}\; x^{2m-2}
$$

$$
\begin{array}{l|l|l}
+(2m-3)\alpha_2^{(2m-1)} & & +(2m-2k-1)\alpha_{2k}^{(2m-1)} \\
-(2m-5)\alpha_4^{(2m-1)} & x^{2m-4} + \ldots + & -(2m-2k-3)\alpha_{2k}^{(2m-1)} \\
+(4m-1)\alpha_4^{(2m-1)} & & +(4m-1)\alpha_{2k+2}^{(dm-1)}
\end{array}\; x^{2m-2k-2}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
+ \ldots + 3\alpha_{2m-4}^{(2m-1)} & \\
-\alpha_{2m-2}^{(2m-1)} & x^2 + \alpha_{2m-2}^{(2m-1)} \\
+(4m-1)\alpha_{2m-2}^{(2m-1)} &
\end{array}
$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
N_{2m} = {} & 2m\alpha_0^{(2m-1)}x^{2m} + [(2m-1)\alpha_0^{2m-1)} + (2m+2)\alpha_2^{(2m-1)}]x^{2m-2} \\
& + [(2m-3)\alpha_2^{(2m-1)} + (2m+4)\alpha_4^{(2m-1)}]x^{2m4} + \ldots \\
& + [(2m-2k-1)\alpha_{2k}^{(2m-1)} + (2m+2k+2)\,\alpha_{2k+2}^{(2m-1)}]x^{2m-2k-2} \\
& + \ldots + [3\alpha_{2m-4}^{(2m-1)} + (4m-2)\alpha_{2m-2}^{(2m-1)}]x^2 + \alpha_{2m-2}^{(2m-1)}.
\end{aligned}
$$

Ceci nous donne le tableau suivant:

$$
\left.
\begin{array}{l}
\alpha_0^{(2m)} = 2m\alpha_0^{(2m-1)} \\
\alpha_0^{(2m)} = (2m-1)\alpha_0^{(2m-1)} + (2m+2)\alpha_2^{2m-1} \\
\alpha_0^{(2n)} = (2m-3)\alpha_2^{(2m-1)} + (2m+4)\alpha_4^{(2m-1)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{2k}^{(2m)} = (2m-2k+1)\alpha_{2k.2}^{(2m-1)} + (2m+2k)\alpha_{2k}^{(2m-1)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{2m-2}^{(2m} = 3\alpha_{2m-4}^{2m-1} + (4m-2)\alpha_{2m-2}^{(2m-1)} \\
\alpha_{2m}^{(2m)} = \alpha_{2m-2}^{(2m-1)}
\end{array}
\right\}\quad(\mathrm{B})
$$

Toutes les formules du tableau (B) se déduisent des formules du tableau (A) en changeant $2m$ en $(2m - 1)$ (*). La dernière formule du tableau (B) peut se déduire de la dernière formule du tableau (A) si l'on suppose que $\alpha_{2m}^{2m-1} = 0$, ce qui est assez naturel.

IV. — Cela posé, le coefficient de la plus haute puissance de x se calcule immédiatement. En effet, on a

$$\left.\begin{array}{ll} \text{puis} & \alpha_0^{(2m+1)} = (2m+1)\alpha_0^{(2m)} \\ & \alpha_0^{(2m)} = 2m\alpha_0^{(2m-1)} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{enfin} & \alpha_0^{(2)} = 2\alpha_0^{(1)} \\ & \alpha_0^{1} = 1. \end{array}\right\} \qquad (\beta_0)$$

Si nous multiplions toutes ces équations membre à membre il vient $\alpha_0^{(2m+1)} = (2m+1)!$ *(A suivre.)*

QUESTION 60

Première solution par M. Giat, élève au Lycée de Moulins.

On donne une famille de coniques représentée par l'équation.

$$x^2(1+\lambda) - 2\lambda xy + \lambda^2 y^2 - 2x = 0.$$

Par chaque point A *réel du plan passent deux coniques de la famille. Dans quelles régions doit être le point* A *pour que ces coniques aient une équation : 1° à coefficients imaginaires. 2° à coefficients réels. Subdiviser ces dernières régions en plusieurs autres, suivant que par le point il passe deux ellipses ou deux hyperboles, ou une ellipse et une hyperbole. Lieu des centres des coniques. Séparer sur ce lieu les centres d'ellipses des centres d'hyperboles.*

α, β désignant les coordonnées d'un point A, par ce point passent deux coniques dont les équations sont l'équation (1) dans laquelle λ est défini par la relation

$$\alpha^2(1+\lambda) - 2\lambda\alpha\beta + \lambda^2\beta^2 - 2\alpha = 0$$

ou

$$\lambda^2\beta^2 - \lambda\alpha(2\beta - \alpha) + \alpha(\alpha - 2) = 0. \qquad (2)$$

(*) Sans toucher évidemment aux indices inférieurs des coefficients.

Les coefficients de l'équation (1) seront réels quand on aura

$$\alpha^2(2\beta - \alpha)^2 - 4\alpha\beta^2(\alpha - 2) \geq 0$$

ou

$$\alpha(8\beta^2 - 4\alpha^2\beta + \alpha^3) \geq 0.$$

Nous sommes amené à construire la courbe

$$8\beta^2 - 4\alpha\beta^2 + \alpha^3 = 0.$$

Cette courbe admet l'origine pour point double. Ce point est un point de rebroussement dont la tangente est $\beta = 0$.

Les directions asymptotiques sont $\alpha^2 = 0$, $4\beta - \alpha = 0$.

La première asymptote est rejetée à l'infini. Quant à la deuxième, on calcule facilement l'ordonnée à l'origine au moyen de la relation $d = \frac{-\varphi_1(c)}{\varphi'(c)}$. On trouve ainsi $d = \frac{1}{8}$.

Cela posé, la courbe est facile à construire. En résolvant par rapport à β, on a

$$\beta = \frac{\alpha^2 \pm \alpha\sqrt{\alpha(\alpha - 2)}}{4}. \qquad (3)$$

β sera réel pour toutes les valeurs de α non comprises entre 0 et 2. Pour $\alpha = 2$, $\beta = 1$, la tangente en ce point est verticale, ce qu'on reconnaît en transportant l'origine en ce point.

Discutant l'équation (3), on en déduit sans difficulté la courbe indiquée sur la figure (*).

Cette courbe ainsi que la droite $\alpha = 0$ séparent le plan en régions.

Dans les régions extérieures à la courbe que l'on vient de construire, il est facile de montrer que

$$8\beta^2 - 4\alpha^2\beta + \alpha^3 \text{ est } > 0.$$

En effet, supposons α positif et très grand, γ négatif et très grand, l'inégalité précédente est satisfaite.

Alors dans les régions couvertes de hachures verticales on aura des coniques à coefficients imaginaires. Dans les autres régions au contraire on aura des coniques à coefficients réels.

(*) Voir la figure dans la seconde solution ; il est facile de distinguer les différents cas. (*Note de la rédaction.*)

Considérons ces dernières régions.

La condition pour que la conique (1) représente une ellipse est
$$\lambda > 0.$$

Reportons-nous à l'équation (2). Pour que cette équation en λ ait ses deux racines positives, il faut que l'on ait
$$\alpha(\alpha - 2) > 0,$$
$$\alpha(2\beta - \alpha) > 0.$$

Construisons les droites $\alpha = 2$, $2\beta = \alpha$; soient BC et OA. BC est tangente à la courbe de séparation en A et OA rencontre cette courbe aux points O et A.

Dans la région BAE $\alpha(\alpha - 2)$ est > 0, ainsi que $\alpha(2\beta - \alpha)$. Donc dans cette région il passera deux ellipses.

Dans la région DAC au contraire $\alpha(\alpha - 2)$ est < 0, $\alpha(2\beta - \alpha) < 0$. On aura donc deux hyperboles.

Dans la région comprise entre l'axe de y et BC, on aura une ellipse et une hyperbole : car $\alpha(\alpha - 2)$ est < 0.

Enfin dans la région HOF, $\alpha(\alpha - 2)$ est positif, mais $\alpha(2\beta - \alpha)$ est négatif. On aura donc deux hyperboles dans cette région.

2° Pour avoir le lieu des centres des coniques (1) nous allons annuler $f'x$ et $f'y$, puis éliminer λ entre ces deux équations :
$$f'x = x(1 + \lambda) - \lambda y - 1 = 0.$$
$$f'y = \lambda x - \lambda^2 y = 0,$$

Éliminant λ entre ces deux équations on a le lieu dont l'équation se décompose en deux:
$$x = 1$$
et
$$x = y^2.$$

La première équation représente une droite parallèle à $y = 0$ à une distance de celle-ci égale à 1.

La deuxième est une parabole rapportée à son sommet; son axe est dirigé suivant OY. Son intersection avec la droite $x = 2$ est le point
$$x = 2y = 4.$$

Distinguons sur cette parabole les parties du lieu qui proviennent d'ellipses ou d'hyperboles.

Nous remarquons que pour que l'équation (1) représente

une parabole, il faut que $\lambda = 0$. Or pour cette valeur cette équation se réduit à

$$x(x - 2) = 0,$$

qui représente l'axe des y et la droite BC.

Donc l'équation (1) ne représentera jamais une parabole. Dans le cas particulier que l'on examine, nous remarquons que les points situés sur $x = 1$ sont des centres de $x(x - 2) = 0$. La droite $x = 1$ que l'on trouvait comme lieu est ainsi interprétée.

L'intersection de cette droite avec $x^3 = y$ est le point $x = 1$, $y = 1$. Ce point sur le lieu sert de séparation, pour les centres d'ellipses et les centres d'hyperboles. Sur l'arc de parabole IM on aura des centres d'ellipses et sur l'arc de parabole IN on aura des centres d'hyperboles.

Deuxième solution par M. Callé, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Grenoble.

On donne une famille de coniques représentées par l'équation

$$x^2(1 + l) - 2lxy + l^2y^2 - 2x = 0.$$

Par chaque point A réel du plan passent deux coniques de la famille; dans quelle région doit être le point pour que ces coniques aient une équation : 1° à coefficients réels; 2° à coefficients imaginaires. — Subdiviser ces dernières régions en plusieurs autres, suivant que par le point A il passe deux ellipses, ou deux hyperboles, ou une ellipse ou une hyperbole.

Lieu des centres des coniques. Séparer sur ce lieu les centres d'ellipses des centres d'hyperboles.

I. — Si nous exprimons que la conique passe par le point $A(x \,.\, y)$, les valeurs de l qui déterminent cette conique seront données par l'équation du deuxième degré

$$l^2y^2 - lx(2y - x) + x(x - 2) = 0.$$

Donc, par chaque point, il passe deux coniques.

Les valeurs de l données par cette équation seront réelles ou imaginaires, suivant que la quantité

$$x^2(2y - x)^2 - 4xy^2(x - 2)$$

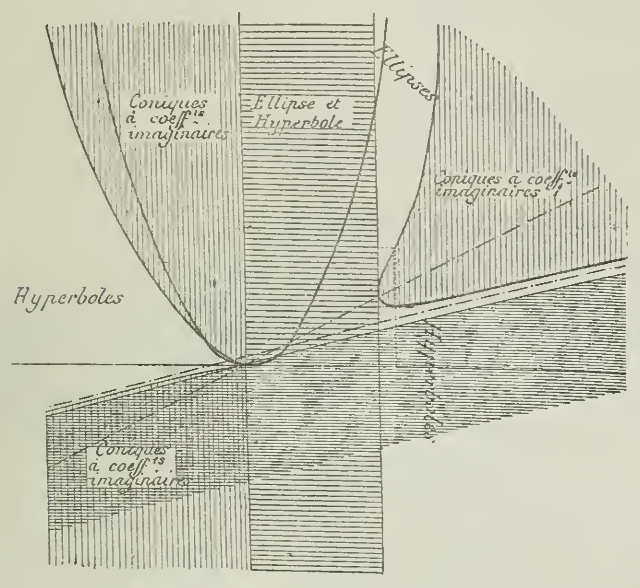
sera positive ou négative. Les points demandés seront donc

séparés par la courbe

$$x^2(2y - x)^2 - 4xy^2(x - 2) = 0, \quad (1)$$

ou

$$x[x^2(x - 4y) + 8y^2] = 0. \quad (2)$$



L'équation (2) indique que la courbe est séparée en régions par la droite $x - 4y = 0$, et l'équation (1) indique que la courbe est séparée en régions par la droite $x = 2$, et qu'elle est tangente à cette droite au point où celle-ci est rencontrée par la droite $2y - x = 0$.

D'ailleurs, la courbe est tangente à l'origine à l'axe des x, et présente un point de rebroussement.

Asymptotes. — La courbe a une asymptote parallèle à l'axe des y, transportée à l'infini.

Elle admet aussi une asymptote parallèle à la droite $x - 4y = 0$ et dont l'ordonnée à l'origine est $\frac{1}{8}$.

Points où la tangente est horizontale. — Ils sont donnés par les équations

$$f(x, y) = x^2(x - 4y) + 8y^2 = 0,$$

$$f'(x) = 2x^2 - 8xy = 0,$$

ce qui donne les points

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{9}{4} \\ y = \frac{27}{32}. \end{cases}$$

Point d'inflexion. — Le hessien se réduit à

$$3x - 4y = 0,$$

ce qui donne un point d'inflexion $\begin{cases} x = \frac{9}{4} \\ y = \frac{27}{16} \end{cases}$

On voit alors que les points correspondant aux coefficients imaginaires sont ceux situés dans les parties recouvertes de hachures verticales; les autres points du plan correspondent à des coniques réelles, et ceux qui sont situés sur la courbe correspondent au cas de deux coniques confondues.

II. — Le déterminant de la conique étant égal à $-l^3$, on obtient le genre de la conique au moyen des valeurs de l correspondant au point. — Le produit des racines de l'équation en l étant $\frac{x(x-2)}{y^2}$, pour tous les points situés entre les droites $x = 0$, $x = 2$, nous aurons une ellipse et une hyperbole. Pour les points extérieurs nous séparerons les ellipses des hyperboles au moyen de la somme des racines de l'équation en l : $\frac{x(2y-x)}{2}$. Nous aurons des ellipses lorsque cette somme sera positive, des hyperboles lorsque cette somme sera négative.

Pour tous les points de l'axe des y, nous avons des paraboles. Les valeurs de l sont nulles, et l'équation se réduit à

$$x(x - 2) = 0.$$

Sur la droite $x = 2$, nous aurons une ellipse et une parabole pour les points situés au-dessus de la droite $2y = x$; nous aurons deux paraboles pour les points situés sur cette droite; une parabole et une hyperbole pour les points situés au-dessus.

Lieu des centres. — Il s'obtient par l'élimination de l entre les deux équations

$$f'y = l^2y - lx = 0,$$
$$f'x = lx - ly + x - 1 = 0.$$

La deuxième donne

$$l = 0, \; l = \frac{x}{y},$$

La première donne

$$x = 1, \; x^2 = y.$$

Le premier lieu correspond au cas où la conique se réduit aux droites $x(x - 2) = 0$.

Dans la parabole qui représente le deuxième lieu, la valeur de l étant égale à $\frac{x}{y}$, les points situés à droite de l'axe des y appartiendront à des ellipses, et ceux à gauche appartiendront à des hyperboles.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Poncet, Roussel, à Lyon; Lapinte, à Bar-le-Duc.

QUESTIONS PROPOSÉES

122. — On considère une elilpse Γ rapportée à ses axes. Désignons par P et Q les extrémités du grand axe, et imaginons, sur Γ, un point mobile M. Les droites PM et QM rencontrent le cercle Δ, décrit sur PQ comme diamètre, en des points A et B;

1° Trouver le lieu décrit par le pôle C de la droite AB, par rapport à Δ. Ce lieu est l'ellipse qui correspond à l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a^2 + b^2}{2b}\right)^2} = 1.$$

2° Démontrer qu'en désignant par φ l'angle d'anomalie du point M, l'équation du cercle AMB est

$$x^2 + y^2 - 2ax \cos \varphi - \frac{a^2 + b^2}{b} y \sin \varphi + a^2 = 0.$$

3° Lieu des points de contact des tangentes menées de l'origine aux cercles AMB. Ce lieu est le cercle Δ lui-même.

4° Enveloppe des cercles AMB. On trouve deux cercles,

correspondant aux équations

$$x^2 + y^2 + \frac{c^2y}{b} - a^2 = 0, \quad x^2 + y^2 - \frac{c^2y}{b} - a^2 = 0.$$

5° Lieu des centres de similitude du cercle principal Δ et du cercle mobile AMB.

N. B. — *Les renseignements donnés dans cette question ont pour but d'en faciliter la solution. On doit pourtant observer qu'ils ne sont pas absolus, et qu'une erreur de calcul, de transcription ou d'impression est toujours possible.* (G. L.)

ERRATUM

Page 80, ligne 15, au lieu de *est à la même place*, lire : *est la même.*

AVIS

Nous rappelons à nos lecteurs que les solutions qu'ils nous envoient doivent porter en tête :

Le numéro de la question ;

Le nom de l'auteur de la solution, ainsi que l'établissement auquel il appartient ;

L'énoncé complet de la question proposée.

De plus, s'il y a des figures, celles-ci doivent être faites avec beaucoup de soin et sur des feuilles à part.

Enfin, nous prions nos lecteurs de mettre les diverses questions sur des feuilles séparées, pour faciliter le classement des solutions, et éviter des oublis ou des erreurs.

Ces solutions sans aucun avis d'envoi peuvent être adressées sous bande ou sous enveloppe ouverte.

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 12072-4.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

APPLICATIONS NOUVELLES DES TRANSVERSALES RÉCIPROQUES

Par **M. G. de Longchamps.**

1. — Imaginons une courbe U formant la figure de référence et proposons-nous de transformer une autre courbe V d'après la loi suivante :

Ayant mené à V, *en un point* M, *une tangente* Δ, *cette droite rencontre* U *en un point* A *et l'on prend le symétrique de* M, *par rapport à* A ; *le lieu de ce point* M′ *est une certaine courbe* V′ *qui est transformée de* V, *d'après la loi que nous venons de formuler.*

Nous voulons montrer comment on peut construire la tangente au point M′, à V′; nous aurons à considérer, dans

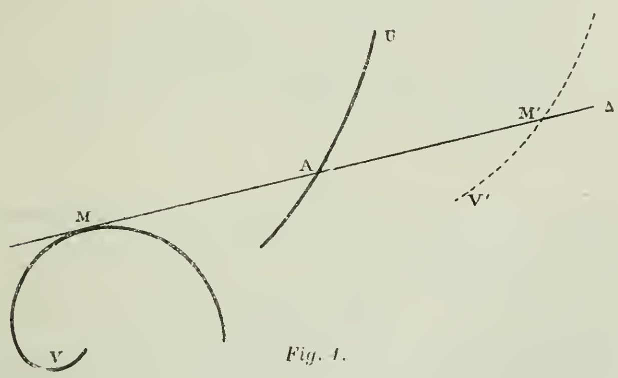


Fig. 1.

les explications qui suivent, ces droites que nous avons nommées *transversales réciproques;* et nous établirons d'abord, à propos d'elles, un théorème très simple.

2. Théorème. — *Si l'on considère un triangle* ABC, *et une transversale* Δ: *la transversale réciproque* Δ' *est un diamètre de la parabole* U *qui est inscrite au quadrilatère formé par ce triangle* ABC *et par* Δ.

Considérons, en effet, la droite Δ qui coupe les côtés du triangle ABC, aux points A', B', C'; prenons les points A'', B'', C'', symétriques des points A', B', C', par rapport aux milieux des côtés de ABC, et soit Δ' la droite qui passe par A'', B'' et C''. Le quadrilatère complet formé par le triangle ABC et par la droite Δ a pour diagonales les droites AA', BB', CC', dont les milieux sont représentés en α, β et γ. Nous allons d'abord remarquer que les points α, β, γ, forment un système homothétique avec A'', B'' et C''; l'homothétie est inverse, le rapport est égal à $1/2$ et le centre de l'homothétie est le centre de gravité du triangle ABC.

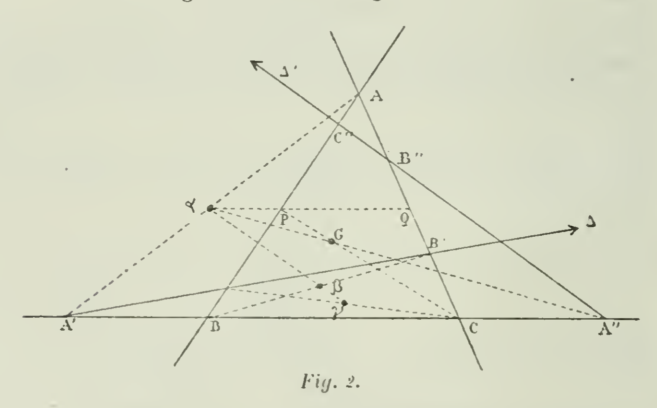


Fig. 2.

En effet, menons par α une parallèle à BC, elle passe par le point P, milieu de AB, et par le point Q, milieu de AC. Nous avons d'ailleurs

$$A'B = 2\alpha P,$$

et, par suite,

$$A''C = 2\alpha P.$$

Il résulte de cette remarque que $A''\alpha$ passe par le point G qui partage CP dans le rapport de 1 à 2, c'est-à-dire par le centre de gravité de ABC.

Cette observation s'applique aux droites $B''\beta$, $C''\gamma$, qui, elles aussi, passent par le centre de gravité de ABC et s'y partagent mutuellement dans le rapport de 1 à 2.

D'autre part, on sait, par le théorème de Newton sur les coniques inscrites dans un quadrilatère, que la droite $(\alpha\beta\gamma)$ est le lieu des centres de ces coniques; ainsi $(\alpha\beta\gamma)$ est paral-

lèle à l'axe de la parabole U; la droite A″B″C″, transversale réciproque de A′B′C′ est donc parallèle aux diamètres de la parabole inscrite au triangle ABC et tangente à A′B′C′.

3. — Cette remarque étant faite, considérons deux tangentes voisines AA′, BB′, sur la courbe V, et prenons

$$A'A'' = AA', \quad B'B'' = BB',$$

les points A″, B″, appartiennent à la courbe V′, transformée de V d'après la loi que nous avons adoptée, et nous nous proposons de déterminer la position limite de A″B″ quand le point B vient coïncider avec A.

A cet effet, prenons

$$A''P = MA \text{ et } B''Q = MB,$$

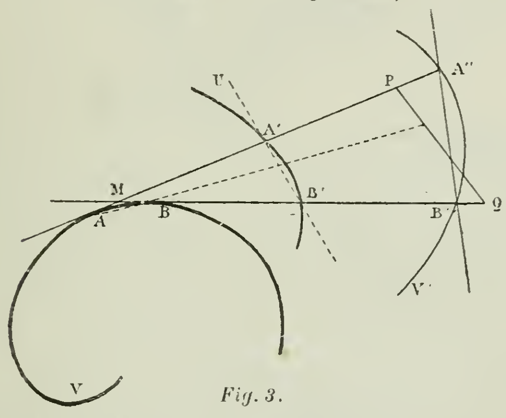


Fig. 3.

les droites AB et A″B″ sont deux transversales réciproques par rapport au triangle MPQ. D'après le théorème que nous avons établi tout à l'heure, la droite A″B″ est donc parallèle au diamètre de la parabole inscrite au triangle MPQ, et tangente à la droite AB.

Nous allons chercher ce que devient cette parabole quand les points A et B se confondent.

Les droites MA, MB et AB sont trois tangentes à la parabole qui nous occupe, et le cercle circonscrit au triangle AMB passe par le foyer de cette courbe. A la limite, le cercle circonscrit à AMB devient le cercle, Δ décrit sur la droite qui joint le centre de courbure, au point A, comme diamètre.

D'autre part, le cercle circonscrit à MPQ, cercle qui passe, lui aussi, par le foyer de la parabole, a pour position limite la circonférence Δ' qui passe par A par A″ et qui est tangente, au point A″, à la droite A″T″ menée par A″ parallèlement à A′T′; cette dernière droite étant la tangente à la courbe U, au point A′. Le point F, ainsi déterminé par l'intersection des cercles Δ et Δ', est le foyer de la parabole.

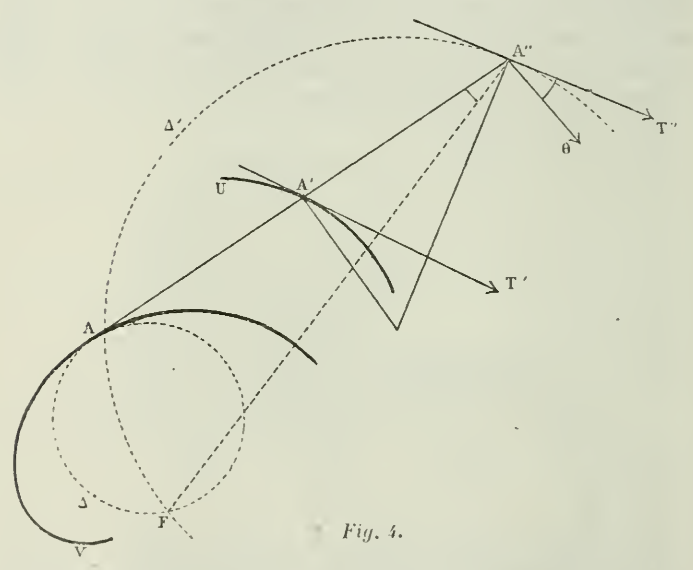


Fig. 4.

Si l'on considère maintenant les demi-droites A″A et A″T″, qui forment un angle inférieur à π et qui comprennent le point F; la droite A″θ, *droite bien déterminée*, qui est symétrique de A″F par rapport à la bissectrice de l'angle AA″T″, est la tangente cherchée.

Mais on peut encore étendre les considérations qui précèdent à des transformations plus générales que celle qui vient de nous occuper, comme nous allons le montrer.

4. — Considérons, comme tout à l'heure, une courbe V que nous nous proposons de transformer; mais au lieu de constituer la figure de référence avec une courbe U, supposons que cette figure soit formée par deux courbes U_1, U_2.

Si nous menons à V une tangente quelconque et si nous prenons

$$R_2M' = MR_1$$

le lieu décrit par le point M' est une certaine courbe V' transformée de V. par la loi que nous venons d'imaginer.

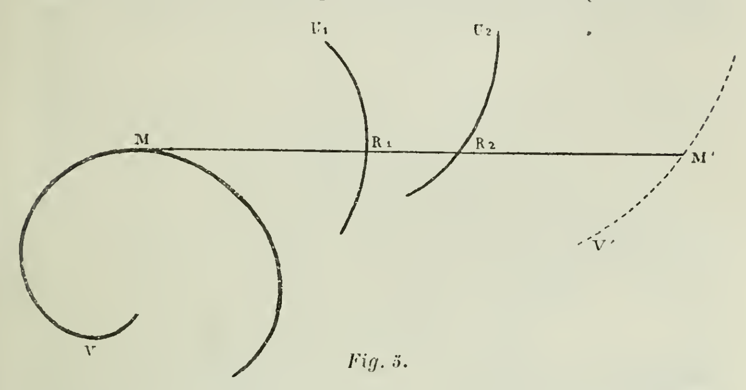


Fig. 5.

Lorsque les courbes U_1 et U_2 coïncident, on retombe dans la transformation définie plus haut. Nous nous proposons de construire la tangente, au point M', à la transformée V'.

Nous supposons, bien entendu, que l'on sache tracer les tangentes aux courbes V, U_1, U_2, et aussi le cercle osculateur en un point donné sur la courbe V.

5. — Considérons deux tangentes voisines AA', BB', à V et prenons

$$A_2A' = AA_1, \quad B_2B' = BB_1;$$

nous voulons trouver la position limite de A'B' quand B se confond avec A.

A cet effet, prenons

$$A'\alpha = MA, \quad B'\beta = MB \text{ (*)}.$$

Les trois segments

$$A_1A_2, \quad M\alpha, \quad AA'$$

(*) Il faut bien observer que, dans les égalités que nous considérons ici, comme dans toutes les relations de la géométrie des transversales, les segments ont un signe bien déterminé ; et quand nous écrivons

$$B'\beta = MB,$$

nous entendons non seulement que ces deux longueurs sont égales, mais que la direction de B' à β est la même que celle de M à B.

ont le même point milieu; et cette remarque s'applique aux trois segments

$$B_1B_2,\ M\beta,\ BB'.$$

Les droites A_1B_1 et A_2B_2 sont donc deux transversales réciproques du triangle $M\alpha\beta$ et elles rencontrent $\alpha\beta$ en deux points qui sont symétriques par rapport au milieu de $\alpha\beta$.

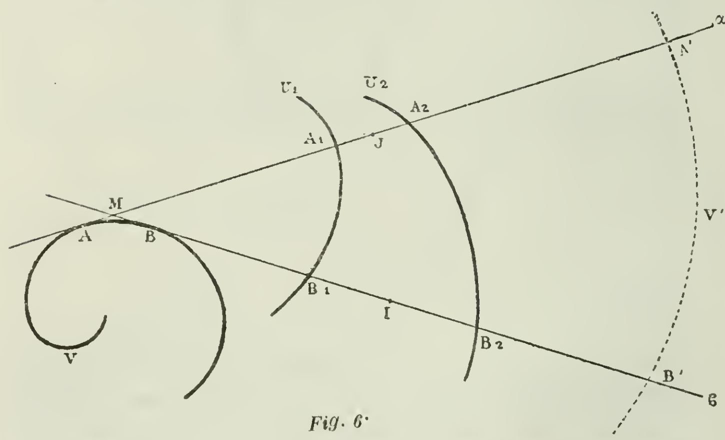


Fig. 6

Lorsqu'on passe à la limite, lorsque le point B vient coïncider avec A, la droite $\alpha\beta$ a une position limite bien déterminée à Δ, qui s'obtiendra en menant par A′ une droite partagée en deux parties égales par ce point et par les tangentes aux courbes U_1, U_2, aux points A_1, A_2.

6. — Revenons maintenant à la figure 6, et remarquons que AB et A′B′ sont aussi deux transversales réciproques du triangle $M\alpha\beta$; ainsi, A′B′ est parallèle aux diamètres de la parabole qui est inscrite au triangle $M\alpha\beta$ et qui est tangente à AB.

A la limite, le foyer de cette parabole appartient au cercle osculateur de V, au point A, et comme la parabole est tangente à $\alpha\beta$, par suite, à la droite Δ que nous avons déterminée tout à l'heure, le foyer s'obtient comme nous l'avons expliqué plus haut *(fig. 4)*. On en déduit la direction des diamètres et, par conséquent, la tangente, limite des positions de A′B′. *(A suivre.)*

NOTE D'ANALYSE RÉCURRENTE

Par M. **R. Levavasseur**, élève au Lycée Charlemagne.

(*Suite*, voir p. 109)

V. — De la formule $\alpha_0^{(2m+1)} = (2m+1)!$ on déduit

$$\alpha_0^{(2m)} = (2m)!$$

Alors la seconde des formules du tableau (A) nous donne

$$\left.\begin{aligned}
\alpha^{(2m+1)} &= (2m+3)\alpha_2^{(2m)} + 2m\,.\,(2m)!\\
\text{on a aussi}\quad \alpha_2^{(2m)} &= (2m+2)\alpha_2^{(2m-1)} + (2m-1)(2m-1)!\\
\alpha_2^{(2m-1)} &= (2m+1)\alpha_2^{(2m-2)} + (2m-2)(2m-2)!\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_2^{(2m-k)} &= (2m-k+2)\alpha_2^{2m-k-1} + (2m-k-1)(2mk-1)!\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_2^{(} &= 6\alpha_2^{(3)} + 3\,.\,3!\\
\alpha_2^{(3)} &= 5\alpha_2^{(2)} + 2\,.\,2!
\end{aligned}\right\}(\beta_2)$$

Enfin nous avons calculé $y^{(3)}$, et vu que dans cette dérivée $\alpha_2^{(2} = 1$. Je multiplie la première formule par 1, la seconde par $(2m+3)$, la troisième par $(2m+2)(2m+3)$, etc., la $(k+1)^e$ par $(2m+3)(2m+2)\ldots(2m-k+4)(2m-k+3)$, etc., la $(2m-3)^e$ par $7\,.\,8\ldots(2m+2)(2m+3)$, la dernière par $6\,.\,7\ldots(2m+2)(2m+3)$, puis j'ajoute toutes ces équations membre à membre, ce qui me donne

$$\begin{aligned}
\alpha_2^{(2m+1)} = {} & 2m\,(2m)! + (2m-1)(2m-1)!\,(2m+3)\\
& + (2m-2)(2m-2)!\,(2m+2)(2m+3) + \ldots\ldots\ldots\\
& + (2m-k-1)(2m-k-1)!\,(2m-k+3)\\
& \times(2m-k+2)\ldots(2m+2)(2m+3) + \ldots\\
& + 3\,.\,3!\,7\,.\,8\ldots(2m+2)(2m+3)\\
& + 2\,.\,2!\,6\,.\,7\ldots(2m+2)(2m+3)\\
& + 1\,.\,1!\,5\,.\,6\ldots(2m+2)(2m+3).
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
\alpha_2^{(2m+1)} = (2m+3)!\Bigg[& \frac{2m}{(2m+1)(2m+2)(2m+3)}\\
& + \frac{2m-1}{2m(2m+1)(2m+2)} + \frac{2m-2}{(2m-1)2m(2m+1)} + \ldots\\
& + \frac{2m-k-1}{(2m-k)(2m-k+1)(2m-k+2)} + \ldots + \frac{3}{4\,.\,5\,.\,6}\\
& + \frac{2}{3\,.\,4\,.\,5} + \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4}\Bigg].
\end{aligned}$$

La question revient donc à sommer la série de fractions comprise entre les parenthèses.

VI. — On a d'abord

$$S_1 = \frac{1}{2\ .\ 3\ .\ 4} = \frac{1\ .\ 2}{2^2\ .\ 3\ .\ 4},$$

puis

$$S_2 = \frac{1\ .\ 2}{2^3\ .\ 3\ .\ 4} + \frac{2}{3\ .\ 4\ .\ 5} = \frac{2}{3\ .\ 4}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{2\ .\ 3^2}{2^2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5}$$

$$= \frac{2\ .\ 3}{2^2\ .\ 4\ .\ 5}.$$

En général, soit

$$S_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2^2(n+1)(n+2)}$$

$$S_n = \frac{(n-1)n}{2^2(n+1)(n+2)} + \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{n}{(n+1)(n+2)}\left[\frac{n-1}{2^2} + \frac{1}{n+3}\right]$$

Mais $(n-1)(n+3) + 2^2 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

Donc $$S_n = \frac{n(n+1)}{2^2(n+2)(n+3)}.$$

La quantité entre parenthèse est donc

$$S_{2m} = \frac{2m\ .\ (2m+1)}{2^2(2m\ 2) + (2m+3)}.$$

Il en résulte que la formule de $\alpha_2^{(2m+1)}$ devient

$$\alpha_2^{(2m+1)} = (2m+3)!\frac{2m(2m+1)}{2^2(2m+2)(2m+3)} = (2m-1)!\left[\frac{2m.(2m+)1}{2}\right]^2$$

VII. — Connaissant la formule qui donne $\alpha_2^{(2m+1)}$, nous pouvons maintenant chercher celle qui donne $\alpha_1^{(2m+1)}$. En effet $\alpha_2^{(2m)} = (2m-2)!\left[\frac{(2m-1)2m}{2}\right]^2$. La troisième formule du tableau (A) devient

$$\alpha_1^{(2m+1)} = (2m+5)\alpha_1^{(2m)} + (2m-2)(2m-2)!\left[\frac{(2m-1)2m}{2}\right]^2$$

puis j'en déduis

$$\alpha_1^{(2m)} = (2m+4)\alpha_1^{(2m-1)} + (2m-3)(2m-3)!\left[\frac{(2m-2)(2m-1)}{2}\right]^2$$

$$\alpha_1^{(2m-1)} = (2m+3)\alpha_1^{(2m-2)} + (2m-4)(2m-4)!\left[\frac{(2m-3)(2m-2)}{2}\right]^2$$

. . . .

$$x_4^{(2m-k)} = (2m-k+4)\, x_4^{(2m-k-1)} + (2m-k-3)(2m-k-3)!\left[\frac{(2m-k-2)(2m-k-1)}{2}\right]^2$$

. . . .

$$x_4^{(6)} = 10\, x_4^{(5)} + 3 \,.\, 3!\left[\frac{4 \,.\, 5}{2}\right]^2$$

$$x_4^{(5)} = 9\, x_4^{(4)} + 2 \,.\, 2!\left[\frac{3 \,.\, 4}{2}\right]^2$$

$$x_4^{(4)} = x_2^{(3)} = 1 \left[\frac{2 \,.\, 3}{2}\right]$$

Je multiplie la première de ces équations par 1, la deuxième par $(2m+5)$, la troisième par $(2m+4)(2m+5)$, . . . la $(k+1)^e$ par

$(2m-k+5)(2m-k+6) \ldots (2m+4)(2m+5)$, . . .

la $(2m-4)^e$ par

$$11 \,.\, 12 \ldots (2m+4)(2m+5),$$

la $(2m-3)^e$ par

$$10 \,.\, 11 \ldots (2m+4)(2m+5),$$

la dernière par

$$9 \,.\, 10 \ldots (2m+4)(2m+5),$$

puis j'ajoute, ce qui me donne

$$x_4^{(2m+1)} = (2m-2)(2m-2)!\left[\frac{2m-1)\,2m}{2}\right]^2$$

$$+ (2m-3)(2m-3)!\left[\frac{(2m-2)(2m-1)}{2}\right]^2(2m+5)$$

$$+ (2m-4)(2m-4)!\left[\frac{(2m-3)(2m-2)}{2}\right]^2(2m+4)(2m+5)$$

$$+ \ldots + (2m-k-3)(2m-k-3)!\left[\frac{(2m-k-2)(2m-k-1}{2}\right]^2$$

$(2m-k+5) \ldots (2m+4)(2m+5) + \ldots + 3 \,.\, 3!$ $\left(\frac{4 \,.\, 5}{2}\right)^2 11 \,.\, 12 \ldots (2m+4)(2m+5) + 2 \,.\, 2!\left(\frac{3 \,.\, 4}{2}\right)^2$ $10 \,.\, 11 \ldots (2m+4)(2m+5) + 1 \,.\, 1!\left(\frac{2 \,.\, 3}{2}\right)^2 . \, 9 \,.\, 10 \ldots$ $(2m+4)(2m+5)$ ou bien $x_4^{(2m+1)} = \dfrac{(2m+5)\,!}{2}$

$$\left[\frac{(2m-2)(2m-1)2m}{(2m+1)(2m+2)(2m+3)(2m+4)(2m+5)}\right.$$

$$+\frac{(2m-3)(2m-2)(2m-1)}{2m(2m+1)(2m+2)(2m+3)(2m+4)}$$

$$+\frac{(2m-4)(2m-3)(2m-2)}{(2m-1)2m(2m+1)(2m+2)(2m+3)}$$

$$+\ldots+\frac{(2m-k-3)(2m-k-2)(2m-k-1)}{(2m-k)(2m-k+1)(2m-k+2)(2m-k+3)(2m-k+4)}$$

$$+\ldots+\frac{3.4.5}{6.7.8.9.10}+\frac{2.3.4}{5.6.7.8.9}$$

$$\left.+\frac{1.2.3}{4.5.6.7.8}\right].$$

Reste à sommer la série de fractions comprises dans les parenthèses.

VIII. — Or $S_1 = \dfrac{1.2.3}{4.5.6.7.8}$

$$= \frac{1.2.3.4}{4^2.5.6.7.8}.$$

J'en déduis $S_2 = \dfrac{1.2.3.4}{4^2.5.6.7.8}$

$$+\frac{2.3.4}{5.6.7.8.9}$$

ou $S_2 = \dfrac{2.3.4}{5.6.7.8}\left[\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{9}\right] = \dfrac{2.3.4.5^2}{4^2.5.6.7.8.9}$

$$= \frac{2.3.4.5}{4^2.6.7.8.9}$$

Soit en général $S_{n-1} = \dfrac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4^2.(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}$

$$S_n = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4^2(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}\left[\frac{n-1}{4^2}+\frac{1}{n+7}\right].$$

Mais $(n-1)(n+7)+4^2 = n^2+6n+9 = (n+3)^2$.

Donc $$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4^2(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)}$$

J'en déduis $S_{2m-2} = \dfrac{(2m-2)(2m-1)2m(2m+1)}{4^2(2m+2)(2m+3)(2m+4)(2m+5)}$

Donc
$$\alpha_4^{(2m+1)} = \frac{(2m+5)!}{2^2} \cdot \frac{(2m-2)(2m-1)2m(2m+1)}{4^2\cdot(2m+2)(2m+3)(2m+4)(2m+5)}$$
$$= (2m-3)!\left[\frac{(2m-2)(2m-1)2m(2m+1)}{2\cdot 4}\right]^2.$$

IX. — Connaissant $\alpha_4^{(2m+1)}$, on pourra calculer le coefficient suivant, $\alpha_6^{(2m+1)}$. et ainsi de suite de proche en proche. En général, supposons que l'on ait démontré que
$$\alpha_{2k}^{(2m+1)} = (2m-k+1)!\left[\frac{(2m-2k+2)(2m-2k+3)\dots 2m(2m+1)}{2\cdot 4\dots(2k-2)2k}\right]^2$$
et calculons le coefficient suivant.

On a
$$\alpha_{2k}^{(2m)} = (2m-2k)!\left[\frac{(2m-2k+1)(2m-2k+2)\dots(2m-1)2m}{2\cdot 4\dots(2k-2)2k}\right]^2$$
Je puis alors former le tableau suivant :

$$(\beta_{2k+2})\left|\begin{array}{l}
\alpha_{2+2}^{m+1)} = (2m+2k+3)\,\alpha_{2k+2}^{(2m)} + (2m-2k)(2m-2k)!\\
\quad\left[\dfrac{2m-2k+1)(2m-2k+2)\dots(2m-1)2m}{2\cdot 4\dots(2k-2)2k}\right]^2\\
\alpha_{2k+2}^{(2m+1)} = (2m+2k+2)\,\alpha_{2k+2}^{(2m-1)} + (2m-2k-1)(2m-2k-1)!\\
\quad\left[\dfrac{(2m-2k)(2m-2k+1)\dots(2m-2)(2m-1)}{2\cdot 4\dots(2k-2)2k}\right]^2\\
\quad\; = (2m+2k+1)\,\alpha_{2k+2}^{(2m-2)} + (2m-2k-2)(2m-2k-2)!\\
\quad\left[\dfrac{(2m-2k-1)(2m-2k)\dots(2m-3)(2m-2)}{2\cdot 4\dots(2k-2)2k}\right]^2\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\alpha_{2k+2}^{(h)} = (h+2k+2)\,\alpha_{2k+2}^{(h-2)} + (h-2k-1)(h-2k-1)!\\
\quad\left[\dfrac{(h-2k)(h-2k+1)\dots(h-2)(h-1)}{2\cdot 4\dots(2k-2)2k}\right]^2\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\alpha_{2+2}^{(2k+4)} = (4k+6)\,\alpha_{2k+2}^{(2k+3)} + 3.3!\left[\dfrac{4\cdot 5\dots(2k+2)(2k+3)}{2\cdot 4\dots(2k-2)2k}\right]\\
\alpha_{2k+2}^{(2k+3)} = (4k+5)\,\alpha_{2k+2}^{(2k+2)} + 2.2!\left[\dfrac{3\cdot 4\dots(2k+1)(2k+2)}{2\cdot 4\dots(2k-2)2k}\right]^2\\
\alpha_{2k+2}^{(2k+2)} = \qquad \alpha_{2k}^{2k+1} = 1.1!\left[\dfrac{2\cdot 3\dots 2k(2k+1)}{2\cdot 4\dots(2k-2)2k}\right]^2
\end{array}\right.$$

Je multiplie la première équation de ce tableau par 1, la deuxième par

$$2m + 2k + 3,$$

la troisième par

$$(2m + 2k + 2)(2m + 2k + 3), \dots$$

la $(m - h + 2)^e$ par

$(h + 2k + 3)(h + 2k + 4) \dots (2m + 2k + 2)(2m + 2k + 3)$, ... la $(2m - 2k - 2)^e$ par

$$(4k + 7) \dots (2m + 2k + 2)(2m + 2k + 3),$$

la $(2m - 2k - 1)^e$ par

$$(4k + 6)(4k + 7) \dots (2m + 2k + 2)(2m + 2k + 3),$$

la dernière par

$$(4k + 5)(4k + 6) \dots (2m + 2k + 2)(2m + 2k + 3);$$

puis j'ajoute et j'ai $\alpha_{2k+2}^{(2m+1)} = (2m - 2k)(2m - 2k)! \left[\frac{2m - 2k + 1)(2m - 2k + 2) \dots (2m - 1)2m}{2.4 \dots (2k - 2)2k}\right]^2 + (2m - 2k - 1)(2m - 2k - 1)! \left[\frac{(2m - 2k) \dots (2m - 1)}{2 \dots (2k)}\right]^2 (2m + 2k + 3) + (2m - 2k - 2)(2m - 2 - 2)! \left[\frac{(2m - 2k - 1)(2m - 2k) \dots (2m - 3)(2m - 2)}{2.4 \dots (2k - 2)2k}\right] 2m + 2k + 2)(2m + 2k + 3) + \dots + (h - 2k - 1)(h - 2k - 1! \left[\frac{(h - 2k)(h - 2k + 1) \dots (h - 2)(h - 1)}{2.4 \dots (2k - 2)2k}\right]^2 (h + 2k + 3) \dots (2m + 2k + 3) + \dots + 3.3! \left[\frac{4.5 \dots (2k + 2)(2k + 3)}{2.4 \dots (2k - 2)2k}\right]^2 4k + 7)(4k + 8) \dots (2m + 2k + 3) + 2.2! \left[\frac{3.4 \dots (2k + 1)(2k + 2)}{2.4 \dots (2k - 2)2k}\right]^2 (4k + 6)(4k + 7) \dots (2m + 2k + 3) + 1. \left[\frac{2.3 \dots 2k(2k + 1)}{2.4 \dots (2k - 2)2k}\right]^2 (4k + 5)(4k + 6) \dots (2m + 2k + 3).$

Ou bien

$$\alpha_{2+2k}^{(2m+1)} = \frac{(2m + 2k + 3)!}{[2.4 \dots (2k - 2)2k]^2}$$

$$\left[\frac{(2m - 2k)(2m - 2k + 1) \dots (2m - 1)2m}{(2m + 1)(2m + 2) \dots (2m + 2k + 2)(2m + 2k + 3)}\right.$$

$$+ \frac{(2m - 2k - 1)(2m - 2k) \dots (2m - 2)2m - 1}{2m(2m + 1) \dots (2m + 2k + 1)(2m + 2k + 2)}$$

$$+\frac{(2m-2k-2)(2m-2k-1)\ldots(2m-3)(2m-2)}{(2m-1)2m\ldots(2m+2k)(2m+2k+1)}$$

$$+\ldots+\frac{(h-2k-1)(h-2k)\ldots(h-2)(h-1)}{h(h+1)\ldots(h+2k+1)(h+2k+2)}+\ldots$$

$$+\frac{3.4\ldots(2k+2)(2k+3)}{(2k+4)(2k+5)\ldots(4k+5)(4k+6)}$$

$$+\frac{2.3\ldots(2k+1)(2k+2)}{(2k+3)(2k+4)\ldots(4k+4)(4k+5)}$$

$$\left.+\frac{1.2\ldots 2k(2k+1)}{(2k+2)(2k+3)\ldots(4k+3)(4k+4)}\right].$$ Le problème revient à sommer la série de fractions entre parenthèses.

X. — Or on a $S_1 = \dfrac{1.2\ldots 2k(2k+1)}{(2k+2)(2k+3)\ldots(4k+3)(4k+4)}$

$$= \frac{1.2\ldots(2k+1)(2k+2)}{(2k+2)^2(2k+3)\ldots(4k+3)(4k+4)}.$$

$$S_2 = \frac{1.2\ldots(2k+1)(2k+2)}{(2k+2)^2(2k+3)\ldots(4k+3)(4k+4)}$$

$$+\frac{2.3\ldots(2k+1)(2k+2)}{(2k+3)(2k+4)\ldots(4k+4)(4+5)}$$

$$= \frac{2.3\ldots(2k+1)(2k+2)}{(2k+3)(2k+4)\ldots(4k+4)}\left[\frac{1}{(2k+2)^2}+\frac{1}{4k+5}\right].$$

Or $(2k+2)^2+(4k+5)=4k^2+12k+9=(2k+3)^2$;

donc $$S_2 = \frac{2.3\ldots(2k+2)(2k+3)}{(2k+2)^2(2k+4)\ldots(4k+4)(4k+5)}.$$

Soit en général,

$$S_{n-1}=\frac{(n-1)n\ldots(n+2k-1)(n+2k)}{(2k+2)^2(n+2k+1)(n+2k+2)\ldots(n+4k+1)(n+4k+2)}$$

$$S_n=\frac{(n-1)n\ldots(n+2k-1)(n+2k)}{(2k+2)^2(n+2k+1)\ldots(n+4k+1)(n+4k+2)}$$

$$+\frac{n(n+1)\ldots(n+2k-1)(n+2k)}{(n+2k+1)\ldots(n+4k+2)(n+4k+3)}$$

$$=\frac{n(n+1)\ldots(n+2k-1)(n+2k)}{(n+2k+1)\ldots(n+4k+1)(n+4k+2)}\left[\frac{n-1}{(2k+2)^2}+\frac{1}{n+4k+3}\right]$$

Or $(n-1)(n+4k+3)+(2k+2)^2 = n^2+4k^2+1+4kn+4k+2n=(n+2k+1)^2$.

Donc $$S_n = \frac{n(n+1)\ldots(n+2k)(n+2k+1)}{(2k+2)^2(n+2k+2)\ldots(n+4k+2)(n+4k+3)}.$$

Ainsi $S_{2m-2k} = \dfrac{(2m-2k)(2m-2k+1)\ldots 2m(2m+1)}{(2k+2)^2(2m+2)(2m+3)\ldots(2m+2k+3)}$.

Alors $\alpha^{(2m+}_{2k+2} = \dfrac{(2m+2k+3)\,!}{[2.4\ldots(2k-2)2k]^2}$.

$$\frac{(2m-k)(2m-2k+1)\ldots 2m(2m+1}{(2k+2)^2(2m+2)(2m+3)\ldots(2m+2k+3)}$$

$$= (2m-2k-1 \left[\frac{(2m-2k)(2m-2k+1)\ldots 2m(2m+1)}{2.4\ldots(2k-2)2k(2k+2)}\right]^2.$$

XI. — On a donc $y^{(2m+2)}\sqrt{(1-x^2)^{4m+3}} = (2m+1)\,!\,x^{2m+}$

$$+(2m-1)\,!\left[\frac{2m(2m+1)}{2}\right]x^{2m+1}$$

$$+(2m-3)\,!\left[\frac{(2m-2)(2m-1)2m(2m+1)}{2.4}\right]^2 x^{2m-3}+\ldots$$

$$+(2m-2k-1)\,!\left[\frac{(2m-2k)(2m-2k+1)\ldots 2m(2m+1)}{2.4\ldots 2k(2k+2)}\right]^2 .x^{2m-2k-1}$$

$$+\ldots+5\,!\left[\frac{6.7\ldots 2m(2m+1)}{2.4\ldots(2m-6)(2m-4)}\right]^2 x^5$$

$$+3\,!\left[\frac{4.5\ldots 2m(2m+1)}{2.4\ldots(2m-4)(2m-2)}\right]^2 x^3$$

$$+1\,!\left[\frac{2.3\ldots 2m.(2m+1)}{2.4\ldots(2m-2)2m}\right]^2 x \text{ et } y^{(2m+1)}\sqrt{(1-x^2)^{4m+1}}$$

$$= (2m)\,!\,x^{2m}+(2m-2)\,!\left[\frac{(2m-1)2m}{2}\right]^2 x^{2m-2}$$

$$+(2m-4)\,!\left[\frac{(2m-3)(2m-2)(2m-1)2m}{2.4}\right]^2 x^{2m-4}+\ldots$$

$$+(2m-2k)\,!\left[\frac{(2m-2k+1)(2m-2k+2)\ldots(2m-1)2m}{2.4\ldots(2k-2)2k}\right]^2 x^{2m-2k}$$

$$+\ldots+2\,!\left[\frac{3.4\ldots(2m-1)2m}{2.4\ldots(2m-4)(2m-2)}\right]^2 x^2+\left[\frac{1.2\ldots(2m-1)2m}{2.4\ldots(2m-2)2m}\right]^2.$$

XII. — Voici une remarque intéressante sur les fonctions N_0, N_1, etc. ... Np.

On a $N_0 = 1$; $N_1 = x$; $N'_1 = 1 = 1^2N_0$.

$N_2 = 2x^2+1$, donc $N'_2 = 4x = 2^2N_1$.

$N_3 = 6x^3+9x$, donc $N'_3 = 18x^2+9 = 3^2N_2$.

Ainsi l'on a $N'_2 = 1^2N_0$; $N'_2 = 2^2N_1$; $N'_3 = 3^2N_2$.

En général supposons que $N'_{p-1} = (p-1)^2N_{p-2}$.

On sait que $N_p = (1 - x^2)N'_{p-1} + (2p - 1)xN_{p-1}$.

Donc $N_p = (p-1)^2(1-x^2)N_{p-2} + (2p-1)xN_{p-1}$.

Prenons la dérivée des deux membres :

$$N'_p = (p-1)^2(1-x^2)N'_{p-2} - 2x(p-1)^2N_{p-2} + (2p-1)N_{p-1} + (2p-1)xN'_{p-1}.$$

ou
$$N'_p = (2p-1)x(p-1)^2N_{p-2} + (p-1)^2(1-x^2)N'_{p-2} + (2p-1)N_{p-1} = (p-1)^2[(2p-3)xN_{p-2} + (1-x^2)N'_{p-2}] + (2p-1)N_{p-1} - 2x(p-1)^2N_{p-2}.$$

Donc $N'_p = [(p-1)^2 + 2p - 1]N_{p-1} = p^2N_{p-1}$.

N_p est la primitive de N_{p-1} multipliée par le carré de p.

Note de la Rédaction. — La question précédente a été traitée, par une méthode différente et beaucoup plus simple, par M. Catalan. (*Notes d'algèbre et d'analyse;* académie de Belgique, 1877). Le travail de M. Levavasseur a seulement de l'intérêt au point de vue de la marche élémentaire suivie par l'auteur.

QUESTION 68

Solution par M. Saillard, élève de Mathématiques spéciales, au Collège Chaptal.

Une ellipse passe par un point fixe A, *et touche une droite donnée en un de ses sommets. Le rapport de l'axe parallèle à la droite à celui qui lui est perpendiculaire est* m. *Par chaque point du plan passent deux ellipses satisfaisant à ces conditions. Lieu des points tels que les deux ellipses qui y passent soient orthogonales. Dans le cas où* m = 1, *on aura pour lieu un cercle et un cercle point. Démontrer ce fait par la géométrie élémentaire.*

L'équation d'une ellipse rapportée à un de ses axes et à la tangente à l'un des sommets correspondants est

$$\frac{x^2 \pm 2ax}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Rapportons l'ellipse à la tangente au sommet et à une parallèle au grand axe $y = \lambda$; son équation sera

$$\frac{x^2 \pm 2ax}{a^2} + \frac{(y+\lambda)^2}{b^2} = 0. \qquad (1)$$

Prenons le paramètre λ, tel que la droite $y = \lambda$ dans le premier système, passe par le point donné A.

Alors les coordonnées de A dans le dernier système seront

$$y = 0, \quad x = p.$$

L'ellipse passe par ce point; nous aurons donc

$$\frac{p^2 \pm 2ap}{a^2} + \frac{\lambda^2}{b^2} = 0. \tag{2}$$

De plus, nous avons la relation

$$\frac{b}{a} = m. \tag{3}$$

Éliminons a et b entre les équations (1), (2), (3) et nous aurons

$$\frac{m^2x^2 + (y+\lambda)^2}{m^2p^2 + \lambda^2} = \frac{x}{p},$$

équation générale des ellipses satisfaisant aux conditions données par l'énoncé, ou

$$m^2px^2 + p(y+\lambda)^2 - m^2p^2x - \lambda^2x + 0. \tag{4}$$

Soit α, β, un point du lieu cherché; exprimons que l'ellipse passe par ce point, on aura

$$m^2p\alpha^2 + p(\beta+\lambda)^2 - m^2p^2\alpha - \lambda^2\alpha = 0. \tag{5}$$

Si nous tirons de cette équation en λ deux valeurs de λ, λ_1, λ_2, et que nous portions successivement ces valeurs de λ dans l'équation (4), nous aurons les équations des deux ellipses satisfaisant aux conditions de l'énoncé, et passant par $(\alpha.\beta)$.

Formons les coefficients angulaires des tangentes aux deux ellipses en (α,β), et exprimons que ces tangentes sont rectangulaires; nous aurons

$$\frac{2m^2p\alpha - m^2p^2 - \lambda_1^2}{2p(y+\lambda_1)} \cdot \frac{2m^2p\alpha - m^2p^2 - \lambda_2^2}{2p(y+\lambda_2)} = -1. \tag{6}$$

Posons $m^2p = q$, l'équation (6) deviendra

$$\frac{q(2\alpha - p) - \lambda_1^2}{2p(y+\lambda_1)} \cdot \frac{q(2\alpha - p) - \lambda_2^2}{2p(y+\lambda_2)} = -1. \tag{7}$$

ou

$$\frac{q^2(2\alpha - p)^2 - q(2\alpha - p)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \lambda_1^2\lambda_2^2}{4p^2[\beta^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\beta + \lambda_1\lambda_2]} = -1. \tag{8}$$

Mais dans cette dernière équation, nous avons des fonctions symétriques des racines λ_1, λ_2 de l'équation (5) :

$$\lambda^2(p-\alpha) + 2\lambda p\beta + q\alpha(a-p) + p\beta^2 = 0.$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2p\beta}{p-\alpha}, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{p\beta^2}{p-\alpha} - q\alpha,$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{4p^2\beta^2}{(p-\alpha)^2} = \frac{2p\beta^2}{-\alpha} + 2q\alpha.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (8), on aura

$$\frac{q^2(2\alpha-p)^2 - q(2\alpha-p)\left[\frac{4p^2\beta^2}{(p-\alpha)^2} - \frac{2p\beta^2}{(p-\alpha)} + 2q\alpha\right] + \left[\frac{p\beta^2}{p-\alpha} - q\alpha\right]^2}{4p^2\left[\beta^2 - \frac{2p\beta}{p-\alpha}\beta + \frac{p\beta^2}{p-\alpha} - q\alpha\right]} = -1$$

qui est l'équation du lieu.

En remplaçant β par y, α par x; en effectuant les simplifications et en transportant l'origine au point $\begin{cases} y = 0 \\ x = p \end{cases}$, on aura pour équation du lieu

$$(qx^2 + py^2)^2 = 4p(p+x)[pq(x^2+y^2) - xy^2) - xy^2(p-q)]$$

ou bien, en remplaçant q par sa valeur $= m^2p$, on aura

$$[m^2x^2 + y^2]^2 - 4(p+x)[pm^2(x^2+y^2) - xy^2(1-m^2)] = 0.$$

Courbe du quatrième degré.

Construction de la courbe :

1° $m < 1$.

Nous construirons d'abord les régions dans lesquelles se trouve la courbe.

Elle se trouve tout entière entre la droite $x = -p$ et la courbe $pm^2(x^2+y^2) - xy^2(1-m^2) = 0$. Cette dernière courbe se construira facilement. Elle sera tout entière du côté des x positifs et symétriques par rapport à l'axe des $y\left(\text{AB} = \frac{pm^2}{1-m^2}\right)$; elle a un point isolé à l'origine.

La courbe qui est le lieu cherché n'a pas d'asymptotes; c'est une courbe fermée.

Elle a un point isolé à l'origine (les tangentes en ce point sont isotropes).

Les points où elle rencontre l'axe des y sont donnés par $y^4 - 4p^2m^2y^2 = 0$, $y = \pm 2pm$.

Ceux où elle rencontre l'axe des y seront donnés par $m^4x^4 - 4(p+x)pm^2x^2 = 0$, ou $m^4x^2 - 4px - 4p^2 = 0$,

$$x = \frac{2p^2 \sqrt{4p^2 + 4p^2m^2}}{m}.$$

Nous pouvons chercher les conditions pour qu'une parallèle à l'axe des y coupe la courbe en quatre points $m^4x^4 - 4(p + x)pm^2x^2 > 0$. Nous voyons que, dans ce cas, la courbe serait hors des régions déterminées, ce qui est impossible. La courbe affectera donc la forme d'un ovale. avec un point isolé à l'origine.

2° $m > 1$.

La discussion reste la même ; seulement l'asymptote de la courbe, limitant la région se trouve du côté des x négatifs.

La courbe se compose encore d'un ovale et d'un point isolé.

3° $m = 1$.

I. — Géométrie analytique.

L'équation devient dans ce cas :

$$x(x^2 + y^2)^2 - 4(p + x)(x^2 + y^2)p = 0.$$

Le lieu se dédouble en

$$x^2 + y^2 = 0$$

et

$$x^2 + y^2 - 4p(p + x) = 0,$$

c'est-à-dire en deux cercles.

On pourrait prouver facilement ce fait par la géométrie élémentaire.

II. — Lorsque $m = 1$, les ellipses deviennent des cercles; or, lorsque deux cercles se coupent orthogonalement en un des points de concours, il en est de même en l'autre point d'intersection.

Transformons alors par rayons vecteurs réciproques en prenant pour centre d'inversion le point donné A.

Les deux cercles, considérés pour une position quelconque, se transforment en deux droites, rectangulaires, puisque les angles se conservent. La droite donnée se transforme en un cercle, auquel les deux droites rectangulaires sont tangentes; *le lieu du point d'intersection est donc un cercle* décrit avec $R\sqrt{2}$ comme rayon ; le tracé formé de ce cercle sera un *cercle ;* on trouvera un *cercle point* en prenant o pour puissance d'inversion. C. Q. F. D.

QUESTION 69

Solution par M. SAILLARD, élève de Mathématiques spéciales au collège Chaptal.

Des coniques sont circonscrites à un losange; la bissectrice des diagonales coupe l'une des coniques en deux points A *et* B. *De* B, *on mène la perpendiculaire* BH, *sur la tangente en* A, *lieu du point* H. — *Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur la tangente en* A. — *Lieu des pieds des perpendiculaires menées d'un point fixe à la polaire d'un point fixe.*

I. — En appelant a la distance OA, b la distance OB, l'équation de la droite AB est

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0,$$

en prenant pour axes les diagonales du losange.

L'équation de CD sera

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + 1 = 0.$$

Enfin l'équation générale des coniques circonscrites au losange ABCD, sera

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 - 1 + \lambda xy = 0. \qquad (1)$$

Pour prendre le pied de la perpendiculaire BH, on décrira sur AB comme diamètre un cercle, et on prendra l'intersection de ce cercle avec les tangentes aux points A et B.

Le point O est centre de toutes les coniques de la famille considérée; donc ce point sera en même temps le centre du cercle dont nous cherchons l'équation.

L'équation générale des coniques passant par l'intersection de la conique (1) et de la droite $y = x$ est

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 - 1 + \lambda xy + (y - x)\left(\frac{y}{\mu} - \frac{x}{\nu}\right) = 0.$$

La condition pour que cette conique soit un cercle, est que l'on ait

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{\nu} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{\mu} \quad \text{et} \quad \frac{2}{ab} + \lambda - \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu} = 0.$$

L'équation de la circonférence sera donc

$$(x^2+y^2)\left\{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2+\lambda\right\}-2=0. \qquad (2)$$

Cherchons maintenant l'équation de la tangente aux deux points A et B où la droite $y=x$ coupe les coniques (1).

$$x_0\left[\frac{1}{a}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)+\frac{\lambda}{2}y+\frac{1}{b}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)+\frac{\lambda}{2}x\right]-1=0, \qquad (3)$$

en appelant x_0, l'x des points A et B.

Cherchons sa valeur; elle sera donnée par l'équation (2) dans laquelle on fera $y=x$

$$x_0^2=\frac{1}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2+\lambda}.$$

En portant cette valeur de x_0^2 dans l'équation (3)

$$\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)+\frac{\lambda}{2}(x+y)\right]^2=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2+\lambda. \qquad (4)$$

Pour avoir l'équation du lieu, il suffira d'éliminer λ entre les équations (4) et (2), et on aura

$$\left[\frac{1}{2}(x-y)(b^2-a^2)(a^2+y^2)+a^2b^2(x+y)\right]^2=2a^4b^4(x^2+y^2)$$

Ce lieu se décompose en la droite $y=x$, qui ne fait pas partie du lieu proposé dans le problème, et en une courbe du 3e degré dont l'équation sera

$$(y-x)(x^2+y^2)^2(a^2-b^2)^2+4a^2b^2(a^2-b^2)(x+y)(x^2+y^2)$$
$$+4a^4b^4(x-y)=0.$$

On voit facilement que l'origine est centre de la courbe, que la droite $y=x$ est asymptote, que la courbe a un point d'inflexion à l'origine; enfin qu'elle coupe les axes en des points toujours réels.

II. — Soit α . β le point fixe.

Le coefficient angulaire de la tangente en A est, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent (équation (4))

$$m=-\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{\lambda}{2}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}+\frac{\lambda}{2}}$$

L'équation d'une droite passant par le point $\alpha\beta$ et perpen

diculaire à la tangente sera donc

$$y - \beta = \frac{\frac{1}{ab} + \frac{1}{b^2} + \frac{\lambda}{2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{\lambda}{2}} (x - \alpha). \qquad (1)$$

D'autre part l'équation des tangentes en A et B est (équation (4) du paragraphe précédent)

$$\left[\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) + \frac{\lambda}{2}(x + y)\right]^2 = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 + \lambda \quad (2)$$

On aura l'équation du lieu en éliminant λ entre ces deux équations ; cette équation sera

$$\left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right][(y - \beta)\, y + (x - \alpha)\, x]^2 = [(y - \beta)^2 - (x - \alpha)^2]$$

et en transportant l'origine au point $x = \alpha$, $y = \beta$, on aura

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2b^2} [y(y + \beta) + x(x + \alpha)]^2 = (y^2 - x^2).$$

Cette équation est l'équation du lieu, et la courbe se construira facilement en remarquant que cette courbe a un point double à l'origine; qu'elle est tout entière entre les droites $y = x$ et $y = -x$, dans la partie coupée; qu'elle est tangente à ces deux droites, qu'elle coupe l'axe de y en deux points réels et l'axe des x en deux points imaginaires; de ces conclusions nous déduirons la forme de la courbe.

III. — Lieu du pied et la perpendiculaire abaissée d'un point fixe à la polaire d'un point fixe.

L'équation générale étant

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 - 1 + \lambda xy = 0,$$

l'équation de la polaire du point $(x_0\ y_0)$, sera

$$x\left[\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right)\frac{2}{a} + \lambda y_0\right] + y\left[\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right)\frac{2}{b} + \lambda x_0\right] - 2 = 0$$

et celle de la perpendiculaire abaissée d'un point $(\alpha\beta)$,

$$(y - \beta)\left[\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right)\frac{2}{a} + \lambda y_0\right]$$
$$= (x - \alpha)\left[\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right)\frac{2}{b} + \lambda x_0\right]$$

et en éliminant λ entre ces deux équations, on obtien

l'équation du lieu

$$\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\right)[y(y-\beta) + x(x-\alpha)] + y_0(y-\beta) - x_0(x-\alpha) = 0$$

le lieu est un cercle passant par le point $\alpha\beta$.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Mansion, professeur de l'Université de Gand, à M. de Longchamps.

... Le dernier numéro du *Journal de Mathématiques spéciales* contient un article de M. Amigues sur la méthode de Bezout, à propos duquel il y a une observation sérieuse à faire.

Il dit (p. 104):

$$f(\alpha_1),\ f(\alpha_2),\ \dots\ f(\alpha)_p$$

sont racines de

$$B\beta + C\beta^2 + \dots = 0. \qquad (1)$$

Cette équation, de degré p, au plus, a pour ses p racines

$$f(\alpha_1),\ f(\alpha_2)\ \dots\ f(\alpha_p)\ ;$$

dont l'une d'elles est égale à la racine $\beta = 0$ de (1).

Ce raisonnement n'est pas probant. Si deux des expressions $f(\alpha_1), \dots f(\alpha_p)$ sont égales, par exemple $f(\alpha_k), f(\alpha_{k+1})$, rien ne prouve que l'équation (1) ait deux racines égales à $f(\alpha_k)$. On ne sait donc pas si (1) n'a pas pour racines $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \dots f(\alpha_p)$, chacune une fois, et de plus $\beta = 0$.

Une difficulté semblable se rencontre aussidans le mode d'exposition de Falk, et aussi dans celui de Lemonnier, et vicie toutes les conclusions de ces deux auteurs.

QUESTIONS PROPOSÉES

123. — Si l'équation

$$a + bx + cx^2 + \dots + kx^n = 0$$

a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$2a + b(\rho + \rho)x + c(\rho^{\sqrt{2}} + \rho^{-\sqrt{2}})x^2 + d(\rho^{\sqrt{3}} + \rho^{-\sqrt{3}})x^3 + \dots + k(\rho^{\sqrt{n}} + \rho^{-\sqrt{n}})x^n = 0\ ;$$

ρ désigne une quantité arbitraire. *(Laguerre.)*

124. — On fait une section droite dans un cylindre parabolique. Par le foyer de cette section, on mène dans le plan de la courbe une perpendiculaire à l'axe, qui coupe la courbe en deux points A et B. Au point A, on mène dans le plan de la parabole la normale AM à cette courbe ; puis, par AM, on fait passer des plans variables. Lieu des foyers des paraboles suivant lesquelles ces plans coupent le cylindre. Ce lieu est une courbe plane. *(Amigues.)*

125. — Une parabole de forme invariable glisse entre deux droites rectangulaires Ox, Oy; trouver le lieu décrit par l'extrémité du diamètre qui passe par l'origine. — La courbe est du huitième degré; mais elle peut se mettre, en coordonnées polaires, sous la forme remarquable

$$\frac{p}{\rho} = 1 - 4 \cos \omega.$$

Déduire de cette équation les points d'inflexion que présentent les quatre branches de la courbe. *(G. L.)*

126. — On considère un triangle ABC et une parabole. On mène à la parabole une tangente D, parallèle au côté BC, et du point A on mène à la parabole des tangentes qui rencontrent la droite D en A' et A''. Opérant de même pour les deux autres côtés, on obtient six points A', A'', B', B'', C', C''. Démontrer que ces six points sont sur une conique qui contient A, B et C. *(Weill.)*

127. — Un cercle passe par le foyer d'une parabole, et rencontre cette courbe au point A. En ce point, on mène la tangente à la parabole, laquelle rencontre le cercle au point B. Au point B, on mène la tangente au cercle. Démontrer que cette droite est tangente à la parabole. *(Weill.)*

128. — Étant donnés sept points dans un plan, on fait passer par cinq d'entre eux une conique, et l'on joint les deux autres par une droite qui rencontre la conique en deux points A_1 et A_2. Opérant ainsi sur tous les points successivement, on obtient quarante-deux points. Démontrer qu'il existe une courbe du sixième degré passant par ces quarante-deux points, et ayant les sept points donnés pour points doubles. Trouver son équation. *(Weill.)*

129. — Trouver toutes les équations du troisième degré telles que, si x_1 est une de leurs racines, convenablement choisie, les deux autres soient

$$-\frac{x_1+1}{x_1} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{1+x_1}.$$

(*Weill.*)

130. — Trouver les équations du sixième degré telles que, si x_1 est une *quelconque* de leurs racines, les autres soient

$$\frac{1}{x_1}, \; -(1+x_1), \; -\frac{1}{1+x_1}, \; -\frac{x_1}{1+x_1}, \; -\frac{x_1+1}{x_1}.$$

(*Weill.*)

131. — On considère une ellipse E, et sur le grand axe AA′ quatre points fixes P, P′; Q, Q′; O étant le centre de E, on suppose

$$OP = OP' = d,$$
$$OQ = OQ' = d'.$$

Ceci posé, on prend sur E un point mobile M, et on joint M aux quatre points fixes. Ces droites rencontrent l'ellipse en des points C, C′; D, D′; les droites CD, C′D′, se coupent en un point I dont on demande le lieu géométrique.

Ce lieu est l'ensemble de deux coniques. (*G. L.*)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 15034-4.

Corriger comme il suit la question 123.

(Mathématiques spéciales.)

---

123. — Si l'équation

$$a + bx + cx^2 + \ldots + kx^n = 0$$

a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$2a + b(\rho + \rho^{-1})x + c\left(\rho^{\sqrt{2}} + \rho^{-\sqrt{2}}\right)x^2 + d\left(\rho^{\sqrt{3}} + \rho^{-\sqrt{3}}\right)x^3 + \ldots + k\left(\rho^{\sqrt{n}} + \rho^{-\sqrt{n}}\right)x^n = 0;$$

ρ désigne une quantité arbitraire.

(Laguerre.)

NOTE DE GÉOMÉTRIE

APPLICATIONS NOUVELLES DES TRANSVERSALES RÉCIPROQUES

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 121.)

7. — L'application des transversales réciproques à la construction des tangentes nous a déjà occupé (*), et nous avons montré comment on obtenait, par un procédé des plus simples, le tracé des tangentes aux courbes que nous avons nommées *courbes conchoïdales* et *courbes diamétrales*. Mais nous voulons revenir ici sur cette construction, pour l'étendre à des courbes plus générales que celles que nous avons considérées dans les articles cités.

Nous rappellerons d'abord la définition de ces courbes.

8. — Imaginons une courbe V que nous voulons transformer au moyen d'une autre courbe U formant la figure de référence, et considérons une tangente à V rencontrant U au point A; si nous prenons

$$AM' = AM'' = h,$$

(*h* désignant une longueur donnée), le lieu du point M', ou du point M'', est une certaine courbe V' que nous nommons une *conchoïdale*, par rapport à U.

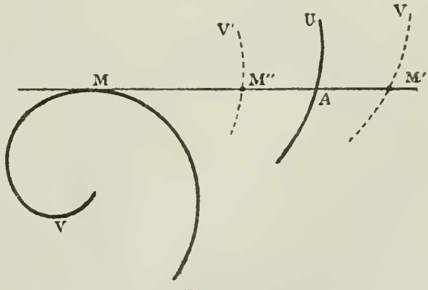


Fig. 7.

Considérons maintenant une figure de référence formée

(*) *Journal*, année 1880, p. 272; et *Journal de Math. spéc.*, année 1882, p. 25.

par deux courbes U_1, U_2; si nous menons à la courbe V une tangente quelconque rencontrant U_1 au point A_1, U_2 au point A_2, le lieu décrit par le milieu de $A_1 A_2$ est une certaine courbe V′ que nous appellerons *courbe diamétrale.*

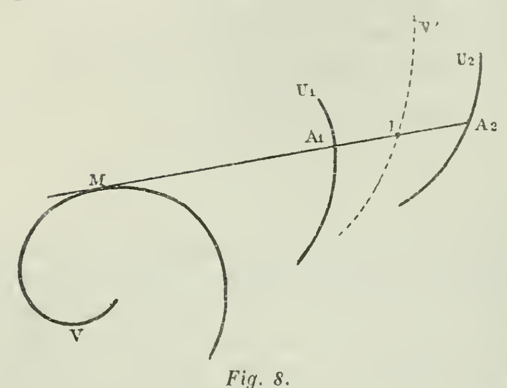


Fig. 8.

Dans le cas particulier où V se réduit à un point, les conchoïdales deviennent des conchoïdes ordinaires et si, dans la figure 8, on suppose que V représente un point rejeté à l'infini et que les courbes U_1 et U_2 forment une seule et même courbe, on retombe dans les courbes diamétrales, qui sont ordinairement considérées.

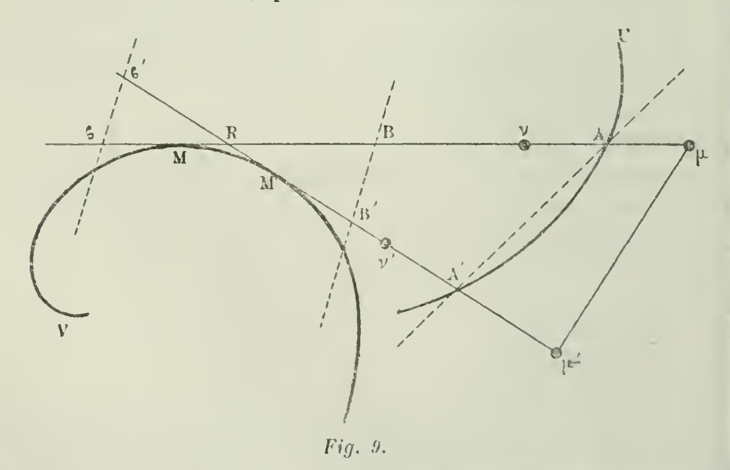


Fig. 9.

Nous avons supposé, dans les articles que nous avons rappelés, que la courbe V se réduisait à un point; nous allons maintenant traiter un cas plus général, V étant une courbe quelconque.

9. — Examinons d'abord le cas des conchoïdales, courbes définies comme nous venons de le dire, et considérons deux tangentes voisines MA, M'A'. Si nous prenons $A\mu = A'\mu' = h$, les points μ et μ' seront deux points voisins de la conchoïdale, et nous nous proposons de chercher la position limite de $\mu\mu'$.

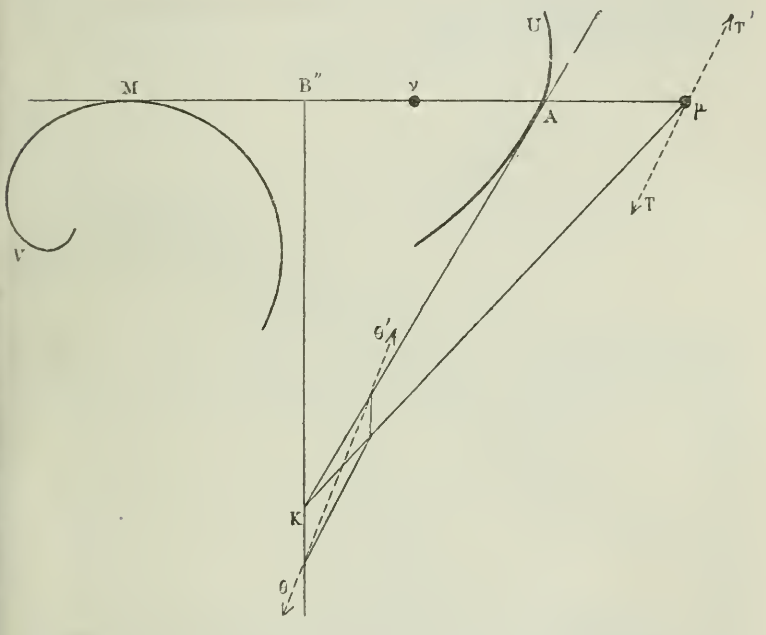


Fig. 10.

A cet effet, prenons

$$RB = RB' = h,$$

les deux droites AA', BB' sont deux transversales réciproques du triangle R $\mu\mu'$; elles rencontrent donc $\mu\mu'$ en deux points symétriquement placés par rapport au milieu de $\mu\mu'$.

Si maintenant nous passons à la limite, si nous supposons que le point M' vienne se confondre avec M, BB' a pour position limite une droite B"K, perpendiculaire à MA, en un point B", choisi de telle sorte que l'on ait $MB'' = A\mu = h$. La droite AA' devient la tangente AK à la courbe U, au point

A, et la tangente à la conchoïdale est donc une droite passant par μ et partagée en deux parties égales par les droites AK, B″K. La figure 11 montre la construction qu'il faut faire pour trouver la tangente TT′; la droite TT′ est parallèle à $\theta\theta'$, diagonale du parallélogramme obtenu comme l'indique la figure.

Si l'on considère le second bras de la conchoïdale, celui que l'on obtient en prenant

$$\nu A = \nu' A' = h,$$

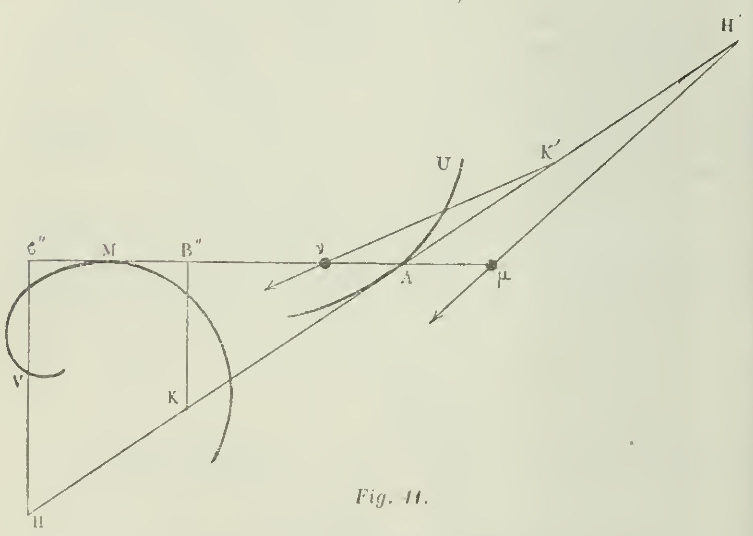


Fig. 11.

on voit que BB′ et $\nu\nu'$ sont deux transversales réciproques du triangle RAA′; elles rencontrent donc AA′ en deux points symétriques par rapport au milieu de AA′, et pour obtenir *(fig. 11)* la tangente au point ν, il suffit de joindre ν au point symétrique de K par rapport à A.

10. — Cette dernière construction est même un peu plus simple que celle que nous avons indiquée pour la première branche de la conchoïdale; mais on peut l'appliquer à cette même branche en considérant *(fig. 9)* la droite $\beta\beta'$ obtenue en prenant

$$\beta R = \beta' R = h.$$

Les droites $\mu\mu'$, $\beta\beta'$ sont deux transversales réciproques du triangle RAA′; elles rencontrent donc AA′ en deux points symétriques par rapport au milieu de AA′.

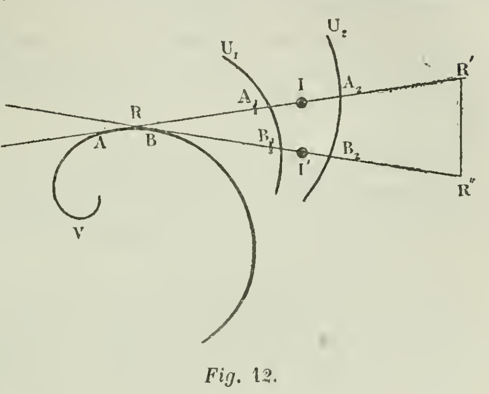


Fig. 12.

En passant à la limite on obtient les tangentes aux points μ et ν, comme le montre la figure 11; dans cette figure on a pris

$$AK' = AK, \text{et } AH' = AH.$$

11. — Considérons maintenant une courbe diamétrale, et après avoir construit, comme l'indique la figure 12, deux

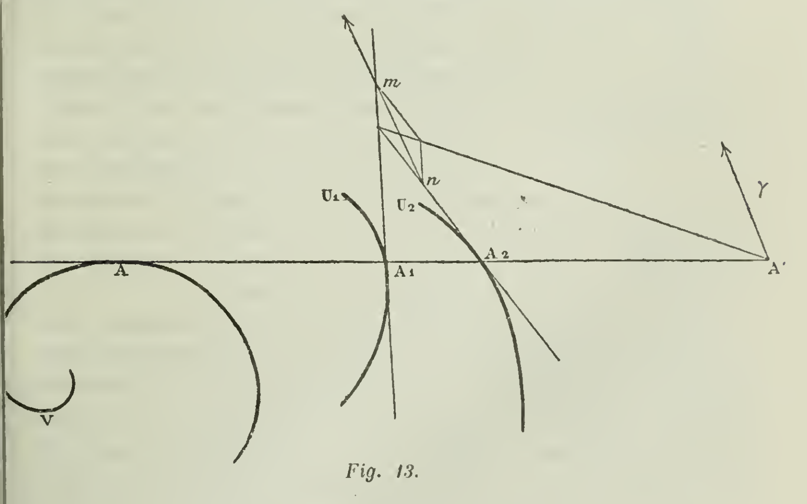


Fig. 13.

points I, I′ de la diamétrale, prenons

$$IR' = RI, \text{ et } I'R'' = RI'.$$

Les droites A_1B_1, A_2B_2 sont deux transversales réciproques

du triangle RR′R″, elles coupent R′R″ en deux points équidistants du milieu de R′R″.

Si nous passons à la limite, nous obtiendrons la position limite de R′R″ et, par suite, la direction de la tangente au point A′ en effectuant la construction indiquée par la figure 13.

Dans cette figure on a pris $A_2A' = AA_1$, et la droite γ, position limite de R′R″, est une parallèle à la diagonale *mn* du parallélogramme construit comme l'indique la figure.

12. — La construction de la tangente aux conchoïdales présente une difficulté particulière dans un cas que nous allons envisager. Ce n'est pas là d'ailleurs un fait isolé; et les exemples sont nombreux, aussi bien dans l'analyse que dans la géométrie, exemples dans lesquels la solution du cas général cesse d'être valable, même avec les modifications qu'on y peut faire, dans certains cas singuliers.

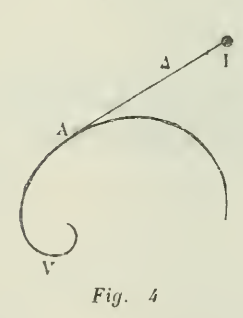


Fig. 4

Tel est, dans le problème qui nous occupe, le cas où l'on suppose que les courbes U et V *(fig. 10)* se confondent. Nous sommes amenés ainsi à considérer une conchoïdale particulière et qui correspond à la définition suivante : *On considère une courbe* V *et un point* A, *mobile sur cette courbe; en ce point* A, *on mène une tangente* Δ *sur laquelle on prend, à partir du point* A, *un longueur* AI, *constante et égale à* h; *trouver le lieu décrit par ce point* I.

La construction que nous avons donnée plus haut, construction très simple, mais qui repose sur le tracé des tangentes aux courbes U et V *(fig. 10)*, cesse d'être applicable quand on se place dans l'hypothèse particulière que nous examinons. Nous indiquons, dans le paragraphe suivant, une solution de la difficulté que nous venons de soulever.

13. — Considérons deux tangentes voisines à la courbe V, et prenons

$$AI = A'I' = h.$$

Nous allons chercher la limite des positions de II', quand les points A, A' viennent se confondre.

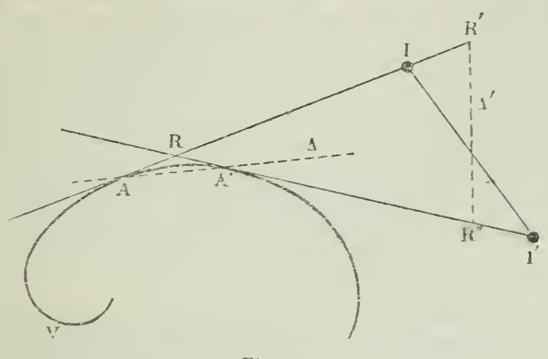


Fig. 15.

A cet effet, prenons

$$IR' = AR, \text{ et } R''I' = RA';$$

nous avons alors

$$RR' = RR'' = h,$$

et nous pouvons aussi remarquer que Δ et Δ' sont deux transversales réciproques du triangle RII'.

Ceci posé, imaginons la parabole P qui est inscrite au triangle RII' et qui est tangente à Δ; les diamètres de cette parabole seront parallèles à R'R'' (§ 2). Nous savons d'ailleurs que le foyer de P appartient aux cercles circonscrits des triangles formés par le quadrilatère (RII', Δ) Passons maintenant à la limite; le cercle circonscrit au triangle ARA' (l'un de ceux auxquels nous venons de faire allusion) a pour position limite le cercle décrit sur

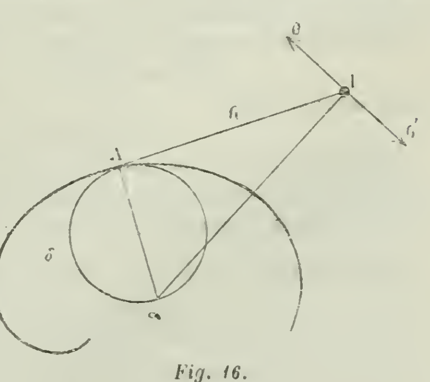


Fig. 16.

la droite qui joint le point A au centre de courbure de V en ce point, comme diamètre.

Soit α le centre de courbure de V au point A; sur $A\alpha$ comme diamètre décrivons un cercle δ; le triangle $RR'R''$ étant isoscèle, la droite $R'R''$, à la limite, est perpendiculaire à la tangente AI. On conclut de là que la direction des diamètres de la parabole P à la limite, est la normale $A\alpha$. Cette droite $A\alpha$ est donc l'axe de cette parabole limite P', et α est précisément son foyer. En joignant $I\alpha$ et en élevant une perpendiculaire $\theta\theta'$ à cette droite, une propriété connue montre que $\theta\theta'$ est la limite de II'; c'est la tangente cherchée.

14. — Nous bornerons là ces considérations sur les transversales réciproques; mais ces droites, en raison même de la simplicité de la loi qui règle leur construction, se rencontrent dans un grand nombre de questions, et nous aurons occasion de montrer une application nouvelle de ces transversales dans une étude que nous publierons prochainement sur l'hypocycloïde à trois points de rebroussement.

Nous ferons pourtant une dernière remarque relative aux conchoïdales.

15. — Reportons-nous à la figure 11 et considérons les deux points μ et ν de la conchoïdale, points qu'on peut appeler *correspondants sur la conchoïdale.*

Puisque nous avons

$$K'A = AK, \quad H'A = AH,$$

nous avons aussi

$$K'H' = KH.$$

Remarquons encore que la projection de HK sur $\mu\nu$ est la droite $B''\beta''$, c'est-à-dire $2h$. Nous pouvons donc, d'après cela, énoncer la propriété suivante :

Théorème. — *Si l'on considère deux points correspondants μ, ν, d'une conchoïdale, les tangentes à cette courbe, en ces points, rencontrent la tangente à la courbe de référence* U, *au point* A *milieu de $\mu\nu$, en deux points, qui, projetés sur $\mu\nu$, donnent un segment constant et égal à $\mu\nu$.*

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1884

Mathématiques spéciales.

Par le centre d'un ellipsoïde donné, on mène trois diamètres conjugués quelconques, et, par les points où ces droites rencontrent la sphère circonscrite au parallélépipède formé par les plans tangents aux sommets de l'ellipsoïde, on fait passer des plans.

1. Trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point donné P *sur ces plans variables.*

2. Ce lieu est une surface du quatrième ordre, dont l'équation peut être ramenée à la forme suivante :

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 4Ax^2 + 4A'y^2 + 4A''z^2 + 8cx + 8c'y + 8c''z + 4D = 0.$$

Trouver toutes les sphères telles que chacune d'elles coupe la sphère suivant deux cercles.

3. Ces sphères forment cinq séries, parmi lesquelles deux ne sont pas distinctes.

Démontrer que les sphères de la série double *passent toutes par un même point, et trouver le lieu de leurs centres.*

Démontrer que les sphères des trois autres séries coupent respectivement à angle droit les sphères fixes S_1, S_2, S_3.

4. Trouver le lieu des centres des sphères de ces trois séries.

Solution par M. FONTENÉ, professeur de Mathématiques Élémentaires au Collège Rollin.

PREMIÈRE PARTIE

La surface du quatrième degré qui figure dans la question est une anallagmatique du quatrième ordre dans un cas particulier, et pourrait donner lieu à des développements assez longs. Je me bornerai à traiter la question telle qu'elle est posée.

Soit l'ellipsoïde et la sphère de Monge

$$E = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$$

$$S = x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 0.$$

Soit un des plans de l'énoncé

$$P = l\frac{x}{a} + m\frac{y}{b} + n\frac{z}{c} - 1 = 0.$$

Pour obtenir la relation entre l, m, n je fais une transformation homographique, en faisant correspondre au point xyz le point XYZ donné par les relations

$$\frac{x}{a} = X, \quad \frac{y}{b} = Y, \quad \frac{z}{c} = Z.$$

J'obtiens alors

$$E' = X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 = 0$$
$$S' = a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 0.$$
$$P' = lX + mY + nZ - 1 = 0.$$

Comme la transformation effectuée conserve les diamètres conjugués, ce plan doit couper la surface S′ suivant une conique où aboutissent trois diamètres conjugués de la sphère E′; c'est-à-dire que le cône qui a son sommet à l'origine, et pour directrice la courbe (S′P′) doit être capable de trois génératrices rectangulaires. On a facilement la condition

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

qui lie les paramètres du plan P.

Cela posé, si l'on appelle 2α, 2β, 2γ, les coordonnées du point donné I, on aura le lieu en éliminant l, m, n, entre l'équation du plan P, la condition ci-dessus, et les équations de la perpendiculaire

$$\frac{x - 2\alpha}{\frac{l}{a}} = \frac{y - 2\beta}{\frac{m}{b}} = \frac{z - 2\gamma}{\frac{n}{c}}.$$

Pour faire l'élimination on fait une combinaison homogène en l, m, n, de l'équation du plan P et de l'équation de condition, et on remplace l, m, n par $a(x - 2\alpha)$, etc.; ce qui donne l'équation du lieu :

$$[x(x - 2\alpha) + y(y - 2\beta) + z(z - 2\gamma)]^2 - a^2(x - 2\alpha)^2$$
$$- b^2(y - 2\beta)^2 - c^2(z - 2\gamma)^2 = 0.$$

Si on transporte l'origine au point O′ milieu de OI, l'équation devient, en posant $OI = 2\delta$:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \delta^2)^2 - a^2(x - \alpha)^2 - b^2(y - \beta)^2$$
$$- c^2(z - \gamma)^2 = 0$$

avec

$$\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

REMARQUE. — La condition $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ montre que le plan P est tangent à l'ellipsoïde au point

$$\frac{x}{a} = l, \quad \frac{y}{b} = m, \quad \frac{z}{c} = n.$$

Donc la surface est la polaire du point I. Le point I est un point double.

DEUXIÈME PARTIE

Si on remarque que cette équation contient le carré du premier membre de l'équation d'une sphère, le premier membre de l'équation d'un cône, il est facile d'obtenir une première série de sphères coupant la surface suivant deux cercles. En effet, soit la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - \delta^2 - 2\lambda(x - \alpha) - 2\mu(y - \beta) - 2\nu(z - \gamma) = 0.$$

Elle coupe la surface suivant une courbe située sur la surface du second degré

$$4[\lambda(x - \alpha) + \mu(y - \beta) + \nu(z - \gamma)]^2 - a^2(x - \alpha)^2 - b^2(y - \beta)^2 - c^2(z - \gamma)^2 = 0;$$

cette surface est un cône. Si ce cône se réduit à deux phases, la section par la sphère se composera de deux cercles. Or, on trouve facilement la condition

$$\begin{vmatrix} 1 - \dfrac{a^2}{4\lambda^2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 - \dfrac{b^2}{4\mu^2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 - \dfrac{c^2}{4\nu^2} \end{vmatrix} = 0$$

qui devient

$$\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} + \frac{\nu^2}{c^2} = \frac{1}{4}.$$

Or, les sphères considérées passent au point α, β, γ, c'est-à-dire au point I, et le lieu de leurs centres (λ, μ, ν) est la surface du second degré ci-dessus; elle est homothétique à l'ellipsoïde donné, le centre d'homothétie étant I, et le rapport d'homothétie $\frac{1}{2}$. Si donc M est un point de l'el-

lipsoïde primitif, la sphère décrite sur IM comme diamètre est une des sphères considérées ici.

Remarque. — Ce résultat est facile à prévoir. La surface est la polaire du point I, par suite elle est l'enveloppe des sphères qui ont pour diamètre IM, M' étant un point de l'ellipsoïde ; ces sphères, passant au point double I, et touchant la surface, peuvent être considérées comme bitangentes à la surface, et par suite la coupent suivant deux cercles (théorème connu).

TROISIÈME PARTIE

Pour trouver d'autres sphères coupant la surface suivant deux cercles, j'introduis un paramètre θ dans son équation, et je l'écris

$$(x^2+y^2+z^2-\delta^2-\theta)^2-(a^2-2\theta)x^2-(b^2-2\theta)y^2-(c^2-2\theta)z^2 + 2a^2\alpha x + 2b^2\beta y + 2c^2\gamma z - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 - c^2\gamma^2 - 2\delta^2\theta - \theta^2 = 0.$$

Je dispose de θ de façon que la surface du second degré qui figure dans l'équation soit un cône, ce qui me donne

$$(x^2+y^2+z^2-\delta^2-\theta)^2-(a^2-2\theta)\left(x-\frac{a^2\alpha}{a^2-2\theta}\right)^2 - (b^2-2\theta)\left(y-\frac{b^2\beta}{b^2-2\theta}\right)^2 - (c^2-2\theta)\left(z-\frac{c^2\gamma}{c^2-2\theta}\right)^2 = 0$$

avec la condition

$$\frac{a^4\alpha^2}{a^2-2\theta}+\frac{b^4\beta^2}{b^2-2\theta}+\frac{c^4\gamma^2}{c^2-2\theta}-a^2\alpha^2-b^2\beta^2-c^2\gamma^2 - 2\delta^2\theta-\theta^2=0, \qquad (1)$$

équation du cinquième degré.

Cette équation devient facilement

$$\theta^2\left[\frac{\alpha^2}{a^2-2\theta}+\frac{\beta^2}{b^2-2\theta}+\frac{\gamma^2}{c^2-2\theta}-1\right]=0.$$

Elle admet la racine double $\theta = 0$, et trois autres racines réelles séparées par

$$-\infty,\ \frac{a^2}{2},\ \frac{b^2}{2},\ \frac{c^2}{2}.$$

Cela posé, et θ étant racine de l'équation précédente, coupons la surface par la sphère

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \delta^2 - \theta) - 2\lambda\left(x - \frac{a^2\alpha}{a^2 - 2\theta}\right) - 2\mu(\quad)$$
$$- 2\nu(\quad) = 0. \tag{2}$$

La courbe d'intersection est sur la surface du second degré

$$\left[2\lambda\left(x - \frac{a^2\alpha}{a^2 - 2\theta}\right) + \ldots\right]^2 - (a^2 - 2\theta)\left(x - \frac{a^2\alpha}{a^2 - 2\theta}\right)^2$$
$$- \ldots = 0,$$

qui est un cône. Si ce cône se réduit à deux plans, la section par la sphère se composera de deux cercles. Or on trouve facilement la condition

$$\frac{\lambda^2}{a^2 - 2\theta} + \frac{\mu^2}{b^2 - 2\theta} + \frac{\nu^2}{c^2 - 2\theta} = \frac{1}{4}.$$

Donc, θ étant racine de l'équation (1), et λ, μ, ν vérifiant la relation (3), la sphère (2) coupe la surface suivant deux cercles. Le centre étant λ, μ, ν, le lieu du centre est la surface (3); on a ainsi, pour les quatre racines θ_0, θ_1, θ_2, θ_3, quatre surfaces homofocales. En outre si on prend par rapport aux sphères (2) la puissance du point dont les coordonnées sont

$$\mathrm{U} = \frac{a^2\alpha}{a^2 - 2\theta}, \quad \mathrm{V} = \frac{b^2\beta}{b^2 - 2\theta}, \quad \mathrm{W} = \frac{c^2\gamma}{c^2 - 2\theta},$$

la puissance est indépendante de λ, μ, ν, et les sphères de chaque série sont orthogonales à une sphère ayant ce point pour centre, et pour carré de son rayon la puissance, c'est-à-dire

$$u^2 + v^2 + w^2 - \delta^2 - \theta.$$

En particulier, si on prend la racine double $\theta = 0$ le centre est

$$u = \alpha, \quad v = \beta, \quad w = \gamma$$

et le carré du rayon est nul : la sphère se réduit au point I.

On reconnaît là la génération des surfaces anallagmatiques du quatrième ordre.

Remarque I. — Soient A, B, C les centres des trois sphères orthogonales. D'après la théorie générale des surfaces anal-

lagmatiques du quatrième ordre, le trièdre IA, IB, IC est trirectangle, et le carré du rayon de la sphère de centre A est $\overline{AI}^2$.

L'orthogonalité des directions IA, IB, revient à

$$\varphi(\theta_1) - \varphi(\theta_2) = 0,$$

$\varphi(\theta)$ étant l'équation en θ.

Quant au carré du rayon, la vérification conduit à l'équation en θ mise sous la forme

$$\frac{2a^2\alpha^2}{a^2 - 2\theta} + \ldots - 2\delta^2 - \theta = 0,$$

où elle est débarrassée seulement d'une racine nulle.

Remarque II. — L'équation en θ, où on introduit u, v, w, donne pour l'équation du plan ABC

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1 = 0;$$

c'est le plan polaire du point I par rapport à l'ellipsoïde dont le centre est transporté en O′ milieu de OI.

Nota. — Nous avons reçu également une solution très élégante de M. Voignier, élève du Lycée de Nancy.

CONCOURS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1884

Mathématiques.

On donne une conique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

On joint un point M de cette conique aux deux foyers F et F′.

1. On demande d'exprimer les coordonnées du cercle inscrit dans l'intérieur du triangle MFF′, au moyen des coordonnées du point M.

2. Dans le cas où la conique donnée est une ellipse, on démontrera que, si l'on considère les cercles inscrits dans deux triangles correspondant à deux points M et M′ de la

conique, l'axe radical de ces deux cercles passe par le point milieu du segment MM'.

3. Pour chaque position du point M, le rayon vecteur FM touche le cercle correspondant en un point P. On déterminera, en coordonnées polaires, l'équation du lieu décrit par le point P. On prendra le foyer F pour origine des rayons. et l'axe des X pour origine des angles.

Lavis.

Deux troncs de cône égaux, dont les axes sont verticaux, sont raccordés entre eux par une portion de sphère. L'angle au sommet de chaque cône est de 90°; l'ensemble des trois corps a 144 millimètres de hauteur. Exécuter à teintes plates, à l'encre de chine, le lavis du solide ainsi constitué; les deux faces sont dépolies; le rayon lumineux est dirigé à 45°, suivant l'usage.

Trigonométrie.

On donne les trois côtés d'un triangle

$$a = 12514^{m},87,$$
$$b = 22636,55,$$
$$c = 18915,92.$$

Déterminer les trois angles et la surface en hectares.

Géométrie descriptive.

Représenter, par ses projections, le solide commun à un cône et à un cylindre pleins, tous deux de révolution.

Les axes sont de front, et se coupent à angle droit au-dessus du plan horizontal, leur plan est à 10 centimètres en avant du plan vertical.

Le cône est tangent au plan horizontal; son demi-angle au sommet est le quart d'un angle droit.

Le cylindre a 5 centimètres de rayon; son axe rencontre le plan horizontal à 16 centimètres du sommet du cône.

On prendra la ligne de terre perpendiculaire aux grands côtés du cadre, et à égale distance des deux autres côtés.

CONCOURS DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
EN 1884

Mathématiques.

a et b désignant les coordonnées rectilignes rectangulaires d'un point M, quelle est pour chaque position de ce point la nature des racines de l'équation

$$3t^4 + 8at^3 - 12bt^2 + 4b = 0\,?$$

On construira, en particulier, le lieu des positions point M pour lesquelles l'équation admet une racine double, en calculant les coordonnées d'un point du lieu en fonction de cette racine.

Physique.

1. — Un fil métallique est tendu par un barreau de cuivre horizontal que l'on fait osciller, et la durée de l'oscillation est θ. Le fil est en équilibre quand le barreau est perpendiculaire au méridien magnétique ; on remplace le barreau de cuivre par un barreau aimanté, qui se met alors dans une position faisant un angle α avec la première. On fait osciller le barreau aimanté autour de cette position d'équilibre, et on trouve que la durée de l'oscillation est t. Quelle est l'équation qui lie les trois variables θ, t et α?

2. — Une lunette dont l'objectif a une longueur focale égale à F est pourvue d'un oculaire négatif à deux verres, dont le symbole est 1, 2, 3; c'est-à-dire que le verre oculaire, celui qui est tourné vers l'œil, a un foyer f; le verre de champ, c'est-à-dire celui qui est tourné vers l'objectif, a un foyer $3f$, et la distance des verres est égale à $2f$. La lunette est réglée pour un objet infiniment éloigné, et pour un œil infiniment presbyte. On demande : 1° la mise au point, c'est-à-dire la distance de la lentille de champ par rapport au plan focal de l'objectif ; 2° le grossissement; 3° la position du cercle

de Ramsden, ou sa distance à la lentille oculaire; 4° la grandeur de ce cercle, ou le rapport de son diamètre à celui de l'objectif.

3. — Que savez-vous sur les grandeurs électriques, et sur les unités qui servent à les mesurer?

ÉCOLE POLYTECHNIQUE 1884

Questions d'examens oraux

1. — Quel est le degré de la courbe qui correspond à l'équation polaire

$$\rho^m(\mathrm{A}\cos m\omega + \mathrm{B}\sin m\omega) = 1\ ;\ (m \text{ entier}).$$

Déterminer les asymptotes.

Comment peut-on, par un changement d'axes, ramener l'équation précédente à la forme

$$\frac{1}{r^m} = h \sin m\Omega.$$

2. — Démontrer que l'origine est un sommet de la surface qui a pour équation

$$xy + xz + yz + x + y + z = 0.$$

3. — Résoudre les inégalités

$$ax + by + c > 0,$$
$$a'x + b'y + c' > 0.$$

4. — Construire les courbes qui correspondent aux équations

$$\rho^2 = \sin 2\omega, \quad \rho^3 = \sin 3\omega, \quad \rho^4 = \sin 4\omega, \quad \text{etc.}$$

5. — Construire la courbe qui a pour équation

$$(y - xy - x^2)^2 = x^3;$$

comparer cette courbe avec celle qui correspond aux formules

$$x = t^2, \quad y = \frac{t^3}{1 - t};$$

au moyen de cette dernière formule déterminer la tangente qui est parallèle à la tangente de rebroussement.

6. — Calculer les axes d'une section plane dans un paraboloïde.

7. — Limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ quand m est une expression imaginaire dont le module croît au delà de toute limite.

8. — Que représente, dans un plan donné, l'équation

$$f(x, y, z) = 0,$$

f étant une forme quadratique homogène des lettres x, y, z; que représente aussi

$$f(P, Q, R) = 0,$$

P, Q, R étant des formes linéaires et homogènes des lettres x, y, z.

9. — On considère l'équation

$$f(x) = 0.$$

Soit a une quelconque de ses racines, démontrer que l'on a

$$\Sigma \frac{1}{1 + a} = - \frac{f'(-1)}{f(-1)}.$$

10. — Construire la courbe

$$\rho = \frac{\cos 3\omega}{\sin 2\omega}.$$

montrer que cette équation représente une cubique passant par les ombilics du plan; déterminer son asymptote $\left(y = \frac{1}{2}\right)$ qui est inflexionnelle.

11. — On considère deux coniques Γ, Γ' se coupant aux points A, B, C, D; on suppose que les tangentes en A coupent CD en deux points qui forment avec C et D une division harmonique; démontrer que cette propriété a lieu pour le point B, c'est-à-dire que les tangentes en ce point à Γ et à Γ' rencontrent aussi CD en deux points qui forment avec C et D une division harmonique.

12. — On considère des variables indépendantes x, y, z, vérifiant constamment l'égalité

$$x + y + z = a;$$

démontrer que le maximum de

$$xy + yz + zx,$$

a lieu quand on suppose

$$x = y = z = \frac{a}{3}.$$

Généraliser cette proposition en l'étendant à p variables.

13. — Équation générale des tangentes parallèles à une direction donnée; la déduire de l'équation quadratique des tangentes issues d'un point donné, en supposant que celui-ci s'éloigne à l'infini dans la direction proposée.

Appliquer cette même idée à la recherche de l'équation du cylindre circonscrit aux quadriques.

14. — Que représente l'équation

$$\rho = \frac{\sin 2\omega}{\cos \omega}\ ?$$

15. — Construire la courbe qui correspond à l'équation

$$\rho = \frac{\sin 3\omega}{\cos \omega};$$

déterminer en particulier le point de cette courbe pour lequel ρ est maximum.

16. — Une conique Γ passe par l'origine tangentiellement à Oy, trouver l'équation générale des coniques qui passent par O et qui sont osculatrices à Γ; c'est-à-dire qui ont, avec Γ, quatre points communs confondus à l'origine.

QUESTION 57

Solution par M. Jérome Callé, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Grenoble.

Trouver le lieu des points de rebroussement des courbes du troisième ordre qui ont pour asymptotes trois droites données, et l'enveloppe des tangentes de rebroussement. (J. Kœhler.)

1° Prenons pour origine de coordonnées le centre du triangle, et pour axes une médiane et la parallèle au troisième côté. Soit $3d$ la longueur de la médiane.

L'équation générale d'une cubique admettant les droites $y - m(x + 2d) = 0$, $y + m(x + 2d) = 0$, $x - d = 0$ pour asymptotes, est

$$[y^2 - m^2(x + 2d)^2](x - d) + Ax + By + C = 0.$$

Transportons les axes en un point $(\alpha.\beta)$. Nous obtenons

$$[(y + \beta)^2 - m^2(x + \alpha + 2d)^2](x + \alpha - d) + Ax + By + A\alpha + B\beta + c = 0.$$

Les courbes étant du troisième ordre, pour exprimer que le point $(\alpha.\beta)$ est un point de rebroussement, il faut exprimer, et cela suffit, que le point $(\alpha.\beta)$ est un point double, et que les tangentes à la courbe en ce point se confondent.

Si $(\alpha.\beta)$ est un point double, les coefficients angulaires des tangentes en ce point sont données par l'équation

$$t^2(\alpha - d) + 2\beta t - 3\,m^2(\alpha + d) = 0. \qquad (1)$$

Le point sera de rebroussement, si

$$\beta^2 + 3m^2(\alpha^2 - d^2) = 0. \qquad (2)$$

Cette équation, étant indépendante des paramètres variables A, B, C, représente le lieu demandé. — On voit que c'est une ellipse tangente aux trois côtés du triangle en leurs milieux.

2° La tangente de rebroussement a pour équation

$$y - \beta = -\frac{\beta}{\alpha - d}(x - \alpha).$$

Posons

$$-\frac{\beta}{\alpha - d} = t.$$

Cette relation et la relation (2) nous donnent

$$\alpha = \frac{a(t^2 - 3m^2)}{3m^2 + t^2}\,; \quad \beta = \frac{6am^2t}{3m^2 + t^2}.$$

L'équation de la tangente est donc

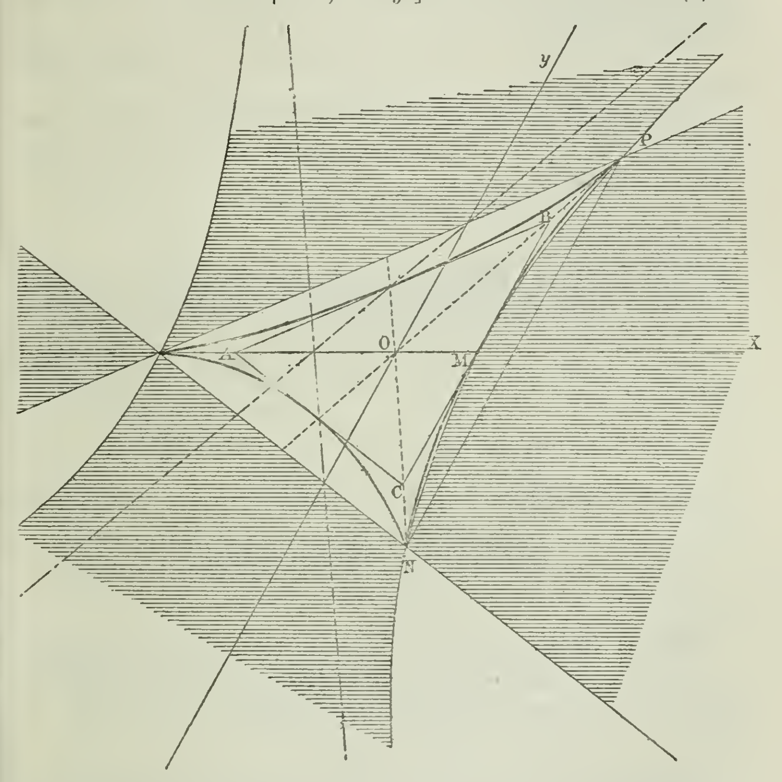
$$y(3m^2 + t^2) - 6am^2t = t[x(3m^2 + t^2) - a(t^2 - 3m^2)].$$

Pour avoir l'enveloppe de cette droite, il suffit d'exprimer que cette équation admet une racine double pour t. Si nous appliquons la formule

$$(BB' - 9AA')^2 = 4(B^2 - 3AB')(B'^2 - 3A'B),$$

qui exprime que l'équation $Ax^3 + Bx^2 + B'x + A' = 0$ a une racine double, nous trouvons pour l'enveloppe démandée

$$4m^2y^2(2x - 3d)^2 = [y^2 - 9m^2(x - d)(x + 3d)][m^2(x + 3d)^2 - y^2]. \quad (3)$$



La courbe n'admet pas d'asymptotes, car les directions asymptotiques sont données par l'équation $(l^2 + 3m^2)^2 = 0$.

Nous pouvons séparer en régions par une hyperbole et deux droites *(voir la fig.)* ; on en déduit par raison de symétrie deux autres séparations par une hyperbole et deux droites. On voit alors qu'il n'y a pas de points de la courbe en dehors du triangle formé par des arcs d'hyperbole tels que PMN ; N est un point de rebroussement ; on en conclut que les deux autres sommets du triangle formé par les droites $y = \pm m(x + 3d)$

et $x = \frac{3a}{2}$, sont aussi des points de rebroussement. Les tangentes de rebroussement sont les médianes du triangle. — La courbe est d'ailleurs tangente aux côtés du triangle donné en leurs milieux.

Cas particuliers. — Soit $2a$ la longueur du côté BC ; nous aurons $3md = a$.

Remplaçons m par sa valeur en fonction de d et de a et transportons les axes de coordonnées au point $x = d$. L'équation (1) devient

$$3d^2y^2 + a^2x(x + d) = 0,$$

et l'équation (3)

$$4a^2dy^2(2x - d)^2 = [d^2y^2 - a^2x(x + 4d)][a^2(x + 4d)^2 - 9d^2y^2]$$

Pour $d = 0$, la première équation se réduit à $x^2 = 0$,

La deuxième à $x^4 = 0$,

Pour $d = \infty$, on a pour le lieu des points de rebroussement : $y^2 = 0$

Et pour l'enveloppe : $y^2 = 0$, et $y = \pm \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

QUESTIONS PROPOSÉES

132. — On considère des paraboles P qui sont tangentes à l'origine à l'axe Ox, et dont les directrices enveloppent la parabole fixe qui correspond à l'équation

$$y^2 - 2px = 0$$

(axes rectangulaires).

Démontrer : 1° que l'équation générale des paraboles P est

$$(y - \lambda x)^2 - 2p\lambda^3 y = 0.$$

λ désignant un paramètre variable;

2° Que l'enveloppe de ces paraboles a pour équation

$$2x^3 = 27py^2,$$

3° Que le lieu des foyers est une cissoïde ;

4° On propose enfin de trouver l'enveloppe des axes des paraboles P.

Ce lieu est l'hypocycloïde à trois rebroussements.

(G. L.)

133. — Soit ABC un triangle; A′B′C′ le triangle formé par les trois tangentes en A, B, C au cercle circonscrit; O le centre du cercle inscrit; A_1, B_1, C_1 les pieds des bissectrices intérieures;

A_2 le point où la perpendiculaire à OA menée par O coupe BC
B_2 — — OB — — AC
C_2 — — OC — — AB

Appelons H_a la conique qui passe par les cinq points A′, B_1, B_2, C_1, C_2
— H_b — — — B′, C_1, C_2, A_1, A_2
— H_c — — — C′, A_1, A_2, B_1, B_2.

Ces coniques sont toujours des hyperboles; elles ont deux à deux une direction asymptotique commune parallèle à l'un des côtés du triangle A′B′C′.

En dehors des points communs qui les déterminent, et du point situé à l'infini,

H_b et H_c se coupent en A_3,
H_c et H_a — B_3,
H_a et H_b — C_3.

Démontrer que les parallèles à B′C′, A′C′, A′B′ menées respectivement par A_3, B_3, C_3 se coupent en un même point.

Énoncer les théorèmes analogues obtenus en remplaçant O par O_a, centre du cercle ex-inscrit *(Em. Lemoine.)*

134. — Soit un point O du plan du triangle ABC

L'antiparallèle à BC menée par O coupe BC en 1_1, AC en 1_2, AB en 1_3.

L'antiparallèle à CA menée par O coupe BC en 2_1, AC en 2_2, AB en 2_3,

L'antiparallèle à AB menée par O coupe BC en 3_1, AC en 3_2, AB en 3_3.

Le lieu des points O pour lesquels 1_1, 2_2, 3_3 sont en ligne droite, ou, ce qui est la même chose, pour lesquels l'hexagone $1_3 3_1 2_1 1_2 3_2 2_3$ est inscriptible à une conique, est l'hyperbole équilatère circonscrite à ABC

$$\frac{a^2(b^2-c^2)\cos A}{\alpha}+\frac{b^2(c^2-a^2)\cos B}{\beta}+\frac{c^2(a^2-b^2)\cos C}{\gamma}=0$$

(Examiner le cas du triangle rectangle, du triangle isoscèle.) Parmi ces points trouver celui pour lequel 3_2, 1_3, 2_1 sont en ligne droite ainsi que 1_2, 2_3, 3_1.

Les lieux des points pour lesquels *respectivement* 1_1, 2_3, 3_2, 2_2, 1_3, 3_1 sont en ligne droite sont les coniques

$$\frac{(c^2 - b^2)\cos A}{\alpha} - \frac{bc \cos C}{\beta} + \frac{bc \cos B}{\gamma} = 0,$$

$$\frac{ac \cos C}{\alpha} - \frac{(c^2 - a^2)\cos B}{\beta} - \frac{ac \cos A}{\gamma} = 0,$$

qui se coupent en un point pour lequel 1_2, 2_1, 3_3 sont aussi en ligne droite. (*Ém. Lemoine.*)

135. — Si l'on joint un point M quelconque d'une hyperbole équilatère aux deux extrémités A et A′ d'un diamètre, les cordes conjuguées à ce diamètre sont des antiparallèles de AA′ dans le triangle AMA′. (*Ém. Lemoine.*)

136. — Enveloppe des coniques qui ont un diamètre $AA' = 2a$ donné en grandeur et en position, et le conjugué donné en grandeur seulement. (*Ém. Lemoine.*)

137. — Au moyen de l'hexagramme de Pascal, construire le sommet d'une hyperbole, connaissant l'axe transverse, deux points et la direction d'une asymptote.

(*Ém. Lemoine.*)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER, — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE 20, PARIS. — 17348-4.

SUR

L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS

Par M. G. de Longchamps.

1. — Parmi les courbes célèbres, qui méritent ce nom par les travaux divers qu'elles ont provoqués et par les propriétés remarquables dont elles jouissent, on peut placer, au premier rang, l'hypocycloïde à trois rebroussements.

On sait que cette courbe peut être engendrée comme une roulette par un cercle roulant à l'intérieur d'un autre cercle de rayon triple; ou, encore, ayant un rayon égal aux 3/2 de celui du premier.

Elle paraît avoir été découverte par *Euler* (1). Depuis, *Steiner* (2) a donné des théorèmes intéressants sur la forme de la courbe et la longueur de ses arcs; il a également fait connaître la quadrature de son aire. M. *Schröter* (3) et après lui M. *Cremona* (4) ont repris l'étude de cette courbe que ce dernier a si justement nommée, pour exprimer l'abondance et la simplicité de ses propriétés, *la courbe merveilleuse*. Plus récemment, M. *Painvin* (5) a présenté une étude analytique de cette courbe sur laquelle M. *Laguerre* (6) a fait connaître vers la même époque quelques propriétés intéressantes et qui n'avaient pas encore été vues. Enfin, nous devons signaler ici ce fait que l'hypocycloïde à trois rebroussements fait partie de la famille que M. *de la Gournerie* (7)

(1) Euler. De duplici genesi epicycloïdum quam hypocycloïdum (année 1781) — Actes de l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg.

(2) Steiner. *Journal de Crelle* (t. LIII, p. 231).

(3) Schröter. *Journal de Crelle* (t. LIV, p. 31).

(4) Cremona. *Journal de Crelle* (années 1863, 1864 et 1865).

(5) *Nouvelles Annales*, 1870. — 2e série ; t. IX, p. 202 et 256.

(6) Cours de la salle Gerson, 1870. — *Nouvelles Annales*, 1870; lettre à M. Bourget.

(7) Jules de la Gournerie. *Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques* (Gauthier-Villars, 1867).

a particulièrement étudiée dans ses recherches sur les courbes triangulaires symétriques.

L'équation de cette courbe est assez compliquée, soit dans le système cartésien, soit dans le système des coordonnées polaires, et elle ne prend une forme simple que dans le système, peu employé dans nos cours de Mathématiques spéciales, des coordonnées trilinéaires, quand on adopte pour triangle de référence celui dont les sommets coïncident avec les points de rebroussement. Ceci explique peut-être pourquoi cette courbe est moins connue que plusieurs autres qui n'offrent pas, à beaucoup près, le même intérêt.

Mais on peut éviter, dans l'étude de l'hypocycloïde à trois rebroussements, l'emploi des coordonnées trilinéaires en remarquant que cette courbe étant du quatrième ordre et possédant trois points doubles, est du genre zéro. En un mot, elle est *unicursale*. C'est sous ce point de vue que nous considérons l'hypocycloïde à trois rebroussements, dans l'étude qui suit.

2. — Prenons les formules :

$$\frac{x}{R} = \frac{t^2(3 + t^2)}{(1 + t^2)^2}, \qquad \text{(A)}$$

$$\frac{y}{R} = \frac{2t^3}{(1 + t^2)^2}. \qquad \text{(B)}$$

Elles définissent une courbe et nous ferons voir tout à l'heure, en la construisant, que cette courbe n'est autre chose que celle qui a été étudiée dans les mémoires que nous avons cités. Nous convenons, pour abréger le langage, de la désigner dans les développements qui suivent par la lettre **C**. Il serait, croyons-nous, de peu d'intérêt d'expliquer ici comment nous sommes arrivés à ces formules; on peut y aboutir par des voies diverses, mais nous les prenons simplement comme définissant une courbe **C** dont nous nous proposons l'étude.

3. Construction de la courbe. — La formule (A) prouve que l'on a toujours $x > 0$; de plus, en observant que

$$-\frac{x}{R} + \frac{9}{8} = \frac{(t^2 - 3)^2}{(t^2 + 1)^2},$$

on voit que la courbe **C** est comprise tout entière entre l'axe yy' et la droite Δ qui correspond à l'équation

$$x = \frac{9}{8}R.$$

Cherchons maintenant les points communs à **C** et à une droite passant par l'origine. L'équation de cette droite étant

$$y - mx = 0,$$

nous trouvons, pour déterminer m, l'égalité

$$mt^2 - 2t + 3m = 0.$$

Pour que cette équation ait ses racines réelles, il faut que l'on ait

$$m^2 < \frac{1}{3},$$

et si, par l'origine, on trace, comme l'indique la figure, deux droites Δ', Δ'', inclinées de 30° sur l'axe ox, elles forment avec Δ un triangle équilatéral dans l'intérieur duquel la courbe **C** est complètement renfermée.

Sans insister autrement sur cette construction, nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la courbe **C** qui correspond aux formules (A) et (B) a la forme générale indiquée par la figure ci-dessous.

Les trois sommets O, O', O'', du triangle équilatéral $\Delta\,\Delta'\,\Delta''$. sont les trois points de rebroussement de la courbe et les tangentes en ces points sont les médianes de ce triangle. Les sommets de **C** sont trois points situés sur ces droites et huit fois plus rapprochés de la base du triangle que du sommet correspondant.

4. Interprétation du coefficient t. — Nous ferons observer, avant d'aller plus loin, que *le paramètre arbitraire* t *représente le coefficient angulaire de la tangente au point correspondant.*

On trouve, en effet, par un calcul évident,

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{dx}{dt} = 2t \; \frac{3 - t^2}{(1 + t^2)^3},$$

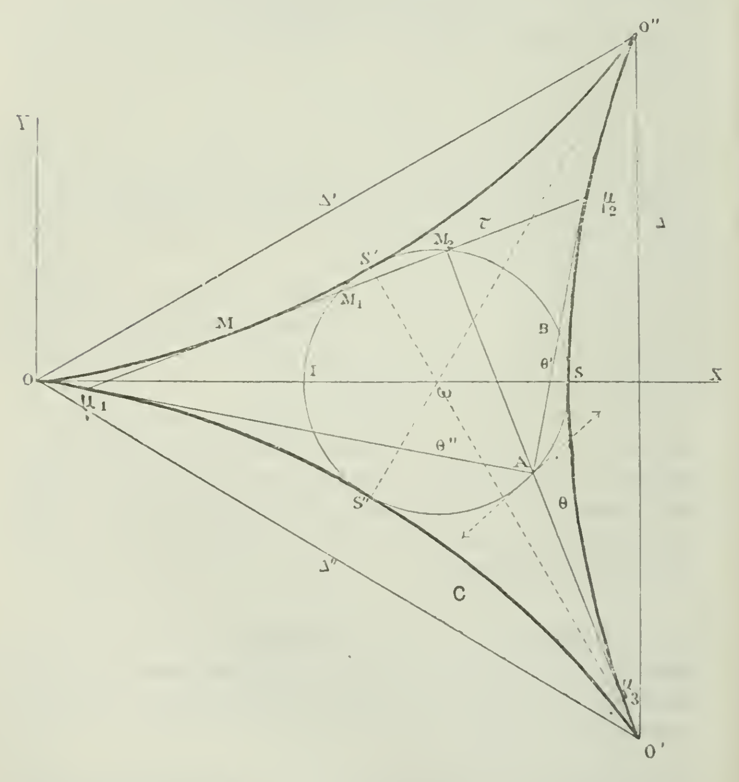
$$\frac{1}{R} \cdot \frac{dy}{dt} = 2t^2 \frac{3 - t^2}{(1 + t^2)^3};$$

on a donc

$$\frac{dy}{dx} = t.$$

5. Equation générale des tangentes à la courbe C. — Cherchons maintenant l'équation générale des tangentes à la courbe **C**.

Soit t le paramètre d'un point M pris sur **C** ; l'équation



d'une droite parallèle à la tangente en ce point peut toujours être représentée par

$$y - tx + KRt^3 = 0\,;$$

proposons-nous de déterminer K, en exprimant que cette équation est vérifiée par les coordonnées du point M. Nous

avons d'abord

$$\frac{2t^3}{(1+t^2)^2} - \frac{t^3(3+t^2)}{(1+t^2)^2} + Kt^3 = 0\ ;$$

puis, après simplification,

$$K = \frac{1}{1+t^2}.$$

L'équation générale que nous cherchons est donc

$$y - tx + R\frac{t^3}{1+t^2} = 0 \text{ (1)}. \qquad \text{(T)}$$

Il résulte de cette équation, entre autres conséquences, que *la courbe* **C** *est de la troisième classe*, propriété que nous vérifions par ce calcul, mais qui, comme on le sait, est commune à toutes les quartiques possédant trois points de rebroussement.

Voici maintenant quelques propriétés de la courbe **C** qui découlent très simplement des calculs précédents.

6. Théorème I. — *Le lieu des points d'où l'on peut mener, à la courbe* C, *deux tangentes rectangulaires est le cercle inscrit aux trois arcs.*

La relation (T) peut s'écrire

$$t^3(R - x) + t^2y - tx + y = 0.$$

Le produit des racines de cette équation est

$$\frac{y}{x - R},$$

et si le point dont les coordonnées sont x, y, jouit de la propriété énoncée, la quantité

$$\frac{y}{R - x},$$

est une des racines de l'équation précédente. L'équation du lieu cherché est donc,

$$\frac{y^2}{(R-x)^2} + \frac{y^2}{(R-x)^2} - \frac{x}{R-x} + 1 + 0$$

ou,

$$2y^2 - x(R - x) + (R - x)^2 = 0.$$

---

(1) Cette équation met en évidence immédiate le théorème suivant énoncé par M. Laguerre (*loc. cit.*) : *Les trois tangentes que, par un point, on peut mener à l'hypocycloïde, font, avec une quelconque des tangentes de rebroussement, des angles dont la somme est un multiple de* π.

Cette équation représente bien le cercle δ, inscrit à la courbe, et passant, comme le montre la figure, par ses trois sommets S, S′, S″.

7. Théorème II. — *Si l'on mène à la courbe* **C** *une tangente* T, *elle rencontre* **C** (abstraction faite du point de contact M) *en deux points* μ_1, μ_2 ; *les tangentes en ces points sont rectangulaires.*

Soit t' le paramètre de M, la droite T a pour équation

$$y - t'x + \mathrm{R}\frac{t'^3}{1 + t'^2} = 0. \qquad (\delta)$$

Cherchons l'intersection de T avec C et, à cet effet, considérons l'équation

$$\frac{2t^3}{(1 + t^2)^2} - \frac{t't^2(3 + t^2)}{(1 + t^2)^2} + \frac{t'^3}{1 + t'^2} = 0,$$

laquelle, après développement, devient

$$t^4t' - 2t^3(1 + t'^2) + t^2t'(3 + t'^2) - t'^3 = 0.$$

Cette dernière égalité peut s'écrire encore

$$(t - t')^2(t^2t' - 2t - t') = 0.$$

Les paramètres t'', t''', qui correspondent aux points μ_1, μ_2, sont donc les racines de l'équation

$$t^2t' - 2t - t' = 0.$$

On déduit de là

$$t''t''' = -1,$$

et, en rappelant l'interprétation géométrique des coefficients t'' et t''', on voit que les tangentes menées à la courbe **C** aux points μ_1 et μ_2 sont rectangulaires.

8. Théorème III. — *La longueur de la tangente interceptée par la courbe est constante et égale à* R.

Désignons par x'', y'', les coordonnées de μ_1, par x''', y''' celles de μ_2, nous avons

$$(x'' - x''')^2 + (y'' - y''')^2 = \overline{\mu_1\mu_2}^2.$$

Calculons d'abord les différences $(x'' - x''')$ et $(y'' - y''')$. Nous avons

$$\frac{x'' - x'''}{\mathrm{R}} = \frac{t''^2(3 + t''^2)}{(1 + t''^2)^2} - \frac{t'''^2(3 + t'''^2)}{(1 + t'''^2)^2}.$$

En tenant compte de la relation

$$t''t''' = -1,$$

il vient

$$\frac{x'' - x'''}{R} = \frac{t''^2(3 + t''^2)}{(1 + t''^2)^2} - \frac{3t''^2 + 1}{(1 + t''^2)^2},$$

ou, encore,

$$\frac{x'' - x'''}{R} = \frac{t''^2 - 1}{t''^2 + 1}.$$

Un calcul analogue donne

$$\frac{y'' - y'''}{R} = \frac{2t''}{t''^2 + 1}.$$

Ces deux dernières égalités prouvent que

$$(x'' - x''')^2 + (y'' - y''')^2 = R^2,$$

et l'on a, finalement,

$$\mu_1\mu_2 = R.$$

Ce théorème remarquable est dû à M. Cremona *(loc. cit.)*.

9. Formules principales. — Les calculs qui précèdent suffisent pour montrer comment on peut très simplement déduire, des formules qui nous ont servi à définir **C**, les propriétés de cette courbe. Pour abréger, nous nous bornerons à énoncer quelques résultats que nous laissons au lecteur le soin de vérifier.

Les notations suivantes étant adoptées :

τ, coefficient angulaire d'une tangente quelconque $\mu_1\mu_2$;

α, β, coordonnées du point A, point de concours des tangentes en μ_1 et en μ_2;

θ', θ'', coefficients angulaires des deux tangentes rectangulaires issues de A;

θ, coefficient angulaire de la troisième tangente issue de A, on a les relations suivantes

1° $$\frac{\alpha}{R} = \frac{1 + \tau^2}{2(1 + \tau^2)}, \qquad \frac{\beta}{R} = -\frac{\tau}{2(1 + \tau^2)};$$

2° $$T^2 - \frac{2T}{\tau} - 1 = 0,$$

a pour racines θ', θ'';

3° $$\theta = \frac{\beta}{R - \alpha};$$

4°
$$\tau = \frac{\alpha - R}{\beta}.$$

De ces formules, et de considérations géométriques élémentaires, découlent des conséquences nombreuses; nous signalerons les plus saillantes, mais sans nous arrêter à les démontrer.

Pour rendre ce tableau plus complet, nous avons énoncé de nouveau les propriétés que nous avons établies plus haut.

10. Propriétés élémentaires principales de l'hypocycloïde. — 1° $\mu_1\mu_2$ est constant;

2° Les tangentes μ_1A, μ_2A, sont rectangulaires;

3° Elles se coupent sur le cercle inscrit;

4° La tangente $A\mu_3$ est perpendiculaire sur $\mu_1\mu_2$ au point M_2 qui appartient au cercle inscrit;

5° Les tangentes $A\mu_1$, $A\mu_1$ sont les bissectrices de l'angle formé par la troisième tangente $A\mu_3$ et par la tangente en A au cercle inscrit;

6° SA est le double de SB; SM_2 le double de SA; réciproquement une corde AB d'un cercle qui se meut de telle façon que l'on ait constamment $SA = 2SB$, engendre une hypocycloïde.

7° On a
$$MM_1 = M_1M_2,$$
et
$$M\mu_1 = M_2\mu_2.$$

11. Cercle de courbure en un point de l'hypocycloïde. — Sans étendre davantage cette nomenclature qui peut être très longue, comme on peut s'en assurer en se reportant aux mémoires cités, nous nous arrêterons sur cette propriété pour montrer comment elle peut servir à construire le cercle de courbure en un point pris sur **C**. C'est cette construction que nous avons annoncée (1) et qui repose sur la considération des propriétés des transversales réciproques, exposées précédemment.

Prenons sur **C** deux points voisins I, J, et soient IAB, JCD, les tangentes correspondantes qui coupent le cercle inscrit à l'hypocycloïde, respectivement, aux points A, B; C, D.

---

(1) V. *Journal*, p. 152.

Nous avons donc

$$IA = AB, \quad \text{et} \quad JC = CD.$$

Soit R le point de rencontre des deux tangentes considérées; prenons, comme l'indique la figure,

$$BR' = RI, \qquad DR'' = RJ,$$

nous formons ainsi un triangle RR'R'' dans lequel les droites IJ et BD sont deux transversales réciproques, et nous savons *(Journal, loc. cit.)* que l'axe de la parabole P, tangente à IJ, et inscrite au triangle RR'R'', est parallèle à BD.

Cette propriété étant rappelée, imaginons que le point I se déplace sur l'hypocycloïde et qu'il vienne se confondre avec J. A chaque position du point I correspond une parabole P, définie comme nous venons de le dire, et nous allons chercher ce que devient, à la limite, le foyer f de cette courbe, point qui a été déterminé, comme l'indique la figure, en s'appuyant sur les deux propositions suivantes : 1° il appartient au cercle U circonscrit au triangle JRI; 2° après avoir tracé, par le point R, une droite RK parallèle à BD, on mène Rf symétrique de RK, par rapport à la bissectrice de l'angle JRI.

Supposons donc que le point I soit venu se confondre avec J; la droite R'R'' qui est toujours parallèle à AC, puisque les points A, C, sont les milieux des côtés RR', RR'', a pour position limite la droite DR''' menée par D, parallèlement à la tangente CA'. D'autre part, le cercle RR'R'', cercle qui passe par le point f, devient le cercle V, cercle qui passe par J et par D, tangentiellement à DR'''. Enfin la droite Rf a pour position limite la droite JF, droite menée par J, parallèlement à CA'.

Ainsi le point f a une position limite F, bien déterminée; cherchons maintenant ce qu'est devenu le cercle RIJ, cercle qui passe constamment par le point de concours des normales en I et en J, et par le foyer f. Sur la figure 3, la limite de U serait un cercle U' passant par J, tangentiellement à la droite JCD, et par F. Le centre O de U' s'obtiendra donc en élevant OJ perpendiculaire à CD et en abaissant du point D une perpendiculaire sur JF. Le point de con-

cours des deux normales infiniment voisines s'obtiendra donc en prenant le point symétrique de J, par rapport au point O, et l'on peut dire, finalement, que le rayon de courbure au point J est égal au double de OJ.

On voit d'ailleurs que $OJ \doteq 4\omega H$ et l'on peut énoncer le théorème suivant, que nous croyons nouveau.

Théorème. — *Le rayon de courbure en un point* J, *pris sur l'hypocycloïde, est égal à huit fois la distance du centre du cercle inscrit à la courbe, à la tangente au point considéré.*

NOTES SUR L'ELLIPSOÏDE

Par M. **Édouard Lucas.**

Théorème I. — *Si trois points d'une droite demeurent sur les faces d'un trièdre, un quatrième point de la droite décrit un ellipsoïde.* (Dupin)

Prenons les trois plans pour plans de coordonnées; soient A, B, C les points qui demeurent respectivement dans les plans des YZ, des ZX, des XY; désignons par a, b, c les distances de ces points au quatrième point M de coordonnées x, y, z. Les équations de la droite mobile sont

$$\frac{X - x}{\alpha} = \frac{Y - y}{\beta} = \frac{Z - z}{\gamma} = \rho,$$

α, β, γ, désignant les coordonnées d'un point N situé sur une parallèle ON à MA menée par l'origine O, et à une distance de l'origine égale à l'unité, et ρ désignant la distance du point de coordonnées X, Y, Z, au point M. Si l'on exprime que les points A, B, C, sont sur cette droite, on trouve

$$-x = a\alpha, \quad -y = b\beta, \quad -z = c\gamma. \qquad (1)$$

On a d'ailleurs

$$\overline{ON}^2 = 1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \cos(y, z) + 2\gamma\alpha \cos(z, x) + 2\alpha\beta \cos(x, y);$$

et en tirant α, β, γ des équations précédentes, on obtient

pour l'équation du lieu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\frac{yz}{bc}\cos(y.\ z)$$
$$+ 2\frac{zx}{ca}\cos(y,\ z) + 2\frac{xy}{ab}\cos(x,\ y) = 1.$$

Théorème II. — *Le volume de l'ellipsoïde considéré dans le théorème* Ier *est indépendant des angles du trièdre.* (Ed. Lucas.)

En effet, le discriminant du premier membre de l'équation précédente est

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & \frac{\cos(y,z)}{ab} & \frac{\cos(z,x)}{ac} \\ \frac{\cos(y,z)}{ab} & \frac{1}{b^2} & \frac{\cos(x,y)}{bc} \\ \frac{\cos(z,x)}{ac} & \frac{\cos(x,y)}{bc} & \frac{1}{c^2} \end{vmatrix}$$

ou, par une transformation immédiate,

$$\delta = \frac{1}{a^2b^2c^2}\sin^2(x,y,z).$$

On calcule de même Δ et en portant dans l'expression bien connue du volume de l'ellipsoïde, on trouve tout de suite

$$V = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Théorème III. — *Si quatre points d'une droite demeurent sur les faces d'un tétraèdre, un point quelconque de la droite décrit une ellipse: et la droite reste parallèle aux génératrices d'un cône de révolution.* (Mannheim.)

En effet, désignons par

$$\frac{X}{a_1} + \frac{Y}{b_1} + \frac{Z}{c_1} = 1,$$

l'équation du quatrième plan, et par d la distance du quatrième point qui demeure dans ce quatrième plan au point M. Les coordonnées de ce point sont $x + d\alpha$, $y + d\beta$, $z + d\gamma$; on a donc

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} + \frac{z}{c_1} - 1 + d\left(\frac{\alpha}{a_1} + \frac{\beta}{b_1} + \frac{\gamma}{c_1}\right) = 0.$$

Si l'on élimine α, β, γ, entre cette équation et les équations (1) on trouve

$$(a-d)\frac{x}{aa_1} + (b-d)\frac{y}{bb_1} + (c-d)\frac{z}{cc_1} = 1; \qquad (2)$$

donc le point M décrit la courbe d'intersection de l'ellipsoïde avec le plan représenté par l'équation précédente. D'autre part, si l'on élimine x, y, z, entre les mêmes équations, on trouve

$$(a-d)\frac{\alpha}{a_1} + (b-d)\frac{\beta}{b_1} + (c-d)\frac{\gamma}{c_1} + 1 = 0; \qquad (3)$$

donc le point N situé à l'unité de distance de l'origine décrit l'intersection d'une sphère et du plan déterminé par l'équation précédente, et la droite ON est la génératrice d'un cône de révolution.

Théorème IV. — *Lorsque quatre points d'une droite demeurent sur quatre plans, tous les points de la droite décrivent des ellipses dont les centres sont en ligne droite.*

(Halphen.)

En effet, le diamètre conjugué du plan (2) a pour équations

$$\begin{aligned}
\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\cos(x,y) + \frac{z}{c}\cos(x,z) &= \frac{a-d}{a_1}\lambda,\\
\frac{x}{a}\cos(x,y) + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\cos(y,z) &= \frac{b-d}{b_1}\lambda.\\
\frac{x}{a}\cos(x,z) + \frac{y}{b}\cos(y,z) + \frac{z}{c} &= \frac{c-d}{c_1}\lambda.
\end{aligned}$$

Si l'on ajoute ces équations après les avoir respectivement multipliées par $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$, en tenant compte de l'équation (2), on trouve

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\frac{yz}{bc}\cos(y,z) + \ldots = \lambda.$$

L'ellipse décrite par le point M est réelle, puisque $\lambda < 1$; on a $\lambda = 1$, lorsque l'ellipse se réduit à un point.

Si l'on élimine $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$, entre les équations du diamè-

tre et l'équation (1), on détermine λ par l'équation

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(x,y) & \cos(x,z) & \dfrac{a-d}{a_1} \\ \cos(x,y) & 1 & \cos(y,z) & \dfrac{b-d}{b_1} \\ \cos(x,z) & \cos(y,z) & 1 & \dfrac{c-d}{c_1} \\ \dfrac{a-d}{a_1} & \dfrac{b-d}{b_1} & \dfrac{c-d}{c_1} & \dfrac{1}{\lambda} \end{vmatrix} = 0.$$

Pour obtenir le lieu des centres des ellipses, il faut d'abord remplacer a, b, c, d, par $a + \mu$, $b + \mu$, $c + \mu$, $d + \mu$, et éliminer μ. On observe d'abord que la valeur de λ ne change pas; d'ailleurs on tire des équations du diamètre les formules

$$\frac{x}{a+\mu} = P, \quad \frac{y}{b+\mu} = Q, \quad \frac{z}{c+\mu} = R,$$

P, Q, R désignant des constantes; donc le lieu des centres est donné par les équations

$$\frac{x - aP}{P} = \frac{y - bQ}{Q} = \frac{z - cR}{R},$$

qui représentent une ligne droite.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer les propositions suivantes.

Théorème V. — *Lorsque quatre points d'une droite demeurent sur quatre plans, de telle sorte que la droite se trouve immobilisée, les normales menées aux quatre plans par les traces de la droite sont les génératrices d'un hyperboloïde.*

(Halphen.)

Théorème VI. — *Une droite se déplace de telle sorte que quatre de ses points demeurent dans quatre plans; si l'on mène par la droite un plan parallèle à l'axe du cône de révolution* (Th. III), *tout point de ce plan décrit une ellipse.*

(Mannheim.)

Théorème VII. — *Lorsque les extrémités d'une droite de longueur constante glissent sur deux droites de l'espace, cette*

droite engendre une surface du quatrième ordre; démontrer que le volume compris entre cette surface et deux plans fixes parallèles aux deux droites ne varie pas lorsque les deux directrices se déplacent d'une manière quelconque dans deux plans parallèles aux deux plans donnés. (Ed. Lucas.)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1884)

(*Suite*, voir p. 161.)

17. — Reconnaître que la formule

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

est homogène.

18. — On considère la droite Δ qui est représentée par les équations

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q\ ;$$

trouver les conditions que doivent vérifier les coefficients a, b, p, q, pour que Δ ait, avec les axes supposés rectangulaires, des plus courtes distances respectivement égales α, β, γ.

19. — Construire la courbe représentée par les équations

$$x = \frac{\sin t}{1 - t},\ y = \frac{\cos t}{1 - t}.$$

20. — Trouver les dérivées des fonctions suivantes

$$y = \text{LLL}x. \quad y = \text{arc sin}\,(x - \sqrt{1 - x^2})$$

$$y = x^{x^x}, \quad y = \text{L}\,(x + \sqrt{1 + x^2})$$

$$y = \text{arc sin}\, x + \text{arc tg}\,\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

$$y = (\sin x + \cos x)\, e^x.$$

21. — Si deux hyperboloïdes réglés ont deux généra-

trices communes, leur intersection se compose de quatre droites (Théorème de Steiner).

22. — Démontrer que si l'on considère la fraction continue y,

$$y = \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{1}}}} \quad \cdots \quad 1 - \cfrac{x}{1 - x}$$

et si l'on met y sous la forme

$$y = \frac{u_n}{v_n},$$

(u_n et v_n étant des fonctions entières de x), l'équation $v_n = 0$, a toutes ses racines réelles.

23. — On donne une ellipse U de centre O; démontrer qu'il existe une infinité de quadriques de révolution passant par U et ayant pour centre le point O.

Trouver le lieu décrit par les sommets de ces quadriques, sommets correspondant à l'axe autour duquel la quadrique considérée est de révolution.

24. — Reconnaître (sans expliciter les formes) que si f et φ désignent deux formes entières du troisième degré de la lettre x, on a

$$f\varphi''' - f'\varphi'' + f''\varphi' - f'''\varphi = \textit{constante}.$$

Nota. — On prend la dérivée de l'expression

$$(f\varphi''' - f'''\varphi) - (f'\varphi'' - f''\varphi'),$$

et l'on vérifie qu'elle est nulle.

25. — Lieu des milieux et lieu des pôles d'une corde normale à une conique.

26. — Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point M à un réseau de coniques inscrites dans un parallélogramme donné.

Examiner le cas où le point M s'éloigne à l'infini, dans une direction donnée.

27. — Déterminer K de façon que l'équation

$$x^5 + 2x^3 + x + K = 0.$$

ait une racine double.

28. — En s'appuyant sur l'inégalité

$$x - \sin x < \frac{x^3}{6}$$

donner une valeur approchée de sin 1°.

29. — Construire la courbe qui correspond à l'équation

$$y = x + \frac{1}{x - 1} + \frac{\sin x}{x}.$$

30. — On donne une droite et deux points A et B situés de part et d'autre de la droite. Faire passer par A et B un cercle qui intercepte sur la droite un segment minimum (*).

31. — Soient M et P deux points pris sur une hyperbole H ; par M et P on mène des parallèles aux asymptotes de H et l'on forme ainsi un parallélogramme MPQR. Démontrer que QR passe par le centre de H.

32. — Construire les courbes qui correspondent aux équations

1° $$x = \frac{1 + t}{t^2}, \quad y = \frac{1 - t}{t};$$

2° $$\rho = \frac{\sin \varphi}{1 - 2\cos^2 \varphi};$$

3° $$\rho = \frac{1 - \sin \omega}{1 + 2\cos \omega};$$

(*) Cette question et les deux suivantes ont été empruntées au *Recueil de questions posées aux examens oraux de l'École polytechnique.* (Croville-Morant, rue de la Sorbonne.)

4° $y^2 - xy + x^3 = 0$;

5° $xy^3 - 3x^2y + a^2 = 0$;

6° $\rho = \dfrac{\sin 3\omega}{\cos \omega}$;

7° $\{y(1 - x) - x^2\}^3 = x^7$;

étudier cette courbe à l'origine ; trouver le maximum de y.

SUR LA DÉCOMPOSITION

DES POLYNOMES HOMOGÈNES DU SECOND DEGRÉ EN SOMMES DE CARRÉS

Par M. **Kœhler.**

Je me propose d'étudier les conditions auxquelles doit satisfaire un polynôme homogène du second degré à n variables pour qu'il soit décomposable en p carrés, p étant plus petit que n ; j'étudierai spécialement le polynôme à quatre variables.

Il est nécessaire d'établir d'abord deux propriétés des déterminants sur lesquelles j'aurai à m'appuyer plus loin.

1. — Soient

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

un déterminant quelconque et

$$\Delta = D^2 = \begin{vmatrix} \Sigma a_{1j}^2 & \Sigma a_{1j}a_{2k} & \dots & \Sigma a_{1j}a_{nk} \\ \Sigma a_{1j}a_{2k} & \Sigma a_{2j}^2 & \dots & \Sigma a_{2j}a_{nk} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma a_{1j}a_{nk} & \Sigma a_{2j}a_{nk} & \dots & \Sigma a_{nj}^2 \end{vmatrix}$$

son carré développé ; un quelconque des mineurs principaux de Δ, à p^2 éléments, est égal à la somme des carrés des mineurs que l'on peut former avec les éléments de p lignes

de D qui correspondent à celles du mineur principal considéré.

Je prends le mineur principal de Δ qui occupe l'angle supérieur de gauche, savoir

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n}^2 & a_{11}\,a_{21}+\cdots+a_{1n}\,a_{2n} & \cdots a_{11}\,a_{p1}+\cdots+a_{1n}\,a_{pn} \\ a_{11}\,a_2+\cdots+a_{1n}\,a_{2n} & a_{21}^2+a_{22}^2+\cdots+a_{2n}^2 & \cdots a_{21}\,a_{p1}+\cdots+a_{2n}\,a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1}\,a_{11}+\cdots+a_{pn}\,a_{1n} & a_{p1}\,a_{21}+\cdots+a_{pn}\,a_2 & \cdots a_{p1}^2+a_{p2}^2+\cdots+a_{pn}^2 \end{vmatrix}$$

Il est la somme de n^p déterminants partiels δ_p, car chacun de ses éléments est une somme de n termes, et il y a p lignes et p colonnes, par suite autant de déterminants partiels qu'il y a d'arrangements complets de n lettres p à p. Une colonne quelconque d'un de ces δ_p n'est autre chose qu'une colonne d'un des mineurs d_p de D pris dans les p premières lignes, tous les éléments étant multipliés par un facteur. Cela posé, les δ_p se partagent en deux classes. D'abord tous ceux qui renferment deux ou plusieurs colonnes égales, abstraction faite des facteurs qui les multiplient, sont identiquement nuls.

Nous avons ensuite des déterminants δ_p composés des mêmes colonnes que les d_p, toujours abstraction faite des facteurs; chacun des d_p fournit $1.2.3\ldots p$ déterminants de cette espèce. En effet, soit par exemple le mineur

$$d_p = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{vmatrix}$$

La forme générale des δ_p qui lui correspondent est

$$\begin{vmatrix} a_{1\alpha}^2 & a_{1\beta}a_{2\beta} & \cdots & a_{1\lambda}a_{p\lambda} \\ a_{1\alpha}a_{2\alpha} & a_{2\beta}^2 & \cdots & a_{2\lambda}a_{p\lambda} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1\alpha}a_{p\alpha} & a_{2\beta}a_{p\beta} & \cdots & a_{p\lambda}^2 \end{vmatrix} = a_{1\alpha}a_{2\beta}\cdots a_{p\lambda} \begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & \cdots & a_{1\lambda} \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} & \cdots & a_{2\lambda} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p\alpha} & a_{p\beta} & \cdots & a_{p\lambda} \end{vmatrix}$$

les indices $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ ayant toutes les valeurs $1, 2, 3 \ldots p$. Le nombre des δ_p de cette espèce est égal au nombre des permutations de p lettres, puisqu'on peut former chacune des colonnes avec des éléments pris dans chacune des p colonnes

de Δ_p. Mais l'un quelconque de ces $1.2.3\ldots p$ déterminants n'est autre chose que d_p dont les colonnes ont été déplacées, et le facteur $a_{1\alpha}\, a_{2\beta} \ldots a_{p\lambda}$ est un des termes de d_p. Ce terme est d'ailleurs multiplié par d_p pris avec le signe dont est affecté le terme lui-même dans le développement de d_p. Car le nombre des permutations nécessaires pour passer de d_p à δ_p est évidemment égal au nombre des inversions qui font passer du terme principal $a_{11}, a_{22} \ldots a_{pp}$ au terme $a_{1\alpha}, a_{2\beta} \ldots a_{p\lambda}$.

On conclut de là que la somme des $1 . 2 . 3 \ldots p$ déterminants δ_p qui renferment les colonnes de d_p permutées de toutes les manières possibles est égal à d_p^2.

De même tous les autres mineurs analogues à d_p que l'on peut obtenir en prenant p colonnes dans les p premières lignes de D se retrouvent au carré dans le développement Δ_p.

Le même raisonnement s'applique à l'un quelconque des mineurs principaux de Δ.

2. — Soient D un déterminant quelconque, D_{pr} le mineur du premier ordre relatif à l'élément a_{pr} . d_{pr}^{qs} le mineur du second ordre obtenu en supprimant les lignes et colonnes où se trouvent les éléments a_{pr}, a_{qs} : on aura la relation

$$D_{pr}D_{qs} - D_{ps}D_{qr} = D \,.\, d_{pr}^{qs}.$$

Un mineur quelconque D_{ik} peut s'écrire

$$D_{ik} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,k-1} & 0 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,k-1} & 0 & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \ldots & a_{i-1,k-1} & 0 & a_{i-1,k+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \ldots & a_{i+1,k-1} & 0 & a_{i+1,k+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,k-1} & 0 & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

En le développant suivant les éléments de la j^{me} ligne, on aura

$$D_{ik} = a_{j,1}d_{ik}^{j1} + a_{j2}d_{ik}^{j2} + \ldots + a_{j,k-1}\, d_{ik}^{j,k-1} + a_{jk}d_{ik}^{jk} + a_{j,k+1}\, d_{ik}^{j,k+1} + \ldots\, a_{jn}d_{ik}^{jn}. \qquad (1)$$

Le terme $a_{jk}d_{ik}^{jk}$ s'annule, car le mineur d_{ik}^{jk} a une ligne composée d'éléments nuls ; je l'écris seulement pour la symétrie.

On a aussi

$$0 = a_{j1}d_{ik}^{l1} + a_{j2}d_{ik}^{l2} + \ldots + a_{jn}d_{ik}^{jn}, \qquad (2)$$

car c'est le développement de D_{ik} dans lequel les lignes d'ordre j et l seraient égales.

Enfin, on a également

$$-D_{ik} = a_{j1}d_{il}^{jk} + a_{j2}d_{i2}^{jk} + \ldots + a_{jn}d_{in}^{jk}. \qquad (3)$$

En effet $d_{ik}^{jl} = -d_{il}^{jk}$, car le premier de ces deux mineurs du second ordre se déduit de D en effaçant les lignes i et j, les colonnes k et l; le second se déduit de D de la même manière, mais après la permutation des colonnes k et l. Le développement qui constitue le second membre de (3) est donc bien $-D_{ik}$.

Cela posé, écrivons les identités

$$a_{11}D_{1s} + a_{21}D_{2s} + \ldots + a_{n1}D_{ns} = 0$$
$$a_{12}D_{1s} + a_{22}D^{2s} + \ldots + a_{n2}D_{ns} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1s}D_{1s} + a_{2s}D_{2s} + \ldots + a_{ns}D_{ns} = D$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1n}D_{1s} + a_{2n}D_{2s} + \ldots + a_{nn}D_{ns} = 0$$

En multipliant la première par d_{pr}^{q1}, la deuxième par ${}_{pr}^{q2}$, etc., on voit que le coefficient de D_{qs} sera D_{pr} d'après la formule (1), que le coefficient de D_{ps} sera $-D_{qr}$ d'après la formule (3), tous les autres coefficients seront nuls [formule (2)]. Donc il reste

$$D_{pr}D_{qs} - D_{ps}D_{qr} = Dd_{pr}^{q}. \qquad (4)$$

Lorsque le déterminant D est symétrique ($a_{ik} = a_{ki}$), on aura $D_{ik} = D_{ki}$; si dans l'égalité précédente on suppose $r = p$, $s = q$, elle devient

$$D_{pp}D_{qq} - (D_{pq})^2 = D.\, d_{pp}^{qq}. \qquad (5)$$

Théorème. — *Lorsque le déterminant de* n *fonctions linéaires à* n *variables est nul ainsi que tous ses mineurs jusqu'à l'ordre* n — p *inclusivement, il existe entre ces fonctions* n — p + 1 *relations linéaires.*

Soient les n fonctions :

$$P_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$$
$$P_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P = a_{n1}x_1 + a^{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n$$

Je suppose que le déterminant D des coefficients soit nul. ainsi que tous ses mineurs jusqu'à ceux de l'ordre $n-p$ (à p^2 élements), et que l'un au moins des mineurs de l'ordre $n-p+1$ soit différent de zéro, par exemple

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,p-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p-1,1} & a_{p-1,2} & \dots & a_{p-1,p-1} \end{vmatrix} = d$$

Je considère le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,p-1} & a_{1,p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,p-1} & a_{2,p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p-1,1} & a_{p-1,2} & \dots & a_{p-1,p-1} & a_{p-1,p} \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{p,p-1} & a_{pp} \end{vmatrix}$$

qui est nul d'après les hypothèses; je désigne par δ_{1p}, δ_{2p}, ... δ_{pp} les mineurs de δ relatifs aux éléments de la dernière colonne, et je multiplie les p premières équations par δ_{1p}, δ_{2p}, ... δ_{pp}; il vient

$$\begin{aligned} &P_1\delta_{1p} + P_2\delta_{2p} + \dots + P_{p-1}\delta_{p-1,p} + P_p\delta_{pp} \\ &= x_1(a_{11}\delta_{1p} + a_{21}\delta_{2p} + \dots) + x_2(a_{12}\delta_{1p} + a_{22}\delta_{2p} + \dots) + \dots \\ &+ x_p(a_{1p}\delta_{1p} + a_{2p}\delta_{2p} + \dots) + \dots + x_n(a_{1n}\delta_{1p} + a_{2n}\delta_{2p} + \dots) \end{aligned}$$

Les coefficients de $x_1, x_2, \dots x_n$ sont identiquement nuls; ceux de x_1, x_2 ... x_{p-1} ne sont autre chose que δ dans lequel on a rendu deux colonnes égales; celui de x_p est δ lui-même; ceux de x_{p+1}, x_{p+2}, ... x_n sont des mineurs d'ordre $n-p$ du déterminant D. On a donc

$$P_1\delta_{1p} + P_2\delta_{2p} + \dots + P_{p-1}\delta_{p-1.p} + P_p\delta_{pp} = 0$$

et dans cette relation l'un au moins des coefficients n'est pas nul, savoir δ_{pp} qui n'est autre chose que d.

En remplaçant successivement la dernière ligne de δ par les p premiers coefficients de P_{p+1}, P_{p+2}, ... P_n, on trouve de la même manière d'autres relations de même forme, et en définitive les $n-p+1$ fonctions P_p, P_{p+1}, ... P_n pourront s'exprimer en fonction linéaire de P_1, P_2 ... P_{p-1}.

(A suivre.)

CONCOURS DES BOURSES DE LICENCE

1. — Indiquer, pour chaque valeur du paramètre a, le nombre des racines réelles de l'équation

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - a = 0.$$

Résoudre l'équation.

2. — Lieu des sommets des cônes passant par une ellipse donnée, et coupant un plan donné suivant une hyperbole équilatère. Discussion du lieu. Détermination des sections circulaires.

---

1. — Théorie des diamètres dans la parabole cubique

$$y^3 = 2px.$$

2. — Lieu des centres des hyperboles tangentes aux deux axes de coordonnées en des points A et B.

(Bordeaux 1882.)

QUESTIONS PROPOSÉES

138. — On donne deux points A et A′ et le milieu O de la droite qui les joint. On imagine toutes les surfaces de révolution du second ordre qui passent en A et A′, et dont toutes les méridiennes ont pour foyer le point O. 1° Lieu des points de contact des plans tangents perpendiculaires à AA′; — 2° lieu des pôles d'un plan donné par rapport à ces surfaces; — 3° en supposant l'excentricité de la méridienne donnée, on demande le lieu des pôles d'un plan donné, le lieu des sommets, le lieu des centres. *(Amigues.)*

139. — Dans un plan mené par un des axes d'un ellipsoïde, on trace une circonférence ayant pour centre le centre

de l'ellipsoïde ; puis on mène tous les plans tangents à l'ellipsoïde et qui contiennent une tangente à la circonférence. Construire les projections du lieu des points de contact sur le plan de la circonférence et sur un plan perpendiculaire à l'axe de l'ellipsoïde situé dans ce plan. *(L. Levy.)*

140. — Assigner, par un procédé direct, une infinité de solutions entières de l'équation indéterminée

$$(2a^2 - 2a - 1)x^2 - 4(a^2 - 1)xy + (2a^2 + 2a - 1)y^2 = -1,$$

dans laquelle a est un entier donné.

NOTE. — *On trouvera deux séries de solutions ; l'une commence par les systèmes de valeurs*

$$\begin{cases} x = a + 1 \\ y = a \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3a + 4 \\ y = 3a + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 11a + 15 \\ y = 11a + 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix}$$

L'autre série se déduit de la précédente, en observant que, si l'on change a *en* — a, *l'équation demeure la même, à l'échange près des indéterminées l'une dans l'autre. On a donc encore pour la proposée, les solutions*

$$\begin{cases} x = a \\ y = a - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3a - 1 \\ y = 3a - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 11a - 4 \\ y = 11a - 15 \end{cases} \quad \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix}$$

(S. Realis.)

141. — On propose d'assigner, par un procédé direct, une infinité de solutions entières de l'équation indéterminée

$$(a^2 - a - 1)x^2 - (2a^2 - 3)xy + (a^2 + a - 1)y^2 = 1,$$

a étant un entier donné.

NOTE. — *On trouvera, en outre des valeurs initiales* x = 1, y = 1, *les deux séries de solutions*

$$\begin{cases} x = a + 2 \\ y = a + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3a + 5 \\ y = 3a + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8a + 13 \\ y = 8a + 5 \end{cases} \quad \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = a - 1 \\ y = a - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3a - 2 \\ y = 3a - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8a - 5 \\ y = 8a - 13 \end{cases} \quad \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix}$$

se déduisant l'une de l'autre, comme dans la question précédente.

(S. Réalis.)

142. — Trouver toutes les fractions rationnelles

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

jouissant de la propriété que si on les développe suivant les puissances croissantes de x, les coefficients du développement soient égaux à zéro, à $+1$, ou à -1.

(Laguerre.)

143. — Déterminer tous les triangles équilatéraux T que l'on peut inscrire dans une conique. Dans quel cas les cercles circonscrits aux triangles T passent-ils par un point fixe? Dans quel cas passent-ils par deux points fixes?

(Laguerre.)

144. — On considère un angle droit yOx; sur Ox, un point fixe $A(OA = a)$; sur Oy un autre point fixe $B(OB = b)$; on suppose $a > b$, et on pose $a^2 - b^2 = c^2$. Par les points A et B, on fait passer un système de deux droites rectangulaires, ωA, ωB, et l'on construit une hyperbole équilatère passant par l'origine O, et admettant ces droites pour axes de symétrie. On demande alors : 1° de démontrer que par un point du plan passent deux de ces hyperboles ; 2° de trouver l'enveloppe de ces coniques ; cette courbe est du quatrième degré et possède un point de rebroussement à l'origine ; 3° trouver le lieu des sommets, le lieu des foyers, le lieu des points communs à la directrice et à l'axe ; 4° le lieu des projections de l'origine sur les asymptotes. On démontrera que ces différents lieux sont constitués par un système de deux cercles. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER, — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE 20, PARIS. — 19878-4.

REPRÉSENTATION PLANE DES QUADRIQUES

Par M. **G. de Longchamps.**

1. Définition d'une surface omaloïde. — M. Sylvester (*) et, après lui, M. Cremona (**) ont proposé d'appeler *surfaces omaloïdes* celles qui jouissent de la propriété que nous allons développer.

Imaginons que les coordonnées homogènes d'un point $m(x, y, z, u)$ soient liées à celles d'un point correspondant M(X, Y, Z, U), par les formules :

$$\frac{x}{\varphi_1} = \frac{y}{\varphi_2} = \frac{z}{\varphi_3} = \frac{u}{\varphi_4}, \qquad \text{(A)}$$

φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 représentant des fonctions algébriques rationnelles, entières et homogènes des lettres X, Y, Z, U. Supposons maintenant que l'on puisse déduire des formules (A) les suivantes :

$$\frac{X}{\psi_1} = \frac{Y}{\psi_2} = \frac{Z}{\psi_3} = \frac{U}{\psi_4}, \qquad \text{(B)}$$

les dénominateurs ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 représentant encore des fonctions algébriques rationnelles, entières et homogènes des lettres x, y, z, u.

Si le point M est mobile dans un plan Π; si l'on a, par conséquent,

$$AX + BY + CZ + DU = o,$$

le point correspondant m décrit la surface Σ qui correspond à l'équation

$$A\psi_1 + B\psi_2 + C\psi_3 + D\psi_4 = o. \qquad (\Sigma)$$

Je dis que Σ peut se représenter, point par point, sur un plan.

En effet, soient (x_1, y_1, z_1, u_1) les coordonnées d'un point particulier m_1 de Σ; les formules (B) permettent de calculer des quantités X_1, Y_1, Z_1. U_1, auxquelles corresponde un point

(*) Sylvester. *Nel Cambridge and Dublin Math. Journal*, t. VI, p. 12.

(**) Cremona. *Sulle trasformazioni razianoli nello spazio. Rendiconti de Reale Istituto Lombardo.* Série II, vol. IV, fasc. X (mai 1871).

M_1. Mais les relations (B) et (Σ) donnent, par combinaison,

$$AX_1 + BY_1 + CZ_1 + DU_1 = 0.$$

Ainsi, à tout point de Σ correspond un point de Π.

La réciproque est vraie. Pour l'établir, imaginons maintenant un point quelconque $M'(X', Y', Z', U')$ du plan Π. Les formules (A) donnent une solution unique, et bien déterminée, pour x, y, z, u; exception faite (dans ce cas, comme dans le précédent) de l'hypothèse particulière où les dénominateurs s'annulent simultanément.

Soit x', y', z', u' la solution donnée par les formules (A), je dis que le point correspondant m' appartient à Σ. En effet, des relations $\frac{x'}{\varphi_1'} = \frac{y'}{\varphi_2'} = \frac{z'}{\varphi_3'} = \frac{u'}{\varphi_4'}$, on déduit, par le calcul même qui a permis de passer des formules (A) aux formules (B),

$$\frac{X'}{\psi_1'} = \frac{Y'}{\psi_2'} = \frac{Z'}{\psi_3'} = \frac{U'}{\psi_4'}.$$

Mais le point M' est, par hypothèse, situé dans le plan Π; on a donc

$$AX' + BY' + CZ' + DU' = 0,$$

et, finalement,

$$A\psi_1' + B\psi_2' + C\psi_3' + D\psi_4' = 0.$$

Cette égalité prouve que le point m' appartient à Σ.

Lorsqu'une surface Σ jouit de la propriété de pouvoir être représentée ainsi, point par point, sur un plan, M. Sylvester dit que Σ est une surface omaloïde. Nous adopterons aussi cette expression; mais, sans rien changer à la généralité de la définition que nous venons de développer, nous la modifierons légèrement et nous rapprocherons ici ces deux idées, qui se correspondent si intimement, *les courbes unicursales* et *les surfaces omaloïdes*.

2. Définition élémentaire des surfaces omaloïdes (1). — Supposons que les coordonnées x, y, z d'un point de l'espace, mobile sur une surface Σ, puissent être

(1) M. Picart (*Thèse de Mathématiques*, 1877) a aussi considéré ces surfaces qu'il a nommées *surfaces unicursales*.

représentées par les formules

$$x = \frac{\varphi_1}{\varphi}, \quad y = \frac{\varphi_2}{\varphi}, \quad z = \frac{\varphi_3}{\varphi}, \qquad (\alpha)$$

φ, φ_1, φ_2, φ_3 étant des fonctions entières de deux lettres t, θ; la surface Σ est, en général, et sauf une vérification nécessaire que nous signalerons tout à l'heure, une omaloïde.

Imaginons, en effet, un plan Π et, dans ce plan, prenons deux axes de coordonnées ωt, $\omega\theta$. A un point m' du plan Π correspondent des coordonnées t', θ'; les formules (α) permettent de calculer les valeurs, correspondantes d'x, d'y et de z. Soient x', y', z' ces valeurs, et soit M' le point correspondant, point situé sur Σ. On peut dire qu'à un point m' de Π correspond un point unique, et bien déterminé, de Σ; il n'y a d'exception que dans le cas où les fonctions φ, φ_1, φ_2, φ_3 s'annulent simultanément, et alors les formules (d) devraient être simplifiées.

Considérons maintenant les équations (α) et cherchons à les résoudre par rapport à t et à θ. Cette résolution est possible, si x, y, z, représentent, comme nous le supposons, les coordonnées d'un point de Σ, et elle conduit, *en général*, à des expressions de la forme

$$t = \frac{\psi_1}{\psi}, \quad \theta = \frac{\psi_2}{\psi}, \qquad (\beta)$$

ψ, ψ_1, ψ_2 désignant des fonctions entières des lettres x, y, z. Ceci résulte de ce fait qu'en éliminant t entre les égalités (α) on obtient *deux* équations en θ, lesquelles n'admettent *en général* qu'*une* solution commune. Mais cette règle souffrant des exceptions, avant d'affirmer que les formules (α) représentent une surface omaloïde, on devra s'assurer qu'on peut déduire les égalités (β) des relations proposées (α).

3. Théorème. — *Les quadriques à centre sont des surfaces omaloïdes.*

La considération des génératrices qui passent par un point de l'hyperboloïde à une nappe conduit aux équations connues

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - 1 &= t\left(\frac{z}{c} - \frac{y}{b}\right), \\ t\left(\frac{x}{a} + 1\right) &= \frac{z}{c} + \frac{y}{b}; \end{aligned}\right\} \qquad (G)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - 1 &= \theta\left(\frac{z}{c} + \frac{y}{b}\right), \\ \theta\left(\frac{x}{a} + 1\right) &= \frac{z}{c} - \frac{y}{b}. \end{aligned}\right\} \qquad (G')$$

En considérant dans ces égalités x, y, z, comme des inconnues, on sait que ces équations sont compatibles et conduisent aux formules

$$\frac{x}{a} = \frac{1 + t\theta}{1 - t\theta}, \quad \frac{y}{b} = \frac{t - \theta}{1 - t\theta}, \quad \frac{z}{c} = \frac{t + \theta}{1 - t\theta}. \qquad (H_1)$$

Ces égalités donnent d'ailleurs, par un calcul évident,

$$t = \frac{a(bz + cy)}{bc(x + a)}, \quad \theta = \frac{a(bz - cy)}{bc(x + a)}. \qquad (h_1)$$

Les formules (H_1) et (h_1) montrent déjà que les hyperboloïdes réglés sont des surfaces omaloïdes. Il est un peu plus difficile de voir comment cette propriété s'étend aux surfaces à centre dénuées de génératrices rectilignes réelles. On y parvient pourtant, très simplement, comme il suit.

Les formules (H_1) et la relation connue

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

conduisent à la relation identique

$$(1 + t\theta)^2 + (t - \theta)^2 - (t + \theta)^2 = (1 - t\theta)^2.$$

Posons maintenant

$$t - \theta = 2u, \text{ et } t + \theta = 2v,$$

et nous aurons l'identité

$$(1 + v^2 - u^2)^2 + 4u^2 - 4v^2 = (1 - v^2 + u^2);$$

si, dans cette identité, nous changeons v^2 en $-v^2$, ou v en iv, comme on voudra, l'identité subsiste et prend la forme nouvelle :

$$(1 - v^2 - u^2)^2 + 4u^2 + 4v^2 = (1 + v^2 + u^2)^2. \quad (1)$$

C'est cette identité qui permet de calculer les coordonnées d'un point de l'ellipsoïde et celles d'un point de l'hyperboloïde à deux nappes, comme nous allons le montrer.

L'égalité (1), écrite sous la forme

$$\left(\frac{1 - v^2 - u^2}{1 + v^2 + u^2}\right)^2 + \left(\frac{2u}{1 + v^2 + u^2}\right)^2 + \left(\frac{2v}{1 + v^2 + u^2}\right)^2 = 1,$$

donne pour représenter un point de l'ellipsoïde les formules:

$$\frac{x}{a}=\frac{1-t^2-\theta^2}{1+t^2+\theta^2},\quad \frac{y}{b}=\frac{2t}{1+t^2+\theta^2},\quad \frac{z}{c}=\frac{2\theta}{1+t^2+\theta^2};\qquad (E)$$

desquelles on déduit, d'ailleurs,

$$t=\frac{ay}{b\,(a+x)}\quad\text{et}\quad \theta=\frac{az}{c\,(a+x)}.\qquad (e)$$

Enfin, si nous revenons à l'égalité (1) et si nous l'écrivons de la manière suivante :

$$\left(\frac{1-v^2-u^2}{2v}\right)^2+\left(\frac{u}{v}\right)^2+1=\left(\frac{1+v^2+u^2}{2v}\right)^2,$$

les coordonnées d'un point de l'hyperboloïde à deux nappes pourront, d'après cette remarque, être représentées par les formules

$$\frac{x}{a}=\frac{1-t^2-\theta^2}{2\theta},\quad \frac{y}{b}=\frac{t}{\theta},\quad \frac{z}{c}=\frac{1+t^2+\theta^2}{2\theta}.\qquad (H_2)$$

De ces égalités nous tirons aussi

$$\theta=\frac{ac}{az+cx}\quad\text{et}\quad t=\frac{acy}{b\,(az+cx)}.\qquad (h_2)$$

Les formules (E), (e); (H_1), (h_1); (H_2), (h_2) établissent que les quadriques à centre sont omaloïdes et peuvent se représenter, point par point, sur un plan.

Nous allons maintenant montrer l'utilité de cette remarque et déduire des propriétés élémentaires des droites et des cercles des propriétés correspondantes pour les quadriques à centre.

Mais il nous faut entrer d'abord dans quelques développements qui sont comme la base de la transformation qui nous occupe. *(A suivre.)*

HYPERBOLE DES NEUF POINTS

NOUVELLE ANALOGIE ENTRE L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE ET LE CERCLE

Par M. **Brocard**, capitaine du génie.

---

1. — La transformation par droites symétriques est un cas particulier de la transformation biquadratique ; en d'autres termes, à chaque point M du plan correspond un

point unique bien déterminé M'; à chaque droite une conique.

Les points fondamentaux de la transformation sont au nombre de trois, les sommets du triangle de référence ABC. Les côtés opposés en sont les courbes fondamentales.

Le cercle fixe (c) des trois points fondamentaux est le cercle circonscrit à ce triangle (*).

Parmi les points remarquables que l'on rencontre ainsi dans le triangle, et que l'on obtient par l'intersection des droites symétriques (**), on peut citer, par exemple, le centre O du cercle (c) et le point de rencontre H des hauteurs (ou orthocentre); le centre de gravité E et le centre des médianes anti-parallèles K (***), etc.

Ces points, et d'autres analogues jouissent de nombreuses propriétés, dont l'étude a occupé récemment plusieurs géomètres (****).

2. — Ces préliminaires posés, il est facile d'établir que *La conique* (C^2) *correspondant à une droite* (d) *est une ellipse,*

(*) Voir *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. V, 1873, p. 206-240 (Mémoire de M. Dewulf), et t. VI, 1882, p. 152-168 (Mémoire de M. Schoute).

(**) La transformation dont il s'agit revient à celle que M. A. Mathieu a indiquée dans son *Étude de Géométrie comparée*, publiée aux *Nouvellles Annales* de 1865 (t. IV, p. 393, 481 et 529). Le mode de conjugaison employé dans ce travail est le *faisceau d'inversion*, formé de deux systèmes de droites dont les bissectrices coïncident. Ce sont donc les *droites symétriques* dont il est question ici.

Les diverses propriétés générales énoncées plus loin se trouvent indiquées ou démontrées déjà par M. Mathieu dans le mémoire cité. D'autres géomètres les ont également rencontrées dans leurs recherches.

(***) Ce point de rencontre des médianes anti-parallèles, ou des *symédianes*, suivant l'expression plus abréviative proposée par M. d'Ocagne (*Nouvelles Annales*, t. II, 1883, p. 450-464), a été étudié pour la première fois en tous détails par M. E. Lemoine dans plusieurs communications insérées aux *Nouvelles Annales* (1873, t. XII, p. 364-366) et aux *Annuaires du Congrès de l'Association française* (1873 et 1874). Il avait bien été rencontré fortuitement par d'autres géomètres, dans la solution de plusieurs problèmes isolés, et l'on en avait déduit autant de constructions différentes (Gauss, Schlömilch, Grebe, Hossard, Hain, Mathieu, etc.); mais c'est M. E. Lemoine qui a fait ressortir toute l'importance de ce point dans la géométrie du triangle. (Voir *Mathesis*, t. I, 1881, p. 153, 173 et 185, la notice de M. J. Neuberg.)

(****) Voir, par exemple, *Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht*, t. XII à XV, 1881 à 1884.

une hyperbole ou une parabole, suivant que la droite (d) *est extérieure, sécante ou tangente au cercle* (c).

Considérons, en particulier, les sécantes issues d'un point M du plan.

Les points où elles rencontrent chaque côté du triangle ABC ont leurs correspondants sur les deux autres côtés, c'est-à-dire au sommet opposé. On en conclut que

La conique de transformation d'une droite (d) *est circonscrite au triangle de référence.*

3. — Les points L_1 L_2 où cette droite (*d*) rencontre le cercle (*c*) ont leurs correspondants à l'infini, et dans la direction symétrique des lignes AL_1 AL_2, ou BL_1 BL_2, ou CL_1 CL_2 par rapport aux bissectrices du triangle.

Ces droites passent par les points diamétralement opposés à L_1 et à L_2 sur le cercle (*c*).

On en déduit aisément que

Les deux angles des asymptotes sont mesurés par la moitié des arcs suivant lesquels la droite (d) (L_1L_2) *divise le cercle* (c) *des trois points fondamentaux de la transformation* (*).

A toute autre sécante du cercle (*c*) correspond une hyperbole circonscrite au triangle ABC ;

Et réciproquement :

A toute hyperbole circonscrite au triangle ABC correspond une certaine droite (*d*).

4. — Au faisceau de sécantes issues du point M correspond, comme on vient de le voir, un faisceau d'hyperboles circonscrites au triangle ABC.

Parmi ces coniques, il est intéressant de chercher à quelles droites (*d*) correspondent des hyperboles équilatères.

Or, on sait que

L'hyperbole équilatère circonscrite à un triangle ABC *passe par l'orthocentre* H *de ce triangle* (**).

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. XVI, 1877, p. 37-42. Questions 1163 et 1164 (Haton). Voir aussi dans le même volume le Mémoire de M. Amigues sur les transformations du second ordre dans les figures planes, et dans le t. IV, 1865, l'étude de M. Mathieu.

(**) Brianchon et Poncelet (*Annales de Gergonne*, t. XI, 1821).

Mais, en vertu de la réciprocité des figures conjuguées, la sécante correspondante (d) doit passer par le point O conjugué du premier. On en conclut que

Le faisceau d'hyperboles équilatères circonscrites au triangle ABC *correspond au faisceau de rayons du cercle* (c) *circonscrit à ce triangle.*

On aurait pu arriver à la même conclusion en observant que l'angle L_1BL_2 des asymptotes de l'hyperbole, défini par la condition indiquée au § 3, devient un angle droit lorsque la sécante L_1L_2 est un diamètre du cercle (c).

5. — Cela posé, parmi les hyperboles équilatères dont il vient d'être parlé, il y a lieu de remarquer celle qui passe par le centre de gravité E du triangle.

Cette condition entraîne d'intéressantes conséquences.

En effet, l'hyperbole équilatère correspond alors au rayon OK du cercle (c), passant par le point K, centre des symédianes, ou point de Lemoine (*) (Voir § 1). Cette ligne OK n'est autre que le diamètre du cercle de Brocard; et, par conséquent, l'hyperbole équilatère correspondante passe aussi par les points

D centre d'homologie des triangles ABC, $A_1B_1C_1$ (voir les notices antérieures) (**) et conjugué de D′ pôle de la corde $\omega\omega'$ du cercle de Brocard.

Z′ conjugué de Z, milieu de OK et centre du cercle de Brocard.

S′ conjugué de S, milieu de $\omega\omega'$.

Ainsi, nous rencontrons une hyperbole équilatère (Γ) circonscrite au triangle ABC, et passant par cinq autres points remarquables résultant de constructions géométriques : HEDZ′S′.

La détermination complète de cette hyperbole mérite donc quelque intérêt. Elle fait l'objet de la présente notice.

6. — L'hyperbole (Γ) appartient à un faisceau de coniques dont il est facile de trouver, par exemple, le lieu des centres.

(*) Comme M. J. Neuberg a proposé de le désigner.

(**) *Journal de Mathématiques élémentaires*, t. II, 1883.

Les côtés du triangle et les hauteurs correspondantes représentent les variétés de ces coniques réduites à leurs asymptotes; les pieds des hauteurs font donc partie du lieu.

D'autre part, les trois sommets du triangle ABC et les symétriques des sommets par rapport aux milieux des côtés donnent trois parallélogrammes par les sommets desquels on peut faire passer des hyperboles équilatères ayant pour centre les milieux considérés. Ces points — milieux des côtés du triangle — font donc encore partie du lieu géométrique cherché.

Enfin, il en est de même des milieux des segments des hauteurs compris entre les sommets du triangle et l'orthocentre : car les hyperboles équilatères circonscrites au triangle passent par l'orthocentre H.

Le lieu des centres passe donc par les neuf points qui définissent le *cercle* (c') *des neuf points*.

Mais, en général, le lieu des centres des coniques passant par quatre points, c'est-à-dire satisfaisant à quatre conditions, est une conique. (Brianchon et Poncelet, *loc. cit.*)

Dans le cas qui nous occupe, cette conique n'est autre que le cercle (c'). En conséquence

Le cercle (c') *des neuf points est le lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites au triangle* ABC. (Brianchon et Poncelet, *loc. cit.*) (*).

7. — Ainsi que j'ai eu déjà l'occasion d'en montrer l'utilité, ce cercle (c') peut être défini : la figure semblable au cercle (c) circonscrit au triangle ABC, le centre de similitude étant l'orthocentre H et le rapport de similitude, $\frac{1}{2}$. Le centre O de ce cercle est au milieu de OH (**).

(*) La notion du *cercle des neuf points* a été très explicitement établie par Brianchon et Poncelet dans le Mémoire cité. C'est le même cercle qui porte aussi le nom de Feuerbach, géomètre, qui a reconnu sa remarquable propriété d'être tangent au cercle inscrit et aux trois cercles ex-inscrits. (*Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des Dreiecks.* Nürnberg 1822.)

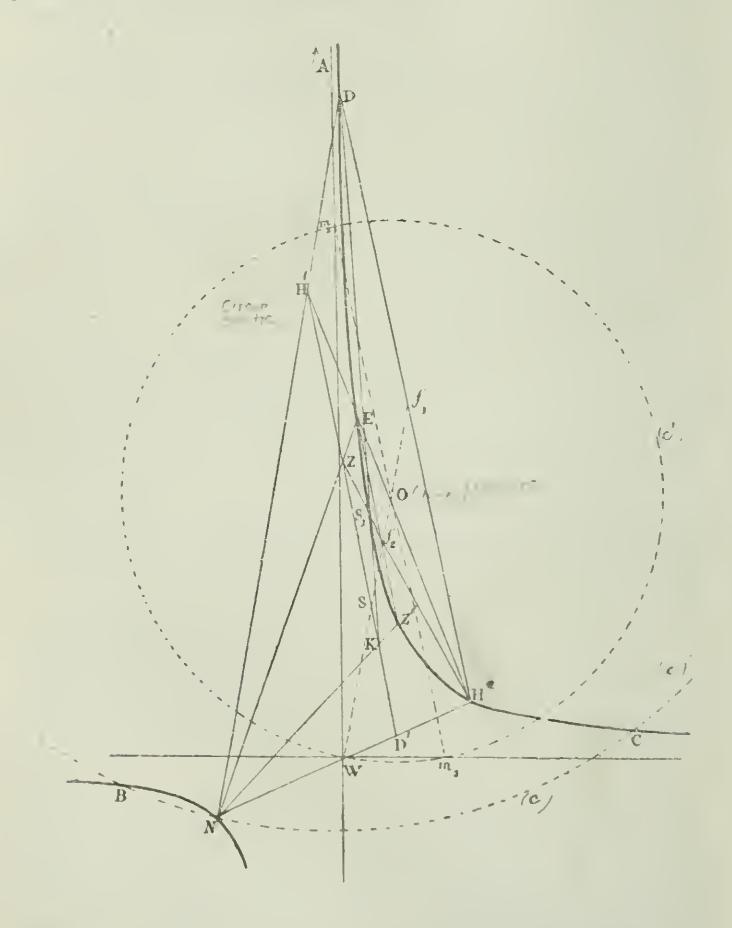
Dans la géométrie de MM. Rouché et De Comberousse, le *cercle des neuf points* est attribué à Euler. Pourquoi ne lui donnerait-on pas le nom de ce grand géomètre ?

(**) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. I, 1873, p. 224.

Ce point de vue pourra nous servir dans la suite.

Nous arrivons donc à ce résultat que

Le centre W *de l'hyperbole* (Γ) *se trouve sur le cercle* (c′) *et les asymptotes de cette conique rencontrent ce cercle en deux points* m_1, m_2 *diamétralement opposés.*



Observons, maintenant, que l'hyperbole (Γ) est circonscrite à un trapèze. On a établi, en effet, le parallélisme des lignes HD, EZ′.

Les milieux f_1, f_2 de ces deux cordes sont donc sur un diamètre passant par le point S d'intersection des côtés DE, HZ' du trapèze. On a vu que ce point S est sur OK.

Le diamètre f_1Of_2S rencontre la circonférence (c') en deux points, l'un du côté de la grande base DH, l'autre du côté de la petite base EZ'. Ce dernier, W, est le seul qui réponde à la question. Il représente le centre cherché.

Quant aux asymptotes, ce sont les droites Wm_1 Wm_2 joignant le point W aux extrémités du diamètre m_1m_2 du cercle (c') parallèle aux cordes HD, EZ', ou à la droite OK.

8. — Parmi les propriétés étudiées dans une précédente notice, on a établi que OS parallèle à DH est la moitié de DH. On en conclut que f_1f_2S est parallèle à OD et que le point W où elle rencontre HN est au milieu de cette ligne.

La définition du § 7 conduirait d'ailleurs à cette remarque. Mais le point N, symétrique du point H par rapport au point W, appartient à la fois à l'hyperbole (Γ) et au cercle (c).

Ainsi, nous arrivons à la détermination complète d'une hyperbole équilatère (Γ) passant par neuf points remarquables du plan du triangle.

Cette hyperbole des neuf points est d'autant plus intéressante à signaler, qu'elle devient l'analogue du *cercle des neuf points*, et qu'elle établit, d'une manière nouvelle et très simple, la liaison de divers points associés au triangle par voie de transformation biquadratique résultant de l'emploi de droites symétriques.

Cette conique n'est pas le seul exemple de l'hyperbole équilatère passant par neuf points du plan. Il existe, en effet, un groupe de neuf points qui se trouvent toujours sur une hyperbole, et, dans un cas particulier, cette conique devient une hyperbole équilatère, et passe en outre par un dixième point du plan.

Les points dont il est question sont les suivants : les six points milieux des côtés et des diagonales d'un quadrilatère inscriptible, les points de rencontre des côtés opposés et des diagonales, et enfin le centre du cercle.

Voir *Nouvelles Annales*, 1864, t. III, p. 265-267.

9. — Les propriétés reconnues dans l'hyperbole (Γ) donnent quelque intérêt à la recherche de son paramètre, qui doit avoir une forme symétrique et une expression relativement simple.

Pour y parvenir, on devra former l'équation de l'hyperbole A, B, C, E, puis les équations des asymptotes, et calculer le produit des distances d'un des points A, B, C, E aux deux asymptotes. Ce produit doit, évidemment, être constant et représenter le carré du paramètre cherché.

Prenons pour origine le milieu A′ d'un côté BC du triangle et pour axe des x ce côté (coordonnées rectangulaires).

Ce choix d'axes semble de nature à faciliter les calculs, pour les raisons suivantes :

1° Le terme du premier degré en x doit disparaître de l'équation générale ;

2° Les coordonnées des points A et E sont proportionnelles entre elles. Les résultats de leur substitution dans l'équation générale doivent donc être identiques pour les termes du second degré, et ne différer que pour les autres termes de degré moindre.

L'équation générale des hyperboles équilatères passant par les points B et C étant

$$x^2 + B_1 xy - y^2 + E_1 y - \frac{a^2}{4} = 0,$$

la substitution des coordonnées des points A $\left(x = b\cos C - \frac{a}{2},\right.$ $\left.y = b\sin C\right)$ et E $\left(x = \frac{1}{3}\left(b\cos C - \frac{a}{2}\right),\ y = \frac{1}{3} b \sin C\right)$ donne deux équations d'où l'on tire immédiatement

$$E_1 = \frac{a^2}{b\sin C}, \quad B_1 = \frac{\frac{a^2}{4} - \left(b\cos C - \frac{a}{2}\right)^2 + b^2\sin^2 C - a^2}{b\sin C\left(b\cos C - \frac{a}{2}\right)},$$

et, en se servant des relations et notations connues,

$$2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2, \qquad 2ab\sin C = \sqrt{2n^4 - p^4}$$

$$m^2 = a^2 + b^2 + c^2, \qquad n^4 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2,$$

$$p^4 = a^4 + b^4 + c^4,$$

l'on trouve facilement

$$E_1 = \frac{2a^3}{\sqrt{2n^4 - p^4}} \qquad B_1 = \frac{2n^4 - 2p^4 - 2a^4 + 2b^2c^2}{(b^2 - c^2)\sqrt{2n^4 - p^4}}.$$

Les coordonnées du centre de l'hyperbole étant x_1, y_1, les asymptotes ont pour équations

$$y - y_1 = m'(x - x_1), \qquad y - y_1 = m''(x - x_1),$$

m' et m'' désignant les racines de l'équation

$$m^2 - B_1 m - 1 = 0.$$

Les distances du point B $\left(x = \frac{a}{2}, y = 0\right)$ à ces deux droites étant représentées par δ_1 et δ_2, l'on en déduit, pour le carré du paramètre,

$$\delta_1\delta_2 = K^2 = \frac{y_1^2 - B_1x_1y_1 - x_1^2 + ax_1 + \frac{B_1ay_1}{2} - \frac{a^2}{4}}{\sqrt{4 + B_1^2}}$$

ou

$$K^2 = \frac{E_1^2 - \frac{a^2(4 + B_1^2)}{4}}{(4 + B_1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)\sqrt{2n^4 - p^4}}{16(p^4 - n^4)\sqrt{p^4 - n^4}},$$

fonction symétrique des côtés du triangle.

Lorsque le triangle est isoscèle, le paramètre devient nul; en d'autres termes, l'hyperbole (Γ) se réduit à ses deux asymptotes, la base du triangle et la hauteur correspondante.

Il n'y a pas d'intérêt à développer le numérateur. Cependant on pourra remarquer les identités

$$\begin{aligned}(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)(b^2 - c^2) &= a^2(b^4 - c^4) + b^2(c^4 - a^4) + c^2(a^4 - b^4)\\ &= a^4(c^2 - b^2) + b^4(a^2 - c^2) + c^4(b^2 - a^2).\end{aligned}$$

Nota. — Le fait de la proportionnalité des coordonnées des points A et E explique la facilité de réduction que nous avons rencontrée dans l'analyse de ce problème.

La même recherche essayée pour les hyperboles équilatères circonscrites au triangle ABC et passant par un des points tels que O, I, K, Z, S, D', ... définis dans les notices précédentes, conduirait à des calculs très pénibles et pour ainsi dire inextricables.

Le plus simple de tous ces paramètres est donc celui que

nous venons d'obtenir pour l'hyperbole (Γ) des neuf points.

L'on pourra s'exercer à retrouver les mêmes résultats en se servant des coordonnées des points D, S′ et Z′. Pour l'orthocentre H commun à toutes les hyperboles équilatères, circonscrites au triangle, le paramètre est nécessairement indéterminé (et au contraire on est obligé de se le donner); mais alors on remplacera le point H par le point N diamétralement opposé sur l'hyperbole (Γ) et l'on devra retrouver le même paramètre.

Notes diverses.

I. — Distances des points O et H aux côtés du triangle :

$$\delta O_a = \frac{a}{2} \cot A, \qquad \delta H_a = \frac{a}{\sin A} \cos B \cos C;$$

donc

$$\delta O_a \, . \, \delta A_a = C^{te},$$

ce qui donne la signification géométrique du produit cos A cos B cos C :

$$\delta O_a \, . \, \delta H_a = \frac{D^2}{2} \cos A \cos B \cos C.$$

II. — Longueur de la ligne OH. — On trouve, après quelques réductions faciles,

$$\overline{OH}^2 = \frac{b^2}{4 \sin^2 B} [(3 \cos B \cos C - \sin B \sin C)^2 + \sin^2 (B - C)]$$

ou

$$\overline{OH}^2 = \frac{D^2}{4} (1 - 8 \cos A \cos B \cos C)$$
$$= \frac{9a^2b^2c^2 - m^2(2n^4 - p^4)}{2n^4 - p^4}.$$

III. — Point n de rencontre des lignes qui joignent les sommets du triangle aux points de contact des côtés avec le cercle inscrit.

Soient I le centre du cercle inscrit, I′ sa projection sur le côté a, B′C′ les projections de I′ sur les côtés b et c. La droite An a pour équation

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{I'B'}{I'C'}.$$

Or, $II' = \frac{S}{P}$; $IB = \frac{S}{P}\cot\frac{B}{2}$; $IC = \frac{S}{P}\cot\frac{C}{2}$; $IB' = \frac{2S}{P}\cos^2\frac{C}{2}$;

$IC' = \frac{2S}{P}\cos^2\frac{B}{2}$; donc

$$\alpha \cos^2\frac{A}{2} = \beta \cos^2\frac{B}{2} = \gamma \cos^2\frac{C}{2} = K$$

avec

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 2S.$$

On en déduit, par exemple,

$$\alpha = \delta n_a = \frac{4S^3}{abc(2P^2 - m^2)} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}.$$

Les distances de ce point n aux côtés sont donc inversement proportionnelles aux carrés des cosinus des demi-angles opposés.

IV. — Point M de rencontre des droites BN' qui joignent les sommets du triangle aux points de contact des côtés opposés avec les cercles ex-inscrits correspondants.

Soit i'' le centre du cercle ex-inscrit tangent en N' au côté b. L'on a

$$\alpha = N'C' \sin C; \ \gamma = N'A \sin A; \ i''N' = \frac{S}{P - b};$$

$$N'C = N'i'' \operatorname{tg}\frac{C}{2}; \ N'A = N'i'' \operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Donc

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{a(P - c)}{c(P - a)},$$

d'où

$$\frac{\alpha a}{P - a} = \frac{\beta b}{P - b} = \frac{\gamma c}{P - c} = K$$

avec

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 2S.$$

On en déduit, par exemple,

$$\alpha = \delta M_a = \frac{2S(P - a)}{Pa}.$$

Ce point remarquable paraît avoir été signalé pour la première fois par Hochheim. (*Archives de Grunert*, t. LII, 1871.)

On reconnaît très facilement que ce point est situé sur la ligne EI, et qu'en outre EM = 2 . EI.

En effet,

$$E_a = \frac{2S}{3a}, \quad I_a = \frac{2S}{2P}, \quad M_a = \frac{2S(P-a)}{Pa};$$

d'où

$$\frac{M-E}{E-I} = \frac{\frac{P-a}{Pa} - \frac{1}{3a}}{\frac{1}{3a} - \frac{1}{2P}} = 2\,\frac{3P-3a-P}{2P-3a} = 2.$$

V. — Comme exercice de calcul, on peut se donner l'hyperbole équilatère

$$xy = \mu\nu = \pi\chi,$$

$(\mu,\nu)(\pi,\chi)$ représentant deux points E et H de la courbe, et se proposer de déterminer, entres autres, les points O, *o*, D, S, D', K, qui doivent donc avoir, par rapport au triangle *inconnu* ABC, les situations indiquées dans le cours de ces recherches. C'est ainsi que l'on trouve, par exemple, pour les points précités :

O $\quad x = \dfrac{3\mu - \pi}{2} \qquad y = \dfrac{3\nu - \chi}{2}$

o $\quad x = \dfrac{3\mu + \pi}{4} \qquad y = \dfrac{3\nu + \chi}{4}$

D $\quad x = \chi\dfrac{3\mu + \pi}{3\nu + \chi} \qquad y = \pi\dfrac{3\nu + \chi}{3\mu + \pi}$

S $\quad x = \dfrac{4\mu\nu}{3\nu + \chi} \qquad y = \dfrac{4\mu\nu}{3\mu + \pi}$

D' $\quad x = \dfrac{8\mu\nu\pi}{2\mu\nu + 3\pi\nu + 3\mu\chi} \qquad y = \dfrac{8\mu\nu\chi}{2\mu\nu + 3\pi\nu + 3\mu\chi}$

K $\quad x = \dfrac{2\mu\nu(\nu + \pi)}{2\mu\nu + \mu\chi + \pi\nu} \qquad y = \dfrac{2\mu\nu(\mu + \chi)}{2\mu\nu + \mu\chi + \pi\nu}$

La détermination des autres points S', Z, Z', ... devient beaucoup plus compliquée.

VI. — Tangentes des 8 premiers multiples de l'angle α.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2n^4 - p^4}}{m^2} \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{m^2\sqrt{2n^4 - p^4}}{p^4}$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{p^4 + n^4}{p^4 - n^4} \operatorname{tg} \alpha \qquad \operatorname{tg} 4\alpha = \frac{p^8}{p^8 - 2n^8} \operatorname{tg} 2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 5\alpha = \frac{p^8 - n^8 + n^4p^4}{p^8 - n^8 - n^4p^4} \operatorname{tg} \alpha \qquad \operatorname{tg} 6\alpha = \frac{p^8 - n^8}{p^8 - 3n^8} \operatorname{tg} 2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 7\alpha = \frac{p^{12} + n^4p^8 - 2n^8p^4 - n^{12}}{n^4(n^8 - 2p^8 - 2p^4n^4)} \operatorname{tg} \alpha \qquad \operatorname{tg} 8\alpha = \frac{p^8(p^8 - 2n^8)}{p^{16} + 2n^{16} - 4n^8p^8} \operatorname{tg} 2\alpha$$

VII. — Distance du centre du cercle des neuf points aux côtés du triangle. — Ce centre est le milieu de OH. Or, $O_a = \frac{D}{2} \cos A$, et $H_a = D \cos B \cos C$. On en déduit

$$\left(\frac{O + H}{2}\right)a = \frac{D}{4} \cos (B - C).$$

Dans tout ce qui précède, on a posé, pour abréger :

$$a + b + c = 2P, \quad a^2 + b^2 + c^2 = m^2,$$

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = n^4, \quad a^4 + b^4 + c^4 = p^4.$$

Ces notations sont extrêmement avantageuses et l'on a pu voir combien elles donnent de symétrie et de clarté aux formules et de facilité aux recherches. Nous la recommandons aux géomètres qui voudront porter leur curiosité sur cet intéressant sujet d'études.

SUR LA DÉCOMPOSITION

DES POLYNOMES HOMOGÈNES DU SECOND DEGRÉ EN SOMMES DE CARRÉS

Par M. **Kœhler.**

(*Suite*, voir page 185.)

Théorème. — *Pour qu'un polynôme homogène du second degré à* n *variables soit décomposable en* p *carrés, il faut et il suffit que le déterminant de ses dérivées partielles et ses mineurs jusqu'à l'ordre* n — p — 1 *inclusivement soient nuls à la fois.*

Supposons le polynôme réduit à une somme de p carrés,

$$f = P_1^2 + P_2^2 + \dots P_p^2$$

On a

$$P_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$$
$$P_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{1}{2} f'x_1 = a_{11}P_1 + a_{21}P_2 + \dots + a_{p1}P_p$$
$$\frac{1}{2} f'x_2 = a_{12}P_1 + a_{22}P_2 + \dots + a_{p2}P_p$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{1}{2} f'x_n = a_{1n}P_1 + a_{2n}P_2 + \dots + a_{pn}P_p$$

Le déterminant des dérivées particlles est donc

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 + \dots + a_{p1}^2 & a_{11}a_{12}a_{21}a_{22} + \dots + a_{p1}a_{p2} & \dots & a_{11}a_{1n} + a_{21}a_{2n} + \dots + a_{p1}a_{pn} \\ a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} + \dots + a_{p2}a_{p1} & a_{12}^2 + a_{22}^2 + \dots + a_{p2}^2 & \dots & a_{12}a_{1n} + a_{22}a_{2n} + \dots + a_{p2}a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n}a_{11} + a_{2n}a_{21} + \dots + a_{pn}a_{p1} & a_{1n}a_{12} + a_{2n}a_{22} + \dots + a_{pn}a_{p2} & \dots & a_{1n}^2 + a_{2n}^2 + \dots + a_{pn}^2 \end{vmatrix}$$

Il se compose de p^n déterminants partiels; une colonne quelconque d'un de ces déterminants se compose des coefficients d'une des fonctions P_1, P_2 ... ou P_p multipliés par un facteur constant. Ils sont donc tous nuls, car ils ont tous n colonnes et il n'y a que p colonnes distinctes (abstraction faite des facteurs communs). Ainsi Δ est nul. De même tous ses mineurs composés de plus de p colonnes sont nuls pour la même raison. Les mineurs différents de zéro auront au plus p colonnes et seront de l'ordre $n - p$.

Réciproquement, supposons que Δ soit nul ainsi que tous ses mineurs jusqu'à l'ordre $n - p - 1$ inclusivement; je dis que le polynôme se réduira à une somme de p carrés.

Soit

$$f = P_1^2 + P_2^2 + \dots + P_n^2.$$

Le déterminant Δ des premières dérivées sera évidemment le carré de

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

puisque $\Delta = 0$. on a aussi $D = 0$.

Si l'on considère un des mineurs principaux de Δ, dont l'ordre soit au plus $n - p - 1$, il résulte du lemme I qu'il est égal à la somme des carrés des mineurs de D que l'on peut former avec les éléments des lignes et colonnes de même rang que celles du mineur principal en question ; donc tous ces mineurs de D sont nuls. Mais D n'est autre chose que le déterminant des n fonctions linéaires $P_1, P_2, \ldots P_n$; puisqu'il est nul ainsi que tous ses mineurs jusqu'à l'ordre $n - p - 1$ inclusivement, il résulte du théorème I que $n - p$ de ces fonctions linéaires peuvent s'exprimer en fonction linéaire des p autres, et par suite le polynôme f se réduit à une somme de p carrés.

Lorsqu'on applique le théorème précédent aux polynômes homogènes à trois et à quatre variables, on trouve tout d'abord pour leur réduction à un ou deux carrés un nombre de conditions supérieur à celui qu'indique la géométrie analytique.

Ainsi, pour qu'une surface du second ordre se réduise à deux plans, il faut trois conditions. D'autre part, pour que le polynôme à quatre variables se réduise à deux carrés, le déterminant de ses dérivées partielles doit être nul ainsi que tous ses mineurs du premier ordre, et il y a dix mineurs distincts; mais les conditions auxquelles on arrive en les égalant à zéro ne sont pas *toutes distinctes*. Je vais les étudier en détail.

Je remarque en premier lieu que le déterminant d'un polynôme à n variables est symétrique ; on peut donc lui appliquer la formule (5). Si D est nul ainsi que D_{pp}, on aura aussi $D_{pq} = 0$, quel que soit q. Il suffit donc qu'un mineur principal D_{pp} soit nul, pour que tous les mineurs relatifs aux éléments de la première ligne ou colonne le soient aussi. Cette remarque faite, je considère le polynôme.

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4.$$

Son déterminant est

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad \text{où } a_{21} = a_{12},\ a_{31} = a_{13}, \text{ etc.}$$

Les dix mineurs du premier ordre sont les quatre mineurs principaux D_{11}, D_{22}, D_{33}, D_{44} et en outre D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{23}, D_{24}, D_{34}.

Les mineurs du second ordre sont au nombre de trente, savoir :

$$d_{11}^{22} = d_{12}^{21},\ d_{11}^{33} = d_{11}^{31},\ d_{11}^{44} = d_{14}^{41},\ d_{22}^{33} = d_{23}^{32},\ d_{22}^{44} = d_{24}^{42},\ d_{33}^{44} = d_{34}^{43},$$

$$\begin{array}{ll} d_{11}^{23} = d_{13}^{21} = d_{12}^{31} & d_{33}^{12} = d_{31}^{23} = d_{32}^{13} \\ d_{11}^{24} = d_{12}^{41} = d_{14}^{21} & d_{33}^{14} = d_{31}^{43} = d_{34}^{13} \\ d_{11}^{34} = d_{13}^{41} = d_{14}^{31} & d_{33}^{24} = d_{32}^{43} = d_{34}^{23} \\ d_{22}^{13} = d_{21}^{32} = d_{23}^{12} & d_{44}^{12} = d_{41}^{24} = d_{42}^{14} \\ d_{22}^{14} = d_{21}^{42} = d_{24}^{12} & d_{44}^{13} = d_{41}^{34} = d_{43}^{14} \\ d_{22}^{34} = d_{23}^{42} = d_{24}^{32} & d_{44}^{23} = d_{42}^{34} = d_{43}^{24} \end{array}$$

Les six premiers de ce tableau sont les mineurs principaux du second ordre; ils entrent dans la composition de D_{11}, D_{22}, D_{33}, D_{44} ainsi que les douze suivants.

Il faut ajouter

$$d_{12}^{34},\ d_{12}^{43},\ d_{13}^{24}.\ d_{13}^{42},\ d_{14}^{23},\ d_{14}^{32},\ d_{23}^{14},\ d_{23}^{41},\ d_{24}^{13},\ d_{24}^{31},\ d_{34}^{12},\ d_{34}^{21}.$$

Je suppose que l'on ait

$$D = 0, \quad D_{44} = 0, \quad D_{33} = 0,$$

ce qui donne déjà

$$D_{14} = 0,\ D_{24} = 0,\ D_{34} = 0,\ D_{13} = 0,\ D_{23} = 0.$$

Je dis qu'on aura aussi

$$D_{22} = 0, \quad D_{11} = 0$$

et pour le prouver je vais exprimer D au moyen des mineurs du second ordre.

On a

$$D\ .\ d_{44}^{33} = D_{33}D_{44} - (D_{34})^2$$

et aussi, en appliquant la formule (5) à D_{33} et à D_{44} :

$$D_{33}\ .\ a_{11} = d_{33}^{22}d_{33}^{44} - (d_{33}^{24})^2, \quad D_{44}a_{11} = d_{44}^{22}d_{44}^{33} - (d_{44}^{23})^2.$$

De plus, en vertu de la formule (4) :

$$D_{34}a_{11} = d_{34}^{22}d_{34}^{43} - d_{34}^{23}d_{34}^{42} = d_{22}^{34}d_{33}^{44} - d_{33}^{24}d_{44}^{23}.$$

La substitution de ces valeurs dans l'expression de D donne, en supprimant le facteur commun d_{33}^{44},

$$a_{11}^2 D = d_{33}^{44}[d_{22}^{33}d_{22}^{44} - (d_{22}^{34})^2] - d_{44}^{23}[d_{22}^{33}d_{44}^{33} - d_{22}^{34}d_{33}^{24}] - d_{33}^{24}[d_{22}^{44}d_{33}^{24} - d_{22}^{34}d_{44}^{23}].$$

Mais on a

$$d_{22}^{23}d_{22}^{44} - (d_{22}^{34})^2 = a_{11}D_{22}$$

$$d_{22}^{33}d_{44}^{23} - d_{22}^{34}d_{33}^{24} = d_{23}^{32}d_{23}^{44} - d_{23}^{42}d_{23}^{34} = a_{11}D_{23}$$

$$d_{22}^{44}d_{33}^{24} - d_{22}^{34}d_{44}^{23} = d_{24}^{42}d_{24}^{33} - d_{24}^{32}d_{24}^{43} = -a_{11}D_{24}$$

Il reste donc

$$a_{11}D = d_{33}^{44}D_{22} - d_{44}^{23}D_{23} + d_{33}^{24}D_{24}.$$

Comme on a déjà

$$D = 0, \quad D_{23} = 0, \quad D_{23} = 0,$$

il en résulte $d_{33}^{44}D_{22} = 0$ et si d_{33}^{44} est différent de zéro, D_{22} sera nul, par suite aussi D_{12}.

On démontrerait de même la relation

$$a_{22}D = d_{33}^{44}D_{11} - d_{44}^{13}D_{13} + d_{33}^{14}D_{14}$$

qui entraîne $D_{11} = 0$, en supposant toujours $d_{44}^{33} \gtrless 0$.

Il résulte de ce qui précède que si $D = 0$ et si l'un au moins des mineurs principaux du second ordre d_{pp}^{q} n'est pas nul, il suffit que deux des mineurs principaux du premier ordre, savoir D_{pp} et D_{qq}, soient nuls, pour que tous les autres le soient.

— La conclusion est en défaut lorsque tous les mineurs de la forme d_{pp}^{qq} sont nuls à la fois. Je dis que dans ce cas la nullité d'un des mineurs principaux du premier ordre entraîne celle du déterminant D.

Soit par exemple $D_{44} = 0$. On a

$$D \cdot d_{44}^{33} = D_{44}D_{33} - (D_{34})^2;$$

puisque $d_{44}^{33} = 0$ et $D_{44} = 0$, on en conclut $D_{34} = 0$.

De même

$$D \cdot d_{44}^{22} = D_{44} \cdot D_{22} - (D_{24})^2;$$

donc

$$D_{24} = 0;$$

puis

$$a_{11} \cdot D_{44} = d_{44}^{22}d_{44}^{33} - (d_{44}^{23})^2$$

et par suite,

$$d_{44}^{23} = 0.$$

Enfin l'équation

$$a_{11}D = d_{33}^{44}D_{22} - d_{44}^{23}D_{23} + d_{33}^{24}D_{24}$$

fait voir que si a_{11} n'est pas nul, D est nul.

Ajoutons maintenant les conditions $D_{33} = 0$, $D_{22} = 0$; on conclura du développement

$$D = a_{11}D_{11} + a_{12}D_{12} + \dots$$

que D_{11} doit être nul, car on sait déjà que $D_{12} = 0$, $D_{13} = 0$, $D_{14} = 0$, à cause de $D = 0$, $D_{22} = 0$, $D_{33} = 0$, $D_{44} = 0$.

— Reste à examiner le cas où a_{11} serait nul en même temps que les mineurs principaux du second ordre.

Alors de l'égalité $d_{22}^{11} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, on conclut $a_{12} = 0$, de même $a_{13} = 0$. $a_{14} = 0$. Le polynôme n'a plus que trois variables x_2, x_3 et x_4. Pour qu'il se réduise à deux carrés, il suffit que l'on ait $D_{11} = 0$; au reste, comme on a en outre $d_{11}^{22} = 0$, $d_{11}^{33} = 0$, $d_{11}^{44} = 0$, il est facile de voir que ce polynôme à trois variables se réduit à un seul carré.

En résumé, pour que le polynôme à quatre variables soit une somme de deux carrés, trois conditions sont toujours suffisantes.

1° Si l'un au moins des mineurs du second ordre d_{pp}^{qq} n'est pas nul, il suffira que l'on ait

$$D = 0, \quad D_{pp} = 0, \quad D_{qq} = 0.$$

2° Si tous les mineurs principaux du second ordre sont nuls, il suffit que trois des mineurs principaux du premier ordre le soient.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1884)

(*Suite*, voir p. 161.)

33. — Trouver la surface podaire Σ d'un ellipsoïde E ; les normales aux plans tangents étant abaissées du centre O, démontrer que Σ est la transformée par rayons recteurs réciproques d'un certain ellipsoïde E′ ayant les mêmes plans principaux que E, le pôle d'inversion étant au point O.

34. — On donne une conique à centre et deux diamètres conjugués mobiles ; trouver :

1° L'équation générale des hyperboles équilatères H qui passent par les extrémités de ces diamètres ;

2° Déduire le lieu des foyers de H du lieu décrit par le sommet réel.

35. — On donne les dimensions (*) d'une conique pas-

(*) C'est-à-dire la *grandeur* des axes.

sant par deux points fixes A, B; trouver le lieu des points communs à cette conique et à la polaire d'un point fixe P.

36. — On donne quatre points fixes A, B, C, D et on demande le lieu des points M tels que les droites joignant ce point aux points fixes forment un faisceau harmonique.

37. — Lieu décrit par les droites Δ qui font avec deux droites fixes OA, OB, des angles dont la somme est constante.

38. — Résoudre l'équation

$$27(x - 1)^3 + 8(x + 1)^3 = 0;$$

et la suivante

$$(x + 2)^3 + 8(x - 1)^3 = 0.$$

39. — On considère dans une conique deux cordes AB, A'B', conjuguées, c'est-à-dire, telles que le pôle de l'une soit situé sur l'autre; démontrer que les extrémités et les pôles de ces deux cordes appartiennent à la même conique.

40. — On donne deux droites fixes Δ, Δ'; sur Δ deux points fixes P, Q; sur Δ' un troisième point fixe R.

Cela posé, de part et d'autre du point R on prend deux points variables β, β', équidistants de R et l'on mène les droites $P\beta$, $Q\beta'$, qui se rencontrent en un point I.

Trouver le lieu du point I.

41. — Trouver la dérivée de

$$y = \text{arc sin}\left(\frac{1}{\cos x}\right). \qquad (?)$$

42. — Par un point fixe on mène des transversales à une surface du second ordre donnée; trouver le lieu des milieux des cordes ainsi obtenues. Peut-on prévoir à priori le degré de l'équation à laquelle on doit aboutir?

43. — On donne l'équation

$$x^3 + px + q = 0,$$

trouver l'équation transformée au moyen de la formule

$$y = \frac{a^2}{(b + 1)(c + 1)},$$

a, b, c, désignant les trois racines de l'équation donnée.

44. — Construire les courbes qui sont représentées respectivement par les équations:

$$1^\circ\ y^2 - 2xy + x^4 = 0,$$
$$2^\circ\ xy(x + y) + x^2 + y^2 = 0,$$
$$3^\circ\ (x + y)(x^2 + y^2) + y - x = 0,$$
$$4^\circ\ 2x^3 + y^3 - 3y = 0.$$

QUESTIONS PROPOSÉES

145. — On considère l'une des surfaces du second ordre qui passent par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, et un plan. La section est une conique dont on demande les foyers. — Lieu de ces foyers quand la surface change; lieu des foyers lorsque la surface restant la même, le plan se déplace parallèlement à lui-même. *(E. Amigues.)*

146. — On considère la courbe Γ qui correspond à l'équation

$$ay^2 = x^3.$$

Ayant pris sur l'axe de cette courbe un point P, sur OP comme diamètre (O est le point de rebroussement de Γ), on décrit un cercle Δ qui coupe Γ en un point M; la tangente à Γ en ce point M coupe Δ en un point I. Vérifier que le lieu décrit par ce point I est la courbe unicursale qui correspond aux formules :

$$\frac{x}{a} = \frac{t^4}{4 + 9t^2}, \quad -\frac{y}{a} = \frac{t^3(2 + 3t^2)}{4 + 9t^2}.$$

(G. L.)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER, — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE 20, PARIS. — 21434-4.

REPRÉSENTATION PLANE DES QUADRIQUES

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 193.)

4. Principe de la transformation omaloïdale. — Pour nous borner, et aussi pour éviter toute confusion, nous viserons uniquement dans ce qui va suivre l'ellipsoïde. De plus, les axes ωt, $\omega\theta$ seront supposés rectangulaires.

Dans cette manière de voir : à l'ellipsoïde E correspond un plan Π ; et, pour le distinguer des autres plans, nous l'appellerons *plan fondamental* de la transformation. Si un point M décrit, sur E, une certaine courbe Γ, le point correspondant m décrit, sur le plan fondamental, une courbe correspondante γ ; et réciproquement.

On comprend donc comment cette représentation plane des surfaces constitue une véritable transformation, permettant de déduire les propriétés de l'espace, de celles du plan.

La simplicité des résultats auxquels conduit cette méthode de transformation résulte, principalement, du théorème suivant qui, dans cette théorie, peut être considéré comme fondamental.

5. Théorème. — *A une ellipse* U *tracée sur l'ellipsoïde* E *correspond un cercle* u *sur le plan* Π*; le centre* ω *de* U *a pour correspondant sur* E *un point* Ω, *obtenu en cherchant le point d'intersection de* E, *avec la droite qui joint le sommet* A' *au pôle de* U (*).

Soit

$$\alpha \frac{x}{a} + \beta \frac{y}{b} + \gamma \frac{z}{c} - \delta = 0, \qquad (1)$$

(*) Par abréviation, nous appelons *pôle d'une section plane* Γ *d'une quadrique* le point par lequel passent tous les plans tangents ayant leurs points de contact sur Γ ; c'est, en d'autres termes, le pôle du plan de la section.

l'équation du plan P sur lequel est placée l'ellipse considérée Γ. Les coordonnées d'un point M mobile sur U vérifient simultanément l'équation (1) et celle de l'ellipsoïde; les coordonnées (t, θ) du point m, point correspondant à M, et mobile sur le plan Π, vérifient donc la relation

$$\alpha(1 - t^2 - \theta^2) + 2\beta t + 2\gamma\theta - \delta(1 + t^2 + \theta^2) = 0, \qquad (u)$$

ou

$$(\delta + \alpha)(t^2 + \theta^2) - 2\beta t - 2\gamma\theta - \delta + \alpha = 0. \quad (u')$$

Nous reviendrons tout à l'heure sur l'hypothèse : $\delta + \alpha = 0$; supposons, pour l'instant, $\delta + \alpha$ différent de zéro.

L'équation (u') représente alors un cercle; ainsi les ellipses tracées sur l'ellipsoïde se transforment en circonférences sur le plan fondamental.

Démontrons maintenant que le centre ω du cercle (u) a bien pour correspondant, sur E, le point Ω, déterminé comme nous l'avons dit.

A cet effet, remarquons d'abord que les coordonnées (t', θ') de ω sont données par les formules :

$$t' = \frac{\beta}{\alpha + \delta}, \qquad \theta' = \frac{\gamma}{\alpha + \delta}.$$

Soient x', y', z' les coordonnées de Ω, nous avons, conformément aux formules (E),

$$\left.\begin{aligned} \frac{x'}{a} &= \frac{(\alpha + \delta)^2 - \beta^2 - \gamma^2}{(\alpha + \delta)^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \\ \frac{y'}{b} &= \frac{2\beta(\alpha + \delta)}{(\alpha + \delta)^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \\ \frac{z'}{c} &= \frac{2\gamma(\alpha + \delta)}{(\alpha + \delta)^2 + \beta^2 + \gamma^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Appelons maintenant (x'', y'', z'') les coordonnées du pôle υ de U. Le sommet A' ($-a$, o, o) sera en ligne droite avec les points Ω et υ, si les égalités

$$\frac{x' + a}{x'' + a} = \frac{y'}{y''} = \frac{z'}{z''}.$$

sont vérifiées.

Or, nous avons

$$\frac{x''}{a} = \frac{\alpha}{\delta}, \qquad \frac{y''}{b} = \frac{\beta}{\delta}, \qquad \frac{z''}{c} = \frac{\gamma}{\delta}; \qquad (2)$$

et par suite

$$\frac{x'' + a}{a} = \frac{\delta + \alpha}{\delta}.$$

D'ailleurs

$$\frac{x' + a}{a} = \frac{2(\alpha + \delta)^2}{(\alpha + \delta)^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Ces deux dernières égalités donnent, par combinaison,

$$\frac{x' + a}{x'' + a} = \frac{2\delta(\delta + \alpha)}{(\alpha + \delta)^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

D'autre part, les égalités (1) et (2) prouvent que

$$\frac{y'}{y''} = \frac{2\delta(\delta + \alpha)}{(\alpha + \delta)^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

et que

$$\frac{z'}{z''} = \frac{2\delta(\delta + \alpha)}{(\alpha + \delta)^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Les trois rapports:

$$\frac{x' + a}{x'' + a}, \quad \frac{y'}{y''}, \quad \frac{z'}{z''},$$

sont donc égaux; et le théorème énoncé se trouve ainsi établi.

Il nous reste à examiner le cas où l'on a $\delta + \alpha = 0$.

6. Théorème. — *Dans la transformation omaloïdale, les ellipses tracées sur* E, *et passant par le sommet* A', *deviennent des droites sur le plan* Π;

Réciproquement, *toute droite de* Π *provient d'une ellipse de* E, *passant par le sommet* A'.

La première partie résulte immédiatement de l'équation (u); établissons donc la réciproque.

Soit

$$At + B\theta + C = 0, \qquad (l)$$

l'équation d'une droite l du plan Π. Les formules (e), trouvées plus haut,

$$t = \frac{ay}{b(x + a)}, \quad \theta = \frac{az}{c(x + a)},$$

donnent

$$A\frac{y}{b} + B\frac{z}{c} + C\frac{x + a}{a} = 0. \qquad (l')$$

Ainsi, lorsque le point m du plan Π décrit une droite l de ce plan, le point correspondant M, dans l'espace, a ses coordonnées qui vérifient constamment l'équation de l'ellipsoïde et l'équation (1'). Cette dernière représente l'équation générale des plans passant par le sommet A'; ainsi, à la droite l de Π, correspond sur E une ellipse passant par le sommet A'.

7. Remarques diverses. — Des deux principes généraux qui précèdent on déduit quelques cas particuliers qu'il importe de signaler.

I. — Les sections principales de l'ellipsoïde sont représentées sur Π :

1° YOZ *par un cercle* $(t^2 + \theta^2 = 1)$
2° YOX *par l'axe* ωt $(\theta = 0)$
3° ZOX *par l'axe* $\omega\theta$ $(t = 0)$.

II. — Les sections parallèles aux sections principales sont représentés sur Π :

1° *Celles qui sont parallèles à* YOZ, *par des cercles concentriques à l'origine* ω;

2° *Celles qui sont parallèles à* YOX *par des cercles ayant pour axe radical commun l'axe* ωt;

3° *Enfin, celles qui sont parallèles à* ZOX *sont représentées sur* Π *par des cercles ayant tous pour axe radical* $\omega\theta$.

III. — *Les ellipses passant par les sommets* A *et* A' *sont représentées sur* Π *par des droites passant par l'origine.*

En effet, la relation
$$y = mz,$$
entraîne l'égalité
$$\frac{t}{\theta} = \frac{mc}{b}.$$

IV. — *Les ellipses tracées sur* E *sont sécantes, tangentes, intérieures ou extérieures, en même temps que les cercles correspondants de* Π.

V. — *Aux cercles qui passent par l'origine* ω, *correspondent des ellipses passant par le sommet* A; *et réciproquement.*

En effet, si l'on suppose (§ 5) $\alpha = \delta$, le plan de la section

passe par A et, en même temps, le cercle correspondant passe par ω,

VI. — *Lorsque les ellipses tracées sur* E *ont leurs plans passant par une droite fixe* D, *les cercles correspondants sur* Π, *admettent le même axe radical.*

En effet, la droite D rencontre E, en deux points M′, M″, (réels ou imaginaires). Les cercles correspondants aux ellipses obtenues par des plans sécants passant par D passeront constamment par deux points fixes, savoir les points m' et m'' qui, sur Π, correspondent aux points M′ et M″.

La réciproque est évidemment vraie.

VII. — *Lorsque quatre ellipses* A, B, C, D, *tracées sur* E, *sont situées dans des plans qui concourent en un même point, les cercles correspondants* a, b, c, d, *tracés sur* Π, *ont le même centre radical.*

Supposons, en effet, que le plan d'une ellipse, mobile sur E, passe constamment par un point fixe $(x', y' z')$; nous avons alors

$$\alpha \frac{x'}{a} + \beta \frac{y'}{b} + \gamma \frac{z'}{c} - \delta = 0.$$

L'équation (u), (§ 5), devient

$$\alpha \left\{ 1 - t^2 - \theta^2 - \frac{x'}{a}(1 + t^2 + \theta^2) \right\} + \beta \left\{ 2t - \frac{y'}{b} (1 + t^2 + \theta^2) \right\} + \gamma \left\{ 2\theta - \frac{z'}{c} (1 + t^2 + \theta^2) \right\} = 0.$$

Cette relation a la forme

$$\alpha U + \beta V + \gamma W = 0,$$

$U = 0$, $V = 0$, $W = 0$, représentant des circonférences. Ainsi les cercles qui correspondent aux ellipses dont les plans pivotent autour d'un point fixe, forment un *réseau linéaire*. On sait que, dans ce cas, tous ces cercles coupent orthogonalement un cercle fixe, ou, ce qui revient au même, ont le même centre radical.

VIII. — *A la droite de l'infini du plan* Π, *correspond le sommet* A′ *de l'ellipsoïde* E.

Supposons que t et θ grandissent au delà de toute limite,

en conservant un rapport déterminé K. Les formules (E), en posant

$$t = K\theta,$$

deviennent

$$\frac{x}{a} = \frac{1 - \theta^2(1 + K^2)}{1 + \theta^2(1 + K^2)}, \quad \frac{y}{b} = \frac{K\theta}{1 + \theta^2(1 + K^2)}, \quad \frac{z}{c} = \frac{\theta}{1 + \theta^2(1 + K^2)}.$$

Lorsque θ croît au delà de toute limite, on a

$$\lim \frac{x}{a} = -1, \quad \lim y = 0, \quad \lim z = 0,$$

et ceci, *quel que soit* K. Ainsi, à la droite de l'infini correspond le point A', ou, si l'on préfère, l'ellipse infiniment petite constituée par l'intersection de E avec le plan tangent à l'ellipsoïde au point A'.

IX. — *A deux droites parallèles du plan* Π, *correspondent deux ellipses dont les plans ont pour traces, sur* YOZ, *deux droites parallèles.*

En effet, aux droites qui ont pour équation, respectivement

$$At + B\theta + C = 0, \qquad At + B\theta + C' = 0,$$

correspondent deux plans dont les équations sont

$$A\frac{y}{b} + B\frac{z}{c} + C\left(1 + \frac{x}{a}\right) = 0, \quad A\frac{y}{b} + B\frac{z}{c} + C'\left(1 + \frac{x}{a}\right) = 0.$$

8. Remarque fondamentale. — C'est ici le lieu d'examiner le rôle prépondérant que semble jouer le sommet A' dans la transformation que nous développons. Nous voulons faire observer ici que cette importance n'est qu'apparente; elle tient uniquement aux formules particulières que nous avons adoptées.

Une transformation homographique, effectuée sur l'ellipsoïde, met le fait que nous venons d'avancer, hors de doute.

Considérons, par exemple, la formule suivante l'une de celles qui correspondent à la transformation homographique que nous imaginons).

$$\frac{X}{a} = \frac{A\frac{x}{a} + B\frac{y}{b} + C\frac{z}{c} + D}{M\frac{x}{a} + N\frac{y}{b} + P\frac{z}{c} + Q}.$$

Si nous remplaçons dans cette égalité : $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$, par leurs valeurs exprimées au moyen des formules (E), nous voyons immédiatement que nous avons

$$\frac{X}{a} = \frac{U}{\varphi}, \qquad (1)$$

$U = 0$, $\varphi = 0$, représentant deux cercles dans le système de coordonnées t, θ.

Cette remarque s'applique aux autres formules de la transformation homographique

$$\frac{Y}{b} = \frac{V}{\varphi}, \quad \frac{Z}{c} = \frac{W}{\varphi}. \qquad (2)$$

Ceci posé, si le point (x, y, z) décrit l'ellipsoïde E, ce qui a lieu lorsque t et θ varient arbitrairement, le point correspondant (X, Y, Z) que nous venons de considérer décrit, lui aussi, un ellipsoïde E′, lequel d'après les formules (1) et (2) sera représenté, point par point, sur un plan.

Quant au point A′ de E, il est remplacé sur E′ par un point α' de cette surface ; point qui n'est plus un sommet de la surface et qui n'a d'autre particularité que de correspondre, conformément aux formules (1) et (2), à des valeurs infinies des paramètres t, θ ; en un mot, c'est le point qui correspond à la droite de l'infini du plan $t\omega\theta$.

Ce point particulier α' est donc, en définitive, *un point quelconque* de l'ellipsoïde considéré E′ ; et sa position sur cette surface dépend, uniquement, des formules que l'on a choisies pour effectuer la transformation omaloïdale de la quadrique. Mais, ces formules une fois prises, la position de α' est bien déterminée et ce point de la propriété caractéristique suivante : *les ellipses qui sont tracées sur la surface et qui passent par α', se transforment en droites sur le plan fondamental.*

Nous distinguerons ce point en l'appelant le *point central* de la transformation considérée.

9. — Un autre point de la quadrique est mis en évidence dans la transformation qui nous occupe ; nous voulons par-

ler du sommet A; ou, dans la transformation générale, du point α qui lui correspond homographiquement.

L'importance du sommet A a déjà été observée quand nous avons fait observer (§ 7; V) que les cercles tracés par l'origine ω se transforment en ellipses qui, sur l'ellipsoïde, passent constamment par le sommet A de cette surface.

La propriété suivante met encore en lumière l'importance de ce point A.

(A suivre.)

NOTE D'ALGÈBRE

Par M. **Amigues**, professeur au Lycée de Marseille.

---

1. — *Soit* f(x, y) *une fonction entière et homogène de* x *et de* y. *Si cette fonction admet le facteur*

$$(ax + by)^p,$$

ses p *dérivées de l'ordre* (p — 1) *admettent le facteur*

$$ax + by.$$

Ce théorème résulte de ce fait que si toutes les dérivées d'un certain ordre contiennent ce facteur à la puissance h, toutes les dérivées de l'ordre suivant le contiennent à la puissance $h - 1$.

2. — Réciproquement si l'on a une fonction entière et homogène de x et de y, $f(x, y)$, et que les p dérivées de l'ordre $p - 1$ contiennent le facteur

$$ax + by,$$

la fonction $f(x, y)$ admet le facteur

$$(ax + by)^p.$$

Ici, encore, il suffit de prouver que, si toutes les dérivées d'un certain ordre admettent le facteur

$$(ax + by)^h,$$

toutes les dérivées de l'ordre précédent admettent le facteur

$$(ax + by)^{h+1}.$$

A cet effet, soit $\varphi(x, y)$ une de ces dérivées de l'ordre

précédent. On a par hypothèse,

$$\varphi'_x(x,y) = (ax + by)^h \mathrm{P}$$
$$\varphi'(x,y) = (ax + by)^h \mathrm{Q}.$$

P et Q étant des polynômes homogènes en x et y.

Si k est le degré de la fonction φ, l'identité d'Euler est

$$k\varphi(x,y) = x\varphi'_x(x,y) + y\varphi'_y(x,y),$$

et elle donne ici

$$k\varphi(x,y) = (ax + by)^h(\mathrm{P}x + \mathrm{Q}y).$$

Il s'agit donc de prouver que l'expression

$$\mathrm{P}x + \mathrm{Q}y$$

admet le facteur $(ax + by)$.

Pour cela, on remarque que l'on a

$$\varphi''_{xy}(x,y) = h\mathrm{P}(ax + by)^{h-1}b + (ax + by)^h \mathrm{P}'_y,$$
$$\varphi''_{yx}(x,y) = h\mathrm{Q}(ax + by)^{h-1}a + (ax + by)^h \mathrm{Q}'_x.$$

Se servant alors de la formule

$$\varphi''_{xy} = \varphi''_{yx},$$

dont la légitimité, *quant aux polynômes*, est incontestable, on a

$$h\mathrm{P}(ax + by)^{h-1}b + (ax + by)^h \mathrm{P}'_y = h\mathrm{Q}(ax + by)^{h-1}a + (ax + by)^h \mathrm{Q}'_x.$$

Les facteurs a et b ne sont pas nuls tous deux : supposons que a soit différent de zéro. Alors, de l'identité ci-dessus on tire

$$\mathrm{Q} = \frac{b}{a}\mathrm{P} + (ax + by)\mathrm{R},$$

R étant un polynôme homogène en x et y.

D'après cette valeur de Q, on a

$$\mathrm{P}x + \mathrm{Q}y = \mathrm{P}x + \frac{b}{a}\mathrm{P}y + (ax + by)\mathrm{R};$$

ou

$$a(\mathrm{P}x + \mathrm{Q}y) = (\mathrm{P} + a\mathrm{R}y)(ax + by).$$

C. Q. F. D.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Hadamard (*) à M. G. de Longchamps.

... L'avantage de la méthode que j'emploie dans l'étude de l'hypocycloïde, est que la courbe est rapportée, non pas à ses axes de symétrie, mais *à deux tangentes rectangulaires* QUELCONQUES. Elle permet de démontrer avec la plus grande facilité toutes les propriétés que vous m'avez indiquées.

Pour chercher l'enveloppe des asymptotes des hyperboles équilatères d'un faisceau ponctuel, je prends pour axes les asympotes d'une de ces hyperboles, c'est-à-dire deux tangentes rectangulaires de la courbe. Alors l'équation générale des coniques du faisceau est

$$x^2 - y^2 + 2kxy + 2gx + 2fy + c + kc' = 0.$$

En exprimant qu'une droite coupe une de ces courbes en deux points à l'infini, on obtient l'équation de cette droite en fonction de son coefficient angulaire

$$\lambda^3 x - \lambda^2(y - 2f) + \lambda(x + 2g) - y = 0. \qquad (1)$$

En prenant les dérivées du premier membre de cette équation par rapport à λ et à la variable d'homogénéité, on a les équations

$$3\lambda^2 x - 2\lambda(y - 2f) + (x + 2g) = 0 \qquad (2)$$

$$-\lambda^2(y - 2f) + 2\lambda(x + 2g) - 3y = 0. \qquad (3)$$

L'élimination de λ entre ces équations donne l'équation de la courbe

$$(2fg + fx - gy + 4xy)^2$$
$$=[(x+2g)^2+3y(2f-y)][(y-2f)^2-3x(x+2g)]. \quad (4)$$

Cette équation représente une hypocycloïde à trois rebroussements.

Pour le voir nous poserons

$$x = -\frac{g}{2} + \rho\cos\omega \qquad y = \frac{f}{2} + \rho\sin\omega.$$

(*) Reçu le premier à l'École Polytechnique et à l'École Normale.

L'équation devient

$$[4\rho^2 \cos\omega \sin\omega + 3f\rho\cos\omega - 3g\rho\sin\omega]^2 =$$

$$[\rho^2(1 - 4\sin^2\omega) + 3\rho(f\sin\omega + g\cos\omega) + \frac{g}{4}(f^2 + g^2)] \times$$

$$[\rho^2(1 - 4\cos^2\omega) - 3\rho(f\sin\omega + g\cos\omega) + \frac{g}{4}(f^2 + g^2)]$$

ou en ordonnant par rapport à ρ et divisant par 3

$$\rho^4 + 4\rho^3[(f\sin\omega + g\cos\omega)\cos 2\omega - (g\sin\omega - f\cos\omega)\sin 2\omega]$$
$$+ \frac{g}{2}\rho^2(f^2 + g^2) - \frac{3^3}{2^4}(f^2 + g^2)^2 = 0.$$

Ce qui, en posant

$$f = 2r\sin 3\alpha \qquad g = 2r\cos 3\alpha,$$

d'où

$$\frac{f}{g} = \operatorname{tg} 3\alpha \tag{5}$$

$$\sqrt{f^2 + g^2} = 2r, \tag{6}$$

donne l'équation polaire de l'hypocycloïde, où ω est remplacé par $\omega - \alpha$. Le cercle inscrit est le cercle décrit du point $\left(-\frac{g}{2}, \frac{f}{2}\right)$ comme centre avec un rayon égal à $\frac{\sqrt{f^2 + g^2}}{2}$.

Il a donc pour équation :

$$x^2 + y^2 + gx - fy = 0.$$

C'est précisément l'équation du lieu des centres des hyperboles du faisceau; ce qui démontre que le lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'hypocycloïde est le cercle inscrit.

Pour avoir les valeurs de x et de y en fonction de λ, il suffit de résoudre les équations (2) et (3). Celles-ci donnent :

$$x = 2\,\frac{g\lambda^2 - 2f\lambda - g}{(\lambda^2 + 1)^2} \qquad y = 2\,\frac{\lambda^2(f\lambda^2 + 2g\lambda - f)}{(\lambda^2 + 1)^2}. \tag{7}$$

Si l'on prend les dérivées par rapport à λ, on a

$$x'_\lambda = -4\frac{g\lambda^3 - 3f\lambda^2 - 3g\lambda + f}{(\lambda^2 + 1)^3} \quad y'_\lambda = -4\lambda\frac{g\lambda^3 - 3f\lambda^2 - 3g\lambda + f}{(\lambda^2 + 1)^3}. \tag{8}$$

Le facteur $g\lambda^3 - 3f\lambda^2 - 3g\lambda + f$, égalé à 0 donne les trois points de rebroussement. On aura donc l'équation de la courbe rapportée à une tangente de rebroussement et à la tangente perpendiculaire en faisant $f = 0$. On voit alors par l'équation (1) que la somme des inclinaisons des tan-

gentes issues d'un point donné sur l'axe des x est égale à un multiple de π; car les tangentes trigonométriques de ces angles satisfont à la relation

$$\lambda' + \lambda'' + \lambda''' = \lambda'\lambda''\lambda'''.$$

Cherchons maintenant les points d'intersection de la courbe avec l'axe des x. En faisant $y = 0$ dans l'équation (4), on trouve

$$(x + 2g)^2(x^2 + 2gx - f^2) = 0. \qquad (9)$$

Le prèmier facteur donne le point M de contact, le second les points μ_1 et μ_2. Comme d'ailleurs les points M_2 et M_1 où l'axe des x coupe le cercle inscrit ont respectivement pour abscisses 0 et $-g$, il en résulte immédiatement les égalités $MM_1 = M_1M_2$, $M\mu_1 = M_2\mu_2$; d'ailleurs, la relation $\mu_1\mu_2 = 4r$ résulte de l'équation (9).

D'ailleurs les λ des points μ_1 et μ_2 sont donnés par l'équation

$$f\lambda^2 + 2g\lambda - f = 0.$$

Les tangentes en ces points sont donc rectangulaires.

Pour trouver leur point d'intersection, il suffit de remarquer qu'elles sont les asymptotes de l'hyperbole

$$x^2 - \frac{2g}{f}xy - y^2 + 2gx + 2fy + c - \frac{g}{f}c' = 0.$$

Le centre de cette hyperbole est donné par les équations

$$x - \frac{g}{f}y + g = 0, \quad -\frac{g}{f}x - y + f = 0,$$

et par suite a pour coordonnées

$$x = 0, \quad y = f.$$

Il est donc sur la tangente perpendiculaire à $\mu_1\mu_2$.

Si dans l'équation (1) nous faisons

$$x = y = 0,$$

nous trouvons, outre

$$\lambda = 0 \text{ et } \lambda = \infty, \quad f\lambda + g = 0.$$

La troisième tangente menée par l'origine a donc pour équation

$$gx - fy = 0.$$

D'ailleurs la tangente au cercle est

$$gx - fy = 0.$$

Ces deux droites sont donc également inclinées sur les axes.

Reprenons la formule (5). Dans cette formule, α est l'angle que fait la droite ωS avec l'axe des x. D'ailleurs la droite ωM_1 fait avec ce même axe l'angle 3α et ωM_2 l'angle -3α. Comme on a :

$$\alpha - (-3\alpha) = 2(3\alpha - \alpha),$$

on a :

$$SM_2 = 2SM_1.$$

Enfin cherchons le rayon de courbure au point M ($\lambda = 0$).

Ce rayon de courbure a pour expression

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$$

$\frac{dy}{dx}$ est nul et $\frac{d^2y}{dx^2}$ est égal à $\frac{1}{x'\lambda}$ c'est-à-dire (au signe près), à $\frac{1}{4f}$. Donc le rayon de courbure est égal à $4f$, c'est-à-dire à 8 fois la distance du point ω à la tangente $\mu_1\mu_2$.

Voici maintenant les propriétés que j'ai trouvées en dehors des précédentes.

D'abord les égalités $MM_1 = MM_2$, $\mu_1 M_1 = M_1\mu_2$ sont des cas particuliers d'une proposition plus générale, à savoir que *le point* M_1 *est le milieu du segment intercepté sur la tangente en* M *par deux tangentes rectangulaires.*

En effet, faisant dans l'équation (1) $y = 0$, on a

$$x = -2\,\frac{\lambda f + g}{\lambda^2 + 1}.$$

Si l'on change λ en $-\frac{1}{\lambda}$ on a

$$x' = -2\,\frac{g\lambda^2 - \lambda f}{\lambda^2 + 1}.$$

La demi-somme de ces valeurs est égale à $-g$.

Prenons alors sur la tangente M_1M_2 un point P. Pour trouver les deux autres tangentes issues de ce point, remarquons que les longueurs PI′, PI″, interceptées sur ces tangentes par la tangente perpendiculaire à M_1M_2 sont divisées en deux parties égales par les points M_1', M_1'' situés sur le

cercle inscrit. Ces points seront donc les points de rencontre de ce cercle avec la perpendiculaire au milieu de PM_2. Mais on verrait de même que M_1M_1', par exemple, est perpendiculaire à PM_1''. Il en résulte que *le point* P *est le point de rencontre des hauteurs du triangle* $M_1M_1'M_1''$. D'ailleurs, puisque $PM_2 = 2PH$, le triangle $M_2M_2'M_2''$ est homothétique par rapport au point P du triangle HH'H'' formé par les pieds des hauteurs du triangle $M_1M_1'M_1''$; or celui-ci est circonscrit à un cercle de centre I ; donc *le point* P *est le centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle* $M_2M_2'M_2''$.

Considérant maintenant les triangles égaux $PM_1'M_1''$, $M_2M_1'M_1''$, on a

$$PM_1' \, . \, PM_1'' = M_2M_1' \, . \, M_2M_1'' = 2r \, . \, M_2H = r \, . \, PM_2 = \frac{pr}{PM_1},$$

p étant la puissance du point P par rapport au cercle. Donc

$$PM_1 \, . \, PM_1' \, . \, PM_1'' = pr. \qquad (10)$$

On a encore, en désignant par V, V', V'' les angles que font entre elles les trois tangentes :

$$PM^2 = 2PM_1' \cos V'' \text{ ou } p = 2PM_1 \, . \, PM_1' \cos V''$$

ou encore

$$\frac{PM_1''}{\cos V''} = \frac{PM_1}{\cos V} = \frac{PM_1'}{\cos V'} = 2r. \qquad (11)$$

Remarquons maintenant que $M'M_1'' = 2r \sin V$. On a donc

$$\overline{PM_1'}^2 + \overline{PM_1''}^2 - 2PM_1' \, . \, PM_1'' \cos V = 4r^2 - 4r^2 \cos^2 V,$$

ou en remplaçant $2PM' \, . \, PM_1''$, cos V et $2r \cos V$ par leurs valeurs :

$$\overline{PM_1}^2 + \overline{PM_1'}^2 + \overline{PM_1''}^2 = 4r^2 + p. \qquad (12)$$

Les longueurs de deux des tangentes issues d'un point à l'hypocloïde donnent deux conditions qui permettent de déterminer le point. Il doit donc exister entre les longueurs des trois tangentes menées par un point à la courbe une relation indépendante de la position du point. Les égalités précédentes vont nous permettre de trouver cette relation. Pour cela, soient α, β, γ les longueurs de ces tangentes, l, l', l'', les longueurs PM_1, PM_1', PM_1''.

On a :

$$ll'l'' = pr, \quad l = 2r \cos V, \quad l' = 2r \cos V', \quad l'' = 2r \cos V''$$

avec

$$\alpha = 2l - \frac{p}{l}\ (*),\ \beta = 2l' - \frac{p}{l'},\ \gamma = 2l'' - \frac{p}{l''}$$

et

$$+ V + V' + V'' = 0.$$

En remplaçant dans la première égalité p, successivement, par $2l^2 - l\alpha$, $2l'^2 - l'\beta$, etc.; on a

$$l'l'' = 2lr - \alpha r, \text{ etc.},$$

ou

$$4r \cos V' \cos V'' = 4r \cos V - \alpha.$$

Mais

$$\cos V = \cos V' \cos V'' - \sin V' \sin V''.$$

Donc

$$\sin V' \sin V'' = \frac{-\alpha}{4r}\ \sin V'' \sin V = \frac{-\beta}{4r},$$

$$\sin V \sin V' = \frac{-\gamma}{4r}.$$

Or, les angles V, V', V'' ayant une somme nulle, leurs sinus satisfont à la relation

$$\sin^4 V + \sin^4 V' + \sin^4 V'' - 2 \sin^2 V' \sin^2 V'' - 2 \sin^2 V'' \sin^2 V^4$$
$$- 2 \sin^2 V + \sin^2 V'\ 4 \sin^2 V \sin^2 V' \sin^2 V'' = 0.$$

En remplaçant $\sin^2 V$, etc. par $-\frac{\beta\gamma}{4r\alpha}$ etc., nous avons

$$\frac{\beta^2\gamma^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma^2} - 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \frac{\alpha\beta\gamma}{r} = 0.$$

ou encore en multipliant par $\frac{r^8}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$,

$$\left(\frac{r^2}{\alpha}\right)^4 + \left(\frac{r^2}{\beta}\right)^4 + \left(\frac{r^2}{\gamma}\right)^4 - 2\left[\left(\frac{r^2}{\alpha}\right)^2\left(\frac{r^2}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{r^2}{\beta}\right)^2\left(\frac{r^2}{\gamma}\right)^2\right.$$
$$\left. + \left(\frac{r^2}{\gamma}\right)^2\left(\frac{r^2}{\alpha}\right)^2\right] = r \cdot \frac{r^2}{\alpha} \cdot \frac{r^2}{\beta} \cdot \frac{r^2}{\gamma} \text{ (au signe près).}$$

Ce qui s'énonce : *Si l'on forme les troisièmes proportionnelles aux tangentes et au rayon du cercle inscrit, le carré de la surface du triangle qui a les longueurs ainsi obtenues pour côtés*

(*) Au signe près.

est égal au volume du parallélépipède qui a ces mêmes longueurs pour arêtes, multiplié par le seizième du rayon.

Je suis d'ailleurs sur la voie de nouvelles propriétés que j'espère trouver pendant ces vacances et que je vous enverrai.

QUESTION 65

Solution par M. AMAURY DE KERDREL, à Brest.

Trouver le lieu des centres des cercles circonscrits à tous les triangles polaires conjugués par rapport à une parabole.

(Kœhler.)

Soient $(\alpha\beta)$ les coordonnées d'un des sommets d'un triangle polaire conjugué (*) ; on sait qu'à ce sommet correspond une infinité de triangles polaires; il suffit que les deux côtés passant par $(\alpha.\beta)$ forment un faisceau harmonique avec les tangentes issues de ce point.

Prenons pour origine le point $(\alpha.\beta)$ et pour axes des axes parallèles à ceux de la parabole; l'équation de cette courbe est alors

$$(y + \beta)^2 = 2p(x + \alpha). \qquad (1)$$

La polaire de l'origine est

$$px - \beta y = \beta^2 - 2p\alpha. \qquad (2)$$

Formons une combinaison homogène entre les équations (1) et (2); nous aurons ainsi le faisceau de tangentes issues de ce point: cette combinaison est ici

$$y^2 - \frac{2(px - \beta y)^2}{\beta^2 - 2p\alpha} + \frac{(px - \beta y)^2 \times (\beta^2 - 2p\alpha)}{(\beta^2 - 2p\alpha)^2}$$

ou

$$x^2 - \frac{2\beta}{p}xy + \frac{2\alpha}{p}y^2 = 0. \qquad (3)$$

L'équation du système de droites formant avec le système (3) un faisceau harmonique est

$$x^2 - \left(\frac{2\alpha + p\lambda}{\beta}\right)xy + \lambda y^2 = 0$$

(*) Par rapport aux axes ordinaires de la parabole.

(λ étant une indéterminée) (Voir *Journal de Mathématiques spéciales*, année 1882, p. 167 et 168).

Soit

$$x^2 + y^2 - 2xx' - 2yy' = 0$$

l'équation d'un cercle passant par P et pour lequel x' et y' sont les coordonnées du centre.

Formons une combinaison homogène entre l'équation de ce cercle et l'équation (2) et exprimons que nous avons une équation identique à (4), nous aurons ainsi deux relations entre lesquelles il suffira d'éliminer λ pour avoir le lieu cherché. Cette combinaison est

$$x^2 + y^2 - \frac{2(xx' + yy')(px - \beta y)}{\beta^2 - 2p\alpha}$$

ou

$$(\beta^2 - 2p\alpha - 2px')x^2 + 2(\beta x' - py')xy \\ + (\beta^2 - 2p\alpha + 2\beta y')y^2 = 0.$$

En identifiant avec

$$x^2 - \frac{(2\alpha + p\lambda)}{\beta} + \lambda y^2 = 0$$

on a

$$\frac{2\beta x' - 2py'}{\beta^2 - 2p\alpha - 2px'} = - \frac{2\alpha + p\lambda}{\beta}$$

et

$$\lambda = \frac{\beta^2 - 2p\alpha + 2\beta y'}{\beta^2 - 2p\alpha - 2px'}$$

Éliminant λ on a

$$\frac{\beta^2 - 2p\alpha + 2\beta y'}{\beta^2 - 2p\alpha - 2px'} = - \frac{(2\beta x' - 2py')\beta}{p(\beta^2 - 2p\alpha - 2px')} - \frac{2\alpha}{p}$$

ou encore

$$2x'(\beta^2 - 2p\alpha) + 2\alpha(\beta^2 - 2p\alpha) + p(\beta^2 - 2p\alpha) = 0$$

ou en enlevant le facteur $\beta^3 - 2p\alpha$,

$$x' + \alpha + \frac{p}{2} = 0$$

ou en transportant l'origine au sommet de la parabole

$$x + \frac{p}{2} = 0.$$

Le lieu cherché est donc la directrice.

Remarque. — Si le point $(\alpha\beta)$ est sur la parabole, le facteur $\beta^2 - 2p\alpha$ est nul; dans ce cas, le cercle se réduira donc à ce point ou à la tangente en ce point. Dans le premier cas, le centre de ce cercle est le point lui-même; dans le second. le centre est à l'infini. Donc, si on tient compte du cas particulier ou $\beta^2 - 2p\alpha = 0$, la parabole proposée et la droite de l'infini font partie du lieu.

Sur la question 65, par M. Koehler.

Nous allons démontrer, en faisant usage des coordonnées trilinéaires, que la directrice d'une parabole passe par le centre du cercle circonscrit à un triangle autopolaire.

Soient a, b, c les côtés du triangle de référence; l'équation d'une conique quelconque conjuguée par rapport à ce triangle est

$$lx^2 + my^2 + nz^2 = 0.$$

On exprimera que cette conique est une parabole en écrivant que la droite à l'infini $ax + by + cz = 0$ est tangente, ce qui donne

$$a^2mn + b^2ln + c^2lm = 0. \qquad (1)$$

Cherchons le foyer; l'équation quadratique des tangentes issues d'un point (α, β, γ) est

$$(lx^2 + my^2 + nz^2)(l\alpha^2 + m\beta^2 + n\gamma^2) - (l\alpha x + m\beta y + n\gamma z)^2 = 0.$$

Cette équation doit pouvoir être identifiée avec celle d'un cercle qui est de la forme

$$(ax + by + cz)(\lambda x + \mu y + \nu z) + ayz + bzx + cxy = 0.$$

On trouve ainsi facilement les conditions suivantes, après l'élimination de λ, μ, ν:

$$\begin{aligned} mn(b\beta + c\gamma)^2 + nlb^2\alpha^2 + lmc^2\alpha^2 \\ = nl(c\gamma + a\alpha)^2 + lmc^2\beta^2 + mna^2\beta^2 \\ = lm(a\alpha + b\beta)^2 + mna^2\gamma^2 + nlb^2\gamma^2 \end{aligned}$$

qui, jointes à la relation $a\alpha + b\beta + c\gamma = 2S$ (S étant la surface du triangle de référence) déterminent les coordonnées α, β, γ des foyers.

En tenant compte de la relation (1), les équations de conditions deviennent dans le cas de la parabole

$$mn[(b\beta + c\gamma)^2 - a^2\alpha^2] = nl[(c\gamma + a\alpha)^2 - b^2\beta^2]$$
$$= lm[(a\alpha + b\beta)^2 - e^2\gamma^2]$$

ou

$$mn(b\beta + c\gamma + a\alpha) = nl[c\gamma + a\alpha + b\beta] = lm(a\alpha + b\beta + c\gamma].$$

On en conclut

$$\frac{\alpha a}{m + n} = \frac{\beta b}{n + l} = \frac{\gamma c}{l + m} = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{2(l + m + n)} = \frac{S}{l + m + n}$$

La directrice, polaire du foyer, sera

$$\frac{lx}{a}(m + n) + \frac{my}{b}(n + l) + \frac{nz}{c}(l + m = 0.$$

Il est facile de constater que cette droite passe par le centre du cercle circonscrit au triangle de référence, dont les coordonnées sont proportionnelles à cos A, cos B, cos C. En remplaçant dans l'équation précédente x, y, z par cos A, cos B, cos C, et a, b, c par les quantités proportionnelles sin A, sin B, sin C, on obtient effectivement

$$l(m + n) \cos A \sin B \sin C + m(n + l) \cos B \sin C \sin A$$
$$+ n(l + m) \cos C \sin A \sin B = mn \sin A (\cos B \sin C$$
$$+ \sin B \cos C) + nl \sin B (\cos C \sin A + \sin C \cos A)$$
$$+ lm \sin C (\cos A \sin B + \sin A \cos B) = mn \sin^2 A$$
$$+ nl \sin^2 B + lm \sin^2 C.$$

expression identiquement nulle en vertu de la relation (1).

QUESTION 89

Solution, par M. H. Bieules, lycée Saint-Louis.

On considère un cercle Δ, *et l'on prend sur la circonférence un point mobile* M. *Ayant joint ce point aux extrémités d'un diamètre fixe* AB, *du point* M *on abaisse sur* AB *une perpendiculaire* MP, *le cercle décrit de* M *comme centre avec* MP *pour rayon rencontre* MA *en* A′, *et* MB *en* B′. *Le lieu décrit par le point de rencontre de* MP *et de* A′B′ *est une courbe du douzième degré ayant pour points sextuples les points* A *et* B. *On montrera que si* AB *est l'axe des* x, *l'équation peut se résoudre par rap-*

port à y et l'on donnera la forme générale de cette courbe qui est une unicursale. (G. L.)

Je prends AB pour axe des x et le diamètre perpendiculaire pour axe des y. L'équation du cercle sera

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0. \qquad (\Delta)$$

Soient α, β les coordonnées du point M, nous aurons :

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2.$$

Je transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point M :

$$(X + \alpha)^2 + (Y + \beta)^2 - r^2 = 0 \qquad (\Delta)$$
$$Y = -\beta. \qquad (AB)$$

L'équation du faisceau de droites MA, MB est :

$$\beta X^2 - 2\alpha XY - \beta Y^2 = 0.$$

L'équation du cercle M est :

$$X^2 + Y^2 - \beta^2 = 0;$$

soit

$$aX + bY = 1.$$

l'équation de A'B', l'équation du faisceau de droites MA' et MB' est :

$$(1 - a^2\beta^2)X^2 - 2ab\beta^2XY + (1 - b^2\beta^2)Y^2 = 0.$$

J'exprime que les droites MA et MA', MB et MB' se confondent :

$$\frac{\beta}{1 - a^2\beta^2} = \frac{\alpha}{ab\beta^2} = -\frac{\beta}{1 - b^2\beta^2}$$

ou

$$(a^2 + b^2)\beta^2 = 2, \qquad \frac{\alpha}{ab\beta^2} = \frac{-\beta}{1 - b^2\beta^2}.$$

Je reviens aux anciens axes, les coordonnées d'un point du lieu sont déterminées par les équations :

$$x - \alpha = 0,$$
$$b(y - \beta) = 1,$$
$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$
$$(a^2 + b^2)\beta^2 = 2,$$
$$\frac{\alpha}{ab\beta^2} = \frac{\beta}{b^2\beta^2 - 1}.$$

J'élimine a entre ces deux dernières équations, j'ai :

$$b^4\beta^4(\alpha^2 + \beta^2) - 2b^2\beta^2(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2 = 0,$$

ou,

$$b^2\beta^2 = \frac{r \pm \beta}{r}.$$

En sortant dans la seconde équation, j'obtiens :

$$\left(\frac{y - \beta}{\beta}\right)^2 = \frac{r}{r \pm \beta}.$$

L'équation du lieu est donc :

$$\left[\frac{y - \sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right]^2 = \frac{r}{r \pm \sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Le lieu est formé de deux courbes du sixième degré. Les points A et B sont des points sextuples de ce lieu. Son équation peut s'écrire :

$$\frac{y - \sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{r}{r \pm \sqrt{r^2 - x^2}}} = \pm \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{r + x} \pm \sqrt{r - x}}$$

ou

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}\left[1 \pm \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{r + x} \pm \sqrt{r - x}}\right].$$

La courbe est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées; x ne peut varier qu'entre $-r$ et $+r$.

Considérons la branche de courbe

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}\left[1 \pm \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{r + x} \pm \sqrt{r - x}}\right].$$

Quand x varie de 0 à r, y varie de $r\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ à 0. La tangente au point B est parallèle à l'axe des y, nous avons la branche de courbe DEB.

Considérons la portion de courbe

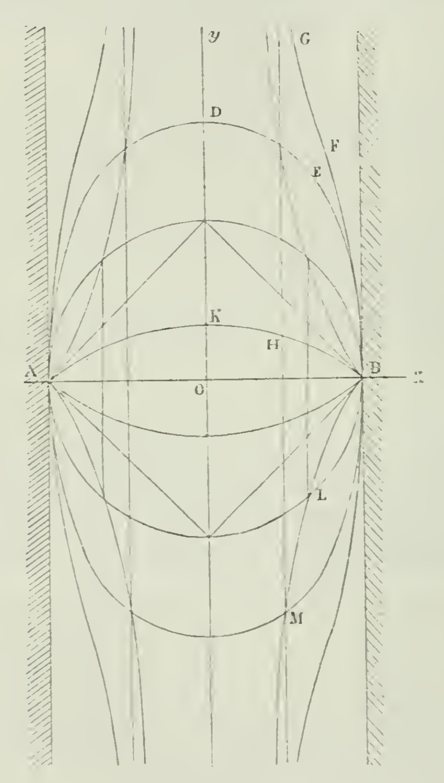
$$y = \sqrt{r^2 - x^2}\left[1 + \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{r + x} - \sqrt{r - x}}\right].$$

Quand x varie de 0 à r, y varie de $+\infty$ à 0, la tangente en B est parallèle à Oy, nous aurons la branche BFG.

Soit

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}\left[1 - \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{r + x} + \sqrt{r - x}}\right].$$

Quand x varie de O à R, y varie de $R\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ à O. La tangente en B a pour coefficient angulaire -1, nous avons la branche KHB.



Soit enfin

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}\left[1 - \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{r+x} - \sqrt{r-x}}\right].$$

Quand x varie de O à R, y varie de $-\infty$ à O. La tangente B a pour coefficient angulaire 1. Cette branche de courbe rencontre le cercle au point L de coordonnées :

$$x = R\frac{\sqrt{7}}{4}, \qquad y = \frac{3R}{4},$$

et la branche de courbe

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2}\left[1 + \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{r+x} + \sqrt{r-x}}\right]$$

au point :

$$x = \frac{r}{2}, \qquad y = -\frac{3r}{2}.$$

Nous avons la branche de courbe MLB.

Le reste de la courbe s'obtient par symétrie.

Si nous posons $x = R \cos 2\omega$, nous aurons

$$y = R \sin 2\omega - \frac{R \sin 2\omega}{\sin \omega + \cos \omega}$$

et comme

$$\sin \omega = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\cos \omega = \frac{2t}{1 + t^2}$$

x et y pourront se mettre sous la forme $\frac{f(t)}{S(t)}$, $f(t)$ et $S(t)$ étant des fonctions rationnelles de t. La courbe est donc une unicursale.

Nota. — La même question a été résolue par M. Simonet, à Lyon.

QUESTIONS PROPOSÉES

147. — Un quadrilatère variable OGHM se déplace et se déforme suivant les conditions suivantes :

1° Le point O est fixe;

2° La longueur OG est constante :

3° L'angle G est droit;

4° Le côté HM est à chaque instant parallèle à OG;

5° L'angle GOM varie de grandeur et de position, mais il a toujours la même bissectrice.

Trouver le lieu du sommet M. *(E. V.)*

148. — Construire le lieu unicursal représenté par les équations

$$\frac{x}{a} = \frac{\lambda(1 + \lambda^4)}{(1 + \lambda^2)(1 - \lambda^2)^2},$$
$$\frac{y}{a} = \frac{2\lambda^2}{(1 + \lambda)^2(1 - \lambda)^2}.$$

(E. V.)

149. — On considère deux droites rectangulaires Ox, Oy, et un point fixe A; de l'origine O comme centre, avec un rayon variable, on décrit une circonférence Δ, à laquelle on mène par A deux tangentes qui coupent les axes aux points P, Q, P', Q'. Cela posé, on joint QP' et PQ'; ces droites se coupent en un point A'. Trouver le lieu de ce point. — On expliquera par des considérations géométriques, le résultat, en apparence singulier, auquel a conduit le calcul. *(G. L.)*

150. — Étant donnés quatre points, A, B, C, D dans un plan, le lieu des points M tels que le faisceau (M . ABCD) soit harmonique, est une conique passant par les quatre points; — 1° soient deux coniques $f = 0$, $\varphi = 0$, se coupant aux points A, B, C, D. Le lieu des points M tels que le faisceau (M . ABCD) soit harmonique, les points A et B étant conjugués, est une conique de la forme $f + m\varphi = 0$. On a de même, en considérant comme conjugués les points A et C, puis A et D, deux autres coniques. Calculer les trois valeurs de m en fonction des trois racines de l'équation en λ; 2° à l'aide de cette expression de m, calculer le rapport anharmonique des points A, B, C, D sur l'une des coniques données. — 3° A l'aide de cette même expression, trouver les valeurs proportionnelles des côtés du triangle qui a pour sommet les projections du point D sur les côtés du triangle ABC.

(Hadamard.)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 24074-4.

TRANSFORMATION PLANE DES QUADRIQUES

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 218.)

10. Théorème. — *Lorsque deux droites* δ, δ', *du plan fondamental sont rectangulaires, les ellipses correspondantes* Δ, Δ', *passent, comme nous l'avons remarqué, par le sommet* A'; *mais elles jouissent encore de la propriété suivante :*

Δ *rencontrant l'ellipse principale du plan* yox *en un point* I *(différent de* A'*)*,

Δ' *rencontrant l'ellipse principale du plan* zox *en un point* J *(différent de* A'*)*,

Enfin, Δ *et* Δ' *se rencontrant en un point* K *(différent de* A'*)*;

Le plan IJK *passe constamment par le sommet* A.

Les droites δ et δ' rencontrent les axes ωt, $\omega\theta$ en des points parmi lesquels nous en distinguons deux p, q. Le cercle γ, circonscrit au triangle $p\omega q$, passe par le point de concours m des droites δ, δ'.

Reportons-nous maintenant à l'ellipsoïde E. Aux droites δ, δ' correspondent des ellipses Δ, Δ'; aux points p, q correspondent les points P, Q; enfin le point m est représenté, sur E, par M, point commun aux ellipses Δ et Δ'. La circonférence γ passant par l'origine ω, nous savons (§ 7, rem. V) que l'ellipse correspondante passe par le sommet A. Ainsi, les quatre points A, P, Q, M appartiennent à un même plan.

Cette propriété subsiste après que l'on a effectué une transformation homographique; les ellipses principales que nous venons de considérer sont remplacées par deux ellipses fixes, quelconques d'ailleurs, de la surface; de plus, les sommets A, A' sont représentés, sur l'ellipsoïde nouveau, par les points communs à ces deux ellipses.

Voici encore une propriété qui, elle aussi, subsiste après la transformation homographique.

11. Théorème. — *Si l'on considère quatre points quelconques* (p, q, r, s) *du plan* Π, *et les points correspondants* (P, Q, R, S) *de l'ellipsoïde* E; *si l'on projette ces points en* P′, Q′, R′, S′, *sur le plan* yoz, *le rapport anharmonique des quatre droites* (ωp, ωq, ωr, ωs) *est égal à celui des quatre droites* (OP′, OQ′, OR′, OS′).

En effet les formules (E), ou *(e)*, donnent, entre autres conséquences,

$$\frac{y}{z} = \frac{b}{c} \cdot \frac{t}{\theta};$$

le coefficient angulaire m de la droite qui joint ω au point (t, θ), est donc lié au coefficient angulaire M de la droite qui, dans le plan yoz, va, de l'origine O au point (y, z), projection du point (x, y, z) sur ce plan, par l'égalité

$$\mathrm{M} = \frac{b}{c} m.$$

D'après cela, si l'on imagine une certaine forme homogène entre les coefficients m_1, m_2, ...;

$$f(m_1, m_2, \ldots),$$

en désignant par i son degré d'homogénéité, on aura

$$f(m_1, m_2, \ldots) = \left(\frac{c}{b}\right)^i f(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots).$$

Le rapport anharmonique étant une fonction homogène, du degré zéro, des nombres m_1, m_2, m_3, m_4, cette égalité établit le théorème énoncé.

On peut observer que si l'on a

$$f(m_1, m_2, \ldots) = 0,$$

on a aussi

$$f(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots) = 0.$$

Enfin, comme cas particulier du théorème précédent, on remarquera que si quatre points forment une division harmonique dans le plan Π, leurs points correspondants, projetés sur le plan yoz, donnent quatre points qui, joints à l'origine O, forment un faisceau harmonique.

12. Remarque. — Cette proposition permet, dans la transformation omaloïdale, de tenir compte du fait que, sur le plan Π, un pointest situé au milieu de deux autres.

13. — Nous pouvons maintenant montrer quelques applications de cette transformation.

Pour éviter toute confusion, nous raisonnerons toujours sur les formules particulières (E) et (*e*) que nous avons établies plus haut; formules qui mettent en évidence les ellipses principales, et deux sommets, diamétralement opposés, de la quadrique qu'on transforme. Mais on peut toujours généraliser les énoncés trouvés, en imaginant que l'on effectue la transformation homographique dont nous avons parlé (§ 8).

14. Tracé d'ellipses sur un ellipsoïde donné. — L'application qui se présente tout d'abord est relative au tracé des ellipses sur un ellipsoïde donné.

Lorsqu'une ellipse doit être construite sur une surface du second ordre, sa position est déterminée quand on assujettit cette courbe à trois conditions simples; par exemple, on peut demander que l'ellipse passe par certains points ou soit tangente à des ellipses déjà tracées.

Tous ces problèmes se trouvent résolus, par la transformation que nous exposons, au moyen d'une épure faite sur un plan et n'exigeant que le seul emploi de la règle et du compas.

Sans nous arrêter aux détails infinis et sans intérêt que comporteraient l'exposition de ces différents problèmes et leur discussion, prenons simplement, pour faire comprendre notre méthode, le cas où l'on propose de *tracer, sur un ellipsoïde donné, une ellipse tangente à trois ellipses, déjà tracées*. Si elles ne sont pas tracées, nous supposerons que l'on connaît, tout au moins, trois points pour chacune d'elles.

Soient ε_1, ε_2, ε_3 les trois ellipses données, et soit ε l'ellipse qu'il faut construire.

Sur ε_1, on donne au moins trois points, et par ces trois points on peut faire passer un plan dont l'équation se trouve ainsi connue et bien déterminée. En transformant cette équation au moyen des formules (E) on obtient, dans le plan qu'on a choisi pour effectuer l'épure, une circonférence ε_1'.

En répétant cette construction pour les ellipses ε_2, ε_3, on

aura, finalement, dans le plan fondamental, trois circonférences ε_1, ε_2, ε_3, auxquelles on pourra mener, par la construction connue, une circonférence tangente ε'. En prenant sur ε' un point quelconque m (de coordonnées t, θ),les formules (E) permettront de calculer les coordonnées du point correspondant M. On obtiendra donc autant de points que l'on voudra de l'ellipse inconnue ε, et le problème proposé se trouve résolu. La solution, point par point, que nous venons d'indiquer est, croyons-nous, la seule que comporte le problème en question, puisqu'il ne saurait être question d'un tracé continu.

On peut dire, en un mot, que toute la *géométrie ellipsoïdale*, en prenant ce terme dans le sens qui est donné à l'expression analogue *géométrie sphérique*, se trouve résolue par la règle et le compas, et par des constructions planes. Il faut pourtant supposer que les dimensions (a, b, c) de l'ellipsoïde sont données et même, pour la raison que nous allons développer, que *les sommets de la quadrique sont des points marqués sur sa surface.*

15. — Les formules de transformation dont nous faisons usage pour effectuer l'épure sur le plan Π, renferment, non seulement les dimensions de l'ellipsoïde, mais aussi les coordonnées de trois points pris sur l'ellipse que l'on transforme. Si, au point de vue théorique, la solution que nous avons exposée pour un problème particulier, solution qui s'applique visiblement, avec les modifications voulues, à tous les problèmes de la géométrie ellipsoïdale, paraît simple et complète, elle offre pourtant, au point de vue pratique, une difficulté évidente. Cette difficulté, sur laquelle nous allons nous expliquer, tient à ce que la détermination d'un point sur une surface matérielle donnée ne peut se faire par l'emploi de ses coordonnées; et que, réciproquement, un point étant donné ou, pour être plus explicite, étant *marqué* sur une surface matérielle, ses coordonnées ne sont pas, au moins immédiatement, connues.

16. — Imaginons donc un ellipsoïde matériel donné E, et

supposons que ses sommets A, A'; B, B'; C, C', soient marqués sur la surface.

Prenons sur E un point M ; désignons par x, y, z, ses coordonnées relativement aux plans principaux, et par α, α'; β, β'; γ, γ', ses distances aux sommets de la quadrique, distances que l'on peut obtenir, le point M étant marqué sur la surface, au moyen du compas sphérique.

Les relations

$$\alpha^2 = y^2 + z^2 + (a - x)^2,$$
$$\alpha'^2 = y^2 + z^2 + (a + x)^2,$$

donnent

$$4ax = \alpha'^2 - \alpha^2.$$

On trouve de même

$$4by = \beta'^2 - \beta^2,$$
$$4cz = \gamma'^2 - \gamma^2.$$

Dans ces formules α, β, γ désignent les distances du point M aux trois sommets A, B, C, qui forment, avec le centre O, un trièdre tri-rectangle dont les arêtes OA, OB, OC sont supposées représenter les directions positives des axes de coordonnées. Avec cette convention, les formules précédentes sont générales ; elles conviennent à toutes les positions du point M dans l'espace.

Ces formules permettent de construire, par une quatrième proportionnelle, chacune des longueurs x, y, z, quand on a pris les longueurs α, β, γ ; α', β', γ'. D'après cette remarque, la difficulté qui était soulevée, se trouve tournée et nous pouvons dire, comme conclusion de ces explications, que, *étant donné un ellipsoïde matériel dont les six sommets* (*) *sont marqués sur la surface, on peut résoudre, par une épure faite sur un plan, et en ne faisant usage que de la règle et du compas, tout problème correspondant à l'énoncé suivant :*

Tracer, sur un ellipsoïde, une ellipse remplissant trois conditions analogues à celles-ci : passer par un point de la surface ; ou être tangente à une ellipse déjà tracée.

(*) A la rigueur on pourrait n'en exiger que trois et, de la connaissance des distances α, β, γ, déduire celles des coordonnées ordinaires x, y, z ; mais il est plus simple de supposer, comme nous le faisons, que les six sommets sont marqués.

17. Cas des ellipses centrales. — Appelons ainsi celles qui sont obtenues en coupant l'ellipsoïde par des plans passant par son centre; ces courbes, dans la géométrie ellipsoïdale, correspondent aux grands cercles de la géométrie sphérique. Nous nous proposons d'examiner ce cas particulier des ellipses tracées sur l'ellipsoïde.

Nous avons déjà observé (§ 7, rem. VII), que si le plan d'une ellipse passait constamment par un point fixe, les cercles correspondants étaient orthogonaux à un cercle fixe. Mais il reste à déterminer ce cercle, quand les ellipses sont centrales. Les formules (1) et (u) (§ 5), en supposant $\delta = 0$, donnent 1° l'égalité

$$\alpha\frac{x}{a} + \beta\frac{y}{b} + \gamma\frac{z}{c} = 0,$$

pour représenter le plan sécant; 2° l'équation

$$t^2 + \theta^2 - 2\frac{\beta}{\alpha}t - 2\frac{\gamma}{\alpha}\theta - 1 = 0,$$

pour le cercle correspondant à l'ellipse de section.

Lorsque les paramètres α, β, γ varient arbitrairement, tous les cercles qui correspondent à l'équation précédente sont orthogonaux au cercle imaginaire dont l'équation est

$$t^2 + \theta^2 + 1 = 0.$$

Mais on peut substituer à cette condition analytique une propriété géométrique plus saisissable.

Si, dans l'équation (u) (§ 5), après avoir fait $\delta = 0$, on donne à chacun des paramètres variables $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$, une valeur quelconque, le cercle correspondant et celui dont l'équation est

$$t^2 + \theta^2 - 1 = 0,$$

ont pour axe radical une droite passant constamment par l'origine ω. En résumé, *les ellipses centrales se transforment en cercles qui coupent un certain cercle fixe* (cercle qui correspond à l'ellipse principale du plan YOX) *en deux points diamétralement opposés.*

On peut dire aussi, si l'on préfère, que ces cercles décrivent sur les axes ωt, $\omega\theta$, des divisions homographiques en involution, dont le point central est ω.

18. — Parmi les ellipses centrales on peut distinguer celles qui passent par deux sommets opposés de la surface.

Nous avons déjà fait remarquer que celles qui passent par les points A et A′, se transforment sur le plan fondamental en droites passant par l'origine. En supposant maintenant que l'on ait $\beta = 0$, ou $\gamma = 0$, on voit que les cercles correspondants coupent l'axe ωt, ou l'axe $\omega\theta$, en des points fixes.

(A suivre.)

QUESTION 73

Solution par M. P. Saillard, élève de Mathématiques spéciales au Collège Chaptal (classe de M. Weill).

On considère un triangle ABC *inscrit dans une parabole et dont l'hypoténuse est une normale de la courbe.*

Trouver le lieu décrit par le centre du cercle inscrit à ce triangle.

Prenons comme axes de coordonnées l'axe et la tangente au sommet de la parabole.

Considérons (le lecteur est prié de faire la figure) le cercle circonscrit au triangle ABC; il est tangent à la parabole en A et le coupe en B et C; les deux droites AB et AC, cordes communes, doivent donc être également inclinées sur l'axe de la parabole; la bissectrice de l'angle en A est donc la perpendiculaire à l'axe menée par ce point A.

Considérons la bissectrice CP, de l'autre angle aigu du triangle ABC, la somme des angles ABC, ACB étant $\frac{\pi}{2}$, la somme des angles PAC, PCA est $\frac{\pi}{4}$, et l'angle P a pour mesure $\frac{3\pi}{4}$, c'est-à-dire que CP est parallèle à la bissectrice de l'angle xOy'.

Nous allons mettre, par ces considérations, le problème en équation.

L'équation de la normale en A (x_1y_1) est

$$\frac{y-y_1}{y_1}=\frac{x-x_1}{-p};$$

on calculera facilement les coordonnées du point C qui donnent

$$x=\frac{(p+x_1)^2}{x_1},\quad y=\frac{2p(p+x_1)}{-y_1};$$

l'équation de CP sera donc

$$\left[y+\frac{2p}{y_1}(x_1+p)\right]+\left[x-\frac{(p+x_1)^2}{x_1}\right]=0, \quad (1)$$

en éliminant x_1y_1 entre l'équation (1), l'équation

$$x=y_1,$$

et

$$y_1^2=2px_1,$$

on aura l'équation du lieu qui est

$$[xy-2px-p^2]^2-(p+x)^2 2px=0.$$

Interprétation de ce lieu. — Il est à remarquer que la courbe, telle que nous l'avons définie par les remarques précédentes, ne coïncide avec le lieu demandé que dans une partie de son étendue. Le point P ne sera et ne restera le centre du cercle inscrit au triangle ABC, que tant que AC ne sera pas en direction la bissectrice des axes; à partir de ce moment, le point P est le centre d'un cercle ex-inscrit, et ne répond plus à l'énoncé. Donc, il n'y a que pour les positions de P correspondant à une valeur de $y_1>p$ que l'équation trouvée représentera le lieu.

Construction de ce lieu. — Transportons l'origine au point

$$O'\begin{cases}x=2p\\ y=0.\end{cases}$$

L'équation du lieu devient

$$[xy-p^2]^2-(p+x)^2 2px=0,$$

qui peut encore s'écrire

$$y=\frac{p^2}{x}\pm(p+x)\sqrt{\frac{2p}{x}}.$$

Sous cette forme, on voit immédiatement que l'hyperbole équilatère

$$xy=p^2$$

est une courbe diamétrale, que la courbe proposée est tout entière du côté des x positifs, et qu'elle admet pour asymptote l'axe des y, et pour direction asymptotique celle de l'axe des x;

D'autre part, l'équation de la courbe peut s'écrire

$$x^2(y^2 - 2px) + f(xy) = 0,$$

$f(xy)$ étant une fonction du deuxième degré.

Elle prouve que la parabole

$$y^2 = 2px$$

est asymptote. De plus, en développant la fonction

$$f(xy) = p^2[p^2 - 4x^2 - 2x(y + p)],$$

on voit qu'il ne peut y avoir de points dans la région ombrée. On en conclut la position de la courbe par rapport à sa parabole asymptote. Ces indications permettent de construire la courbe.

Remarque. — Tout ce que nous avons dit dans l'interprétation du lieu pour les points

$$A(x_1 y_1)$$

tels que

$$y_1 > p$$

peut se répéter pour ceux dont l'ordonnée est inférieure à $-p$, et alors, en prenant une parallèle à l'autre bissectrice des axes, on arrive à une équation de même forme que la première, mais dans laquelle x est remplacé par $-x$. Ce qui prouve qu'elle représente une courbe symétrique par rapport à l'axe Ox (ce qui pouvait d'ailleurs se prévoir *à priori*).

Toute la partie des deux courbes correspondant à des points du lieu demandé se trouve dans la parabole

$$y^2 = 2px.$$

Dès lors, la séparation est facilement faite.

Considérons maintenant les centres des cercles inscrits à des triangles rectangles dans lesquels l'hypoténuse est une normale dont le pied se trouve entre

$$x = 0$$

et

$$x = \frac{p}{2}.$$

On est conduit à faire le même raisonnement que dans le

premier cas, mais à éliminer alors $x_1 y_1$, entre les équations

$$\left[y + \frac{2p}{y_1}(p + x_1)\right] = -\left[x - \frac{(p + x_1)^2}{x_1}\right]$$

$$y = y_1$$

$$y_1^2 = 2px_1;$$

ce qui donne alors pour équation du lieu l'équation

$$y^2[y^2 - 2px] - 4p(y - p)(p^2 + y^2) = 0.$$

Construction du lieu. — L'équation précédente peut se mettre sous la forme

$$y^2[(y - 2p)^2 - 2px] - 4p^2(y - p) = 0.$$

Mise sous cette forme, on voit que la courbe admet pour asymptote l'axe des x, et pour parabole asymptote la parabole

$$(y - 2p) = 2px = 0;$$

ces considérations donnent la position de la courbe par rapport à ses asymptotes (parabole et droite).

De même que dans le cas précédent, on montre que la courbe correspondant aux valeurs de y_1 comprises entre O et p est symétrique de la précédente par rapport à l'axe des x.

Lieu total. — On prendra la partie utile des courbes précédentes; ces courbes se coupent aux points

$$x = \frac{p}{2}, \quad y = \pm p,$$

en y admettant des tangentes distinctes (la tangente à l'une des courbes en ce point est perpendiculaire à la symétrique de l'autre tangente en ce point).

QUESTION 76

Solution par M. Édouard Davoine, élève de Mathématiques spéciales, au Lycée Charlemagne (Ecole Massillon).

On considère deux droites rectangulaires Ox *et* Oy, *et un cercle* C, *tangent à l'une et à l'autre de ces droites, aux points* A *et* B ; *par* O, *on mène une transversale mobile qui rencontre*

C *aux points* M *et* N ; 1° *par les quatre points* A, B, M, N *on fait passer une hyperbole équilatère* H; *les tangentes à* H *aux points* M *et* N *se coupent en un point* I : *trouver le lieu de ce point quand* MN *tourne autour du point* O. *Ce lieu est une circonférence ;* 2° *on joint* AM *et* BN; *ces droites se coupent en un point* I′; *trouver le lieu de ce point* I′ ; *ce lieu est une hyperbole, dont on demande l'équation lorsqu'elle est rapportée à son centre et à ses axes;* 3° *par les points* A, B, M, N, *on fait passer une parabole* P ; *démontrer que par un point du plan passent deux paraboles* P, *et trouver avec un seul paramètre variable l'équation générale et rationnelle des paraboles* P ; 4° *trouver le lieu décrit par l'intersection de* P *avec le diamètre de cette courbe qui passe par le point* O. *Ce lieu est une hyperbole homothétique de celle qui a été trouvée tout à l'heure; on construira les asymptotes de ces courbes.*

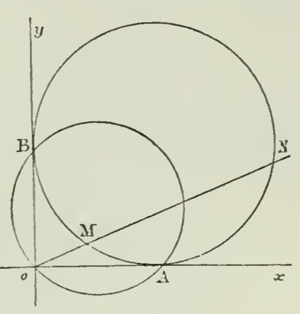


Fig. 1.

En désignant par a la longueur OA = OB, l'équation du cercle C est

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0.$$

Celle de la droite AB,

$$x + y - a = 0.$$

Soit $y - mx = 0$ l'équation de la transversale mobile.

L'équation générale des coniques passant par les points A, B, M, N est

$$(y - mx)(x + y - a) + \lambda(x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2) = 0 \quad (\alpha)$$

Cette équation devant représenter des hyperboles équilatères, on a la condition

$$2\lambda - m + 1 = 0;$$

d'où l'on tire

$$\lambda = \frac{m - 1}{2}.$$

Les hyperboles équilatères H, passant par les points A, B, M, N, sont représentées par l'équation

$$(m+1)(y^2-x^2)+2xy(1-m)+2ax-2amy$$
$$+a^2(m-1)=0 \qquad (\beta)$$

Désignons par $x_0 y_0$ les coordonnées du point I, dont nous cherchons le lieu géométrique. La polaire de ce point par rapport à l'hyperbole H est

$$x[-x_0(m+1)+y_0(1-m)+a]$$
$$+y[y_0(m+1)+x_0(1-m)-am]$$
$$+ax_0-amy_0+a^2(m-1)=0$$

Identifions cette équation avec l'équation $y-mx=0$. Nous obtenons les conditions:

$$x_0-my_0+a(m-1)=0 \qquad (1)$$

et

$$\frac{y_0(1-m)-x_0(1+m)+a}{m}$$
$$=am-y_0(m+1)$$
$$-x_0(1-m) \qquad (2)$$

De la première on tire $m=\dfrac{x_0-a}{y_0-a}$. Substituant dans (2) et remplaçant x_0 et y_0 par les coordonnées courantes, on a

$$[y(y-x)-x(x+y-2a)+a(y-a)](a-y)$$
$$=(x-a)[a(x-a)-y(x+y-2a)-x(y-x)]$$

ce qui peut s'écrire

$$a(x-y)(x+y-2a)+y(x-y)(a-y)+ay(y-2a)$$
$$=ax(x-2a)-x(x-y)(a-x)$$

ou

$$(y-x)(x^2+y^2-ay-ax)=0$$

On peut s'expliquer la présence du facteur singulier $y-x=0$. En effet, parmi les hyperboles du réseau, on peut considérer la conique formée par la première bissectrice et par la parallèle AB à la seconde bissectrice. Cette conique correspond au cas où la transversale OM se confond avec la première bissectrice. Les tangentes aux points M et N se confondent alors avec la bissectrice, et par suite leur point de concours.

Ce facteur singulier étant supprimé, il reste, pour le lieu du point I, l'équation

$$x^2+y^2-ay-ax=0$$

qui représente un cercle passant par l'origine, circonscrit au rectangle formé par les axes et les droites $x = a$, $y = a$ (*fig.* 1).

2. — Reprenons l'équation (α) : cette équation pour une certaine valeur de λ représente le faisceau des droites AM, BN. Le point de concours I' de ces droites peut être considéré comme le centre de la conique singulière formée par ces droites. En désignant par $f(x, y, z)$ l'équation rendue homogène du faisceau des deux droites, le lieu du point I' s'obtient en éliminant les paramètres variables λ et m entre les équations :

$$f'(x) = 2(\lambda - m)x + (1 - m)y + a(m - 2\lambda) = 0$$
$$f'(y) = 2(1 + \lambda)y + (1 - m)x - a(1 + 2\lambda) = 0$$
$$f'(z) = -y(1 + 2\lambda) + x(m - 2\lambda) + 2a\lambda = 0$$

Ordonnons ces équations par rapport à λ et m.

$$2\lambda(x - a) - m(2x + y - a) + y = 0$$
$$2\lambda(y - a) - mx + 2y + x - a = 0$$
$$2\lambda(a - x - y) + mx - y = 0$$

On obtient immédiatement le résultat de l'élimination de λ et de μ au moyen du déterminant

$$\begin{vmatrix} x - a & a - 2x - y - y \\ y - a & - x & a - x - 2y \\ a - x - y & x & y \end{vmatrix} = 0$$

qu'on peut écrire :

$$\begin{vmatrix} x - a & a - 2x - y - y \\ y - a & - x & a - x - 2y \\ - y & a - x - y & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou bien
$$\begin{vmatrix} x - y & a - x - y & x + y - a \\ y - & a - x & a - x - 2y \\ - y & a - x - y & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Développons ce déterminant par rapport aux éléments de la dernière ligne

$$-y[(a - x - y)(a - x - 2y) + x(x + y - a)]$$
$$-(a - x - y)[(x - y)(a - x - 2y) - (y - a)(x + y - a)] = 0.$$

On aperçoit le facteur singulier $x + y - a = 0$, qui représente la droite AB, parallèle à la seconde bissectrice. En effet, lorsque la transversale mobile vient à coïncider avec les axes de coordonnées, on voit que les points M et N se confondent en A ou B, et que l'une des droites AM ou BN se

confond avec la droite AB. Le facteur singulier étant supprimé, il reste pour le lieu du point I′ l'équation

$$x^2 + y^2 + 4xy - 2ax - 2ay + a^2 = 0, \qquad \text{(A)}$$

qui représente une hyperbole ayant pour centre le point de coordonnées

$$x = \frac{a}{3}, \quad y = \frac{a}{3}.$$

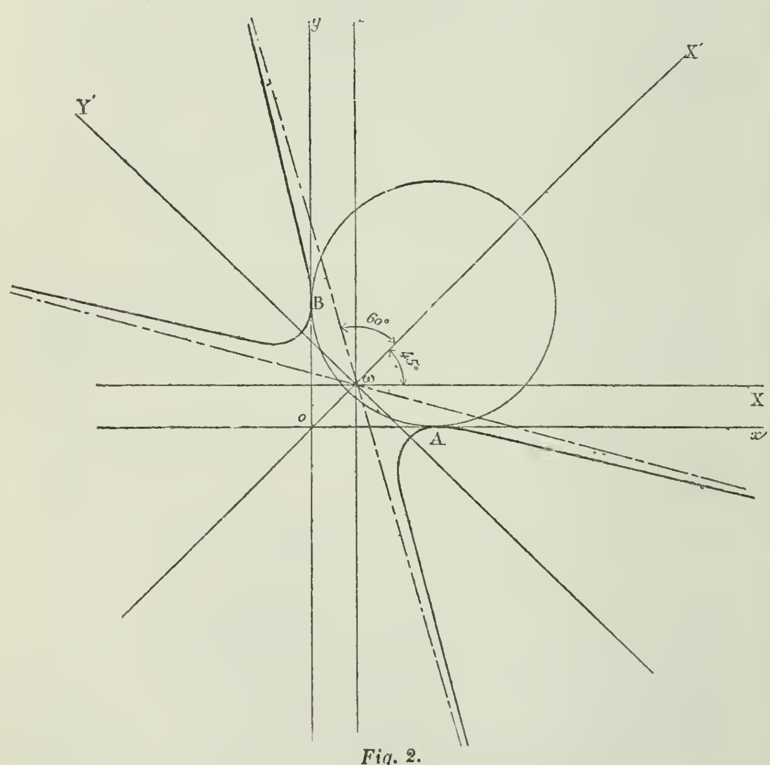


Fig. 2.

Transportons les axes en ce point : l'équation devient, en appelant X et Y les nouvelles coordonnées,

$$X^2 + Y^2 + 4XY + \frac{a^2}{3} = 0.$$

On sait que, l'équation d'une conique étant

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + \ldots = 0,$$

pour rapporter cette conique à ses axes, il faut faire tourner les axes de coordonnées d'un angle φ donné par la formule

$$\text{Tg}2\varphi = \frac{2B''}{A - A'}.$$

Appliquant cette formule au cas actuel, nous voyons que

$$\text{Tg}2\varphi = \infty;$$

d'où

$$2\varphi = 90^0 \quad \varphi = 45^0.$$

Faisons donc tourner les axes autour de la nouvelle origine ω d'un angle de 45°. L'équation de l'hyperbole, rapportée à ses axes, devient alors, dans le nouveau système $Y'\omega X'$,

$$3X'^2 - Y'^2 + \frac{a^2}{3} = 0.$$

On peut facilement construire l'hyperbole dans ce dernier système. Les sommets réels sont les points de coordonnées

$$X' = 0, \; Y' = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Les directions asymptotiques sont données par l'équation

$$C^2 - 3 = 0.$$

L'hyperbole étant rapportée à son centre, on aura les asymptotes en menant par le point ω deux droites inclinées à 60° sur l'axe des X'.

La première équation (A) montre que l'hyperbole est tangente au cercle C aux deux points A et B. Ces diverses indications suffisent pour la déterminer *(fig. 2)*.

En se reportant à la définition géométrique du lieu, on aurait pu trouver facilement les directions asymptotiques de la courbe. Il faut chercher pour cela quelle doit être la position de la transversale OMN, pour que les droites AM et BN soient parallèles. Dans ce cas, le trapèze AMBN étant isoscèle, les diagonales AB et MN sont égales·

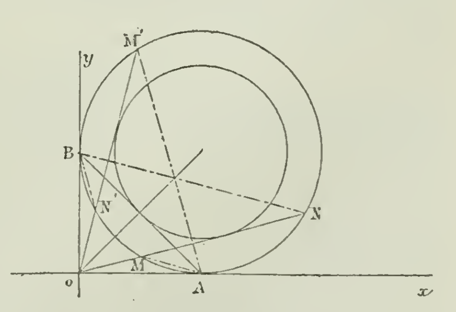


Fig. 3.

Joignons OC, qui est perpendiculaire à AB au point D. Du point C comme centre, avec CD pour rayon, décrivons une circonférence, et menons par le point O des tangentes à cette circonférence. Ces deux tangentes sont précisément les positions de la transversale mobile qui correspondent aux points d'intersection de AM et de BN, situés à l'infini. Donc, AM et BN d'une part, AM′ et BN′ d'autre part, sont les directions asymptotiques *(fig. 3)*.

3. Revenons encore à l'équation (α) qui, ordonnée, s'écrit

$$y^2(1 + \lambda) + x^2(\lambda - m) + xy(1 - m) - ay(1 + 2\lambda) + ax(m - 2\lambda) + a^2\lambda = 0. \qquad (\alpha)$$

Cette équation représentera les paraboles passant par les points A,B,M,N, si l'on a entre les paramètres λ et m la relation

$$(1 - m)^2 = 4(\lambda + 1)(\lambda - m).$$

Cette relation peut s'écrire

$$\frac{1 - m}{2(\lambda + 1)} = \frac{2(\lambda - m)}{1 - m} = t.$$

Nous pouvons exprimer λ et m en fonction du seul paramètre t. Il suffit pour cela de résoudre les deux équations

$$2\lambda t + m + 2t - 1 = 0,$$
$$2\lambda + m(t - 2) - t = 0.$$

On en tire

$$\lambda = \frac{2t - t^2 - 1}{t^2 - 2t - 1} \qquad m = \frac{1 - 2t - t^2}{1 + 2t - t^2}.$$

Portant ces valeurs de λ et m dans l'équation (α), et chassant le dénominateur, on a

$$2y^2 + 2t^2x^2 + 4txy - ay\,(t^2 - 2t + 3) + ax(2t - 3t^2 - 1) + a^2(t^2 - 2t + 1) = 0. \qquad (P)$$

Telle est, avec un seul paramètre variable, l'équation générale et rationnelle des paraboles P. Le paramètre t entrant au second degré, on voit que par un point du plan on peut faire passer en général deux paraboles P. On pourrait chercher le lieu des points tels que ces deux paraboles se confondent.

Il suffirait pour cela de résoudre l'équation du second degré en t, et d'exprimer que la quantité soumise au radical est nulle.

4. Le diamètre de la parabole qui passe par l'origine O, a pour équation

$$y\sqrt{2} + t\sqrt{2}\,x = 0,$$

ou

$$y + tx = 0.$$

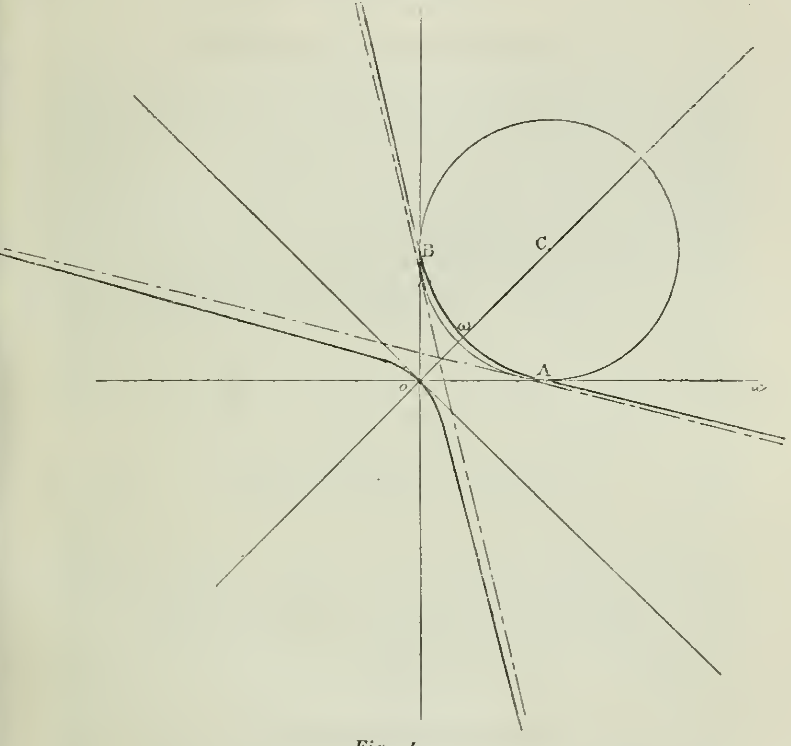


Fig. 4.

Le lieu décrit par l'intersection de la parabole avec ce diamètre s'obtient en éliminant t entre l'équation précédente et l'équation (P).

On a

$$t = -\frac{y}{x}.$$

Portant cette valeur dans l'équation (P) et simplifiant, il vient

$$x^2 + y^2 + 4xy - ax - ay = 0. \qquad \text{(B)}$$

Cette équation représente une hyperbole passant par l'origine tangentiellement à la seconde bissectrice. Le centre de cette hyperbole a pour coordonnées

$$x = y = \frac{a}{6}.$$

Cette hyperbole coupe les axes de coordonnées aux points A et B. Ses asymptotes sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole (A) précédemment trouvée. Les termes du second degré étant identiques dans les équations (A) et (B), les deux hyperboles représentées par ces équations sont homothétiques. Mais les discriminants des deux formes (A) et (B) étant de signes contraires, le rapport d'homothétie est imaginaire. Par suite, l'hyperbole A étant renfermée dans l'angle aigu des asymptotes, l'hyperbole B, au contraire, sera tenue dans l'angle obtus. Cette dernière hyperbole, comme il est facile de le reconnaître, a pour sommets réels l'origine des axes et le point ω, centre de l'hyperbole A. Elle est disposée comme l'indique la figure ci-dessus.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Genin et Robinet, à Bar-le-Duc.

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1884

Mathématiques spéciales.

On donne une ellipse et une hyperbole situées respectivement dans deux plans rectangulaires P et Q, et pour chacune desquelles la droite d'intersection de ces deux plans est axe de symétrie.

1° On considère tous les plans R tangents à la fois à l'ellipse et à l'hyperbole, et on propose de démontrer qu'il existe une infinité de surfaces du second ordre S tangentes à la fois à tous les plans R;

2° Trouver le lieu des centres des surfaces S et déterminer

la nature de chacune de ces surfaces suivant la position occupée par son centre ;

3° Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les surfaces S soient homofocales.

Mathématiques élémentaires.

Trouver les angles d'un quadrilatère circonscrit à un cercle de rayon r, connaissant trois côtés consécutifs a, b, c du quadrilatère. Entre quelles limites doit varier r pour que le problème soit possible, les côtés a, b, c restant constants. On distinguera deux cas, celui où les points de contact des côtés du quadrilatère avec la circonférence sont situés sur les côtés eux-mêmes et celui où ces points de contact sont sur les prolongements des côtés.

COMPOSITION

SUR CERTAINES PARTIES, DÉSIGNÉES A L'AVANCE, DU PROGRAMME DE LA LICENCE.

Théorie. — Dire ce que l'on entend par intégrale complète, intégrale générale, intégrale particulière, intégrale singulière, d'une équation entre n variables indépendantes, une fonction inconnue z de ces variables et les dérivées partielles du premier ordre de z par rapport aux mêmes variables.

Montrer comment la connaissance d'une intégrale complète peut conduire à l'intégrale générale.

Étant donnée une équation de la forme considérée, *non linéaire*, exposer brièvement une des méthodes d'intégration qui lui sont applicables : le choix de la méthode est laissé à chaque candidat.

Application. — Intégrer l'équation.

$$m^2(1 + p^2 + q^2) - m(x - y)(p - q) - 2x = 0,$$

dans laquelle on désigne par m une longueur donnée, par p et q les dérivées partielles de z par rapport à x et par rapport à y.

COMPOSITIONS FINALES

Mécanique rationnelle.

On donne un héliçoïde représenté, en coordonnées rectangulaires, par l'équation

$$z = m \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x};$$

un point matériel non pesant, assujetti à rester sur la surface parfaitement polie de l'héliçoïde, est attiré vers l'axe OZ par une force dirigée suivant la perpendiculaire abaissée du point sur l'axe, et inversement proportionnelle au cube de cette perpendiculaire. Déterminer, dans le cas général, la loi du mouvement du point considéré, la pression sur l'héliçoïde, et les diverses formes que peut affecter la trajectoire. Examiner les cas particuliers où la projection de la trajectoire sur le plan xoy peut être représentée par une équation où n'entrent que des fonctions algébriques, logarithmiques, exponentielles ou circulaires.

Géométrie descriptive.

On donne un tétraèdre régulier SABC, et l'on propose de construire l'intersection de deux cônes définis de la façon suivante : le premier a pour sommet S et pour base le cercle inscrit dans ABC; le deuxième a pour sommet C et pour base le cercle inscrit dans SAB. — *Données :* L'arête du tétraèdre a 17 centimètres ; la face ABC est située dans le plan horizontal, AB est parallèle à la ligne de terre et située à 2 centimètres au-dessous de cette ligne. Pour distinguer les parties visibles et les parties invisibles, on regardera les deux cônes comme opaques et limités aux parties intérieures du tétraèdre. Le tétraèdre est transparent.

Calcul.

Si l'on désigne par a le demi-grand axe d'une ellipse, par e son excentricité, par $2s$ la longueur de l'arc de cette courbe compris dans l'angle obtus formé par les deux demi-diamètres

conjugués égaux ,on démontre que le rapport $\frac{s}{a}$ estexprimé par la série suivante :

$$\frac{s}{a} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi - 2}{16} e^2 - \frac{2\pi - 8}{256} e^4 - \frac{15\pi - 44}{3072} e^6 - \frac{25(21\pi - 64)}{196608} e^8 \ldots\ldots$$

π étant le rapport de la circonférence au diamètre, on donne

$$\frac{s}{a} = 0{,}78,$$

et l'on demande de calculer, par la méthode des approximations successives, la valeur de e, avec l'approximation que comportent les tables de logarithmes à sept décimales.

CONCOURS POUR L'ÉCOLE CENTRALE

PREMIÈRE SESSION 1884

Géométrie analytique.

On donne l'équation

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0$$

d'une hyperbole rapportée à son centre et à ses axes, et l'équation

$$y - kx = 0$$

d'une droite menée par le centre de cette hyperbole

1° Former l'équation générale des coniques qui passent par les points réels ou imaginaires communs à l'hyperbole et à la droite données, et qui, de plus, sont tangentes à l'hyperbole en celui des sommets de cette hyperbole qui est situé sur la partie positive de l'axe des x. — Discuter cette équation générale et reconnaître la nature des coniques qu'elle peut représenter.

2° Trouver le lieu des centres des coniques représentées

par l'équation générale précédente. Ce lieu est une conique Δ. Chercher un nombre de points et de tangentes suffisant pour déterminer géométriquement cette conique Δ,

3° Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées à la conique Δ parallèlement à la droite du coefficient angulaire $\frac{b}{a}$, quand on fait varier k. On vérifiera que l'équation de ce dernier lieu, qui est du troisième degré, représente trois droites.

Calcul logarithmique.

On donne deux côtés d'un triangle, et l'angle compris :

$$a = 2317^{m},455$$
$$b = 8423^{m},761$$
$$C = 122^{\circ}\ 47'\ 35'',1\ ;$$

on demande de calculer les trois autres éléments A, B, c, du triangle, et sa surface.

Physique et chimie.

Un espace V contient un mélange d'air et de vapeur d'eau à une température t, et sous la pression totale H. La vapeur n'est pas saturée, et possède une tension f. On demande de calculer la pression totale x du mélange, si l'on ramène la température à être V', en distinguant le cas où il y a condensation, et le cas où ce phénomène ne se produit pas. — On distingue par F' la tension maximum de la vapeur d'eau à la température t'.

— Un récipient fermé, de capacité invariable et égale à un mètre cube, contient de l'air humide dont la température est 23°, et l'état hygrométrique 0,75. La température descend à 5° dans cet espace. Quel sera le poids de la vapeur liquéfiée ?

Tension maximum de la vapeur à 23° .	$20^{mm},888$
— — à 5° .	$6^{mm},534$
Densité de la vapeur d'eau.	0,622
Poids du litre d'air à 0° et à 760^{mm} . .	$1^{g},293$
Coefficient de dilatation des gaz	0,003665.

— Indiquer les différents cas dans lesquels l'ammoniaque et les composés ammoniacaux prennent naissance.

— On donne 100 litres, mesurés à 0° et sous la pression 760mm de gaz oxyde de carbone. On demande : 1° quel volume d'oxygène, à 0° et sous la pression 760, il faut employer pour en produire la combustion complète ; 2° quel est, dans les mêmes conditions, le volume de gaz acide carbonique produit. On demande de résoudre le problème par la méthode des équivalents en poids et par celle des équivalents en volumes.

Données numériques.

	Équiv. en poids	Équiv. en vol.	Poids du litre
CO	14	2	1g,254
O	8	1	1,43
CO^2	22	2	1,9774.

Géométrie descriptive.

Une droite de front ($s\theta$, $s'\theta'$) dont l'éloignement est égal à 0m,80, et dont la trace horizontale θ se trouve à 0,050 de la projection horizontale s de son point de rencontre (s, s') avec le plan bissecteur du premier dièdre, engendre, par sa rotation autour de la verticale du point (s, s') un *premier cône* de révolution.

Un second cône a pour sommet le milieu (σ, σ') de la droite ($s\theta$, $s'\theta'$) ; sa trace horizontale est un cercle, dont le centre c se trouve en avant de la droite $s\theta$, dont le rayon est égal à la longueur de cette droite, et qui passe par les extrémités s et θ de cette même droite.

On demande de construire les projections de la partie, supposée solide et opaque, des deux nappes du *premier cône*, qui, placée à l'extérieur des deux nappes du second cône et derrière le plan de front F, dont l'éloignement est 0m,140, se trouve comprise entre le plan horizontal de projection et un plan horizontal P' à la cote 0,215.

On indiquera, à l'encre rouge, les constructions d'un point quelconque de l'intersection, de la tangente en ce point, et celles des points et des droites remarquables. Ces

constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure.

Titre extérieur : Géométrie descriptive,

Titre intérieur : Intersection de deux cônes.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^{m},180$ du petit côté inférieur, et le point (s, s') au milieu de la feuille.

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 26466-4.

TRANSFORMATION PLANE DES QUADRIQUES

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite et fin*, voir p. 193.)

19. — Lorsque la figure tracée sur le plan fondamental est une circonférence γ, nous avons montré qu'au centre ω' de γ orrespondait, sur la quadrique, un point Ω, déterminé comme nous l'avons dit. Si le point ω' s'éloigne à l'infini, Ω vient se confondre avec le point A'. En effet, le pôle de l'ellipse Γ qui correspond à γ est situé dans le plan tangent à l'ellipsoïde au point A'; la droite qui joint A' à ce pôle est donc tangente à l'ellipsoïde et, pour ce motif, la construction indiquée au paragraphe 5 donne le point A' lui-même, comme correspondant au point situé à l'infini. Ceci concorde d'ailleurs avec ce que nous avons indiqué (§ 7; rem. VIII), quand nous avons cherché la correspondance des points situés à l'infini sur le plan Π.

Voici, à ce propos, une propriété des ellipses qui correspondent aux droites du plan fondamental, propriété qui peut être utile dans la transformation que nous développons.

20. Théorème. — *A une droite δ du plan fondamental, correspond une ellipse Δ, sur l'ellipsoïde; soit P le pôle de Δ. La droite AP rencontre la surface en un point M; le correspondant de M, sur Π, est le symétrique de l'origine ω, par rapport à δ.*

Soit

$$Mt + N\theta = 1,$$

l'équation de δ; les formules (e), (§ 3), donnent, pour le plan de l'ellipse Δ, l'équation

$$M\frac{y}{b} + N\frac{z}{c} = 1 + \frac{x}{a}.$$

En cherchant les coordonnées ξ, η, ζ de M, un calcul simple et semblable à celui que nous avons fait plus haut

(§ 5) donne :

$$(\text{M})\left\{\begin{aligned}\frac{\xi}{a} &= \frac{\text{M}^2 + \text{N}^2 - 4}{\text{M}^2 + \text{N}^2 + 4}.\\ \frac{\eta}{b} &= \frac{4\text{M}}{\text{M}^2 + \text{N}^2 + 4}.\\ \frac{\zeta}{c} &= \frac{4\text{N}}{\text{M}^2 + \text{N}^2 + 4}.\end{aligned}\right.$$

Cherchons maintenant le point m qui, sur le plan II, correspond à M. Les formules (e) donnent pour calculer les coordonnées t', θ', de ce point, les égalités

$$t' = \frac{2\text{M}}{\text{M}^2 + \text{N}^2}, \qquad \theta' = \frac{2\text{N}}{\text{M}^2 + \text{N}^2}.$$

On vérifie alors, sans peine, que le point $m(t', \theta')$ est le point symétrique de l'origine ω, par rapport à δ.

21. Théorème. — *Lorsque deux points* m *et* n, *du plan* II, *sont tels que le produit de leurs distances à l'origine* ω *soit constant, les points correspondants* M, N *étant projetés sur l'axe* AA' *aux points* μ *et* ν, *on a*

$$\frac{\mu\text{A}}{\mu\text{A}'} \cdot \frac{\nu\text{A}}{\nu\text{A}'} = \text{c}^{\text{te}}.$$

En effet, la formule fondamentale

$$\frac{x}{a} = \frac{1 - t^2 - \theta^2}{1 + t^2 + \theta^2}$$

donne

$$\frac{x + a}{a - x} = \frac{1}{t^2 + \theta^2}.$$

On a donc

$$\overline{\omega m}^2 = \frac{a - x}{a + x} = \frac{\mu\text{A}}{\mu\text{A}'}.$$

On trouve, de même,

$$\overline{\omega n}^2 = \frac{\nu\text{A}}{\nu\text{A}'};$$

et le produit

$$\frac{\mu\text{A}}{\mu\text{A}'} \cdot \frac{\nu\text{A}}{\nu\text{A}'}$$

représente bien la quantité, supposée constante.

$$\sqrt{\omega m \,.\, \omega n}\,.$$

22. — Remarque I. Parmi les cas particuliers de la propriété précédente nous signalerons les suivants :

1° *Lorsque les deux points* m *et* n *du plan* Π *sont situés en ligne droite avec l'origine* ω, *si l'on a*

$$\omega m \, . \, \omega n = -1,$$

les points correspondants M, N. *sont diamétralement opposés sur l'ellipsoïde.*

Les coordonnées (t', θ') de m, (t'', θ'') de n, vérifient les égalités

$$\sqrt{t'^2 + \theta'^2} \quad \sqrt{t''^2 + \theta''^2} = -1,$$

$$t'' = \frac{-t'}{t'^2 + \theta'^2},$$

$$\theta'' = \frac{-\theta'}{t'^2 + \theta'^2}.$$

Les coordonnées (x', y', z') de M, (x'', y'', z'') de N, vérifient donc les relations

$$\frac{(x' + a)(x'' + a)}{(a - x')(a - x'')} = 1,$$

$$\frac{z'}{z''} = \frac{y'}{y''} = \frac{t'}{t''} \cdot \frac{1 + t''^2 + \theta''^2}{1 + t'^2 + \theta'^2};$$

lesquelles donnent, en tenant compte des précédentes égalités,

$$x' = -x'', \quad y' = -y'', \quad z' = -z''.$$

2° *Lorsque deux points* m, n, *du plan* Π, *sont en ligne droite avec l'origine* ω, *si l'on a*

$$\omega m \, . \, \omega n = +1,$$

les points correspondants M, N, *de l'ellipsoïde, sont symétriques par rapport au plan principal* YOZ.

Le calcul précédent donne, dans ce cas,

$$x'' = -x', \quad y'' = y', \quad z'' = z'.$$

23. — Remarque II. Lorsque deux droites δ, δ' du plan Π sont rectangulaires, nous avons montré plus haut (§ 10) comment se transformait cette propriété ; mais nous voulons faire encore une autre remarque, relative à la transformation des deux droites rectangulaires du plan Π.

Soient

$$\mathrm{A}t + \mathrm{B}\theta + \mathrm{C} = 0,$$
$$\mathrm{B}t - \mathrm{A}\theta + \mathrm{C}' = 0,$$

les équations des droites proposées; à ces droites correspondent, sur l'ellipsoïde, deux ellipses dont les plans ont pour équation, respectivement [v. formules (*e*), § 3],

$$\mathrm{A}\frac{y}{b} + \mathrm{B}\frac{z}{c} + \mathrm{C}\left(1 + \frac{x}{a}\right) = 0,$$
$$\mathrm{B}\frac{y}{b} + \mathrm{A}\frac{z}{c} \quad \mathrm{C}'\left(1 + \frac{x}{a}\right) = 0.$$

D'après cela, ces plans ont pour traces, sur YOZ, deux droites dont les coefficients angulaires ont un produit égal à

$$-\frac{c^2}{b^2};$$

d'où la propriété suivante :

A deux droites rectangulaires du plan fondamental, correspondent deux ellipses dont les plans coupent le plan YOZ *suivant deux droites ayant des directions conjuguées, relativement à l'ellipse principale située dans ce plan.*

24. Applications. — Réflexions générales. Les applications d'une méthode de transformation, bien qu'en nombre infini, du moins en théorie, sont, au contraire, dans la pratique, très restreintes; parce que l'on doit rejeter évidemment tous les théorèmes compliqués qu'elle peut fournir. Il peut aussi arriver que le point auquel on aboutit, en transformant une propriété connue, soit une vérité évidente d'elle-même.

Donnons d'abord un exemple de l'impuissance que nous signalons ici, et proposons-nous de transformer la propriété relative aux axes radicaux de trois cercles situés dans un plan.

Désignons ces cercles par *a*, *b*, *c*; appelons (α, α'), (β, β'), (γ, γ'), leurs points communs; (α, α') représentant les points communs à *b* et *c*; et ainsi des autres.

Aux cercles *a*, *b*, *c*, correspondent sur E, des ellipses a', b', c'; la droite (α, α') donne une ellipse a'' passant par le sommet A′ ou, en transformant homographiquement

l'ellipsoïde, par un point quelconque de cette surface (*). Le théorème élémentaire que nous avons rappelé donnerait donc, d'après la transformation omaloïdale, la propriété suivante.

On considère, sur un ellipsoïde E, *trois ellipses* a′, b′, c′ *et un point* A′; *par* A′ *et par les points communs aux ellipses* b′ *et* c′, *on peut tracer une ellipse sur la surface; les trois ellipses ainsi obtenues concourent au même point.*

Mais cette propriété est, pour ainsi dire, évidente par elle-même. Elle résulte immédiatement de ce fait, que les trois ellipses visées dans l'énoncé précédent passent nécessairement par le point de rencontre de l'ellipsoïde, avec la droite qui joint le point A′ au point de concours des plans qui renferment les trois ellipses a', b', c'.

25. — Voici, au contraire, un exemple de transformation effective. Cet exemple, par lequel nous terminons ce travail, a été choisi, entre beaucoup d'autres, peut-être plus importants, pour montrer comment, par la puissance de la transformation, on peut tirer, des théorèmes les plus élémentaires, certaines propriétés de la géométrie supérieure.

Considérons un rectangle ωpmq et prenons deux de ses côtés pour axes des coordonnées t, θ.

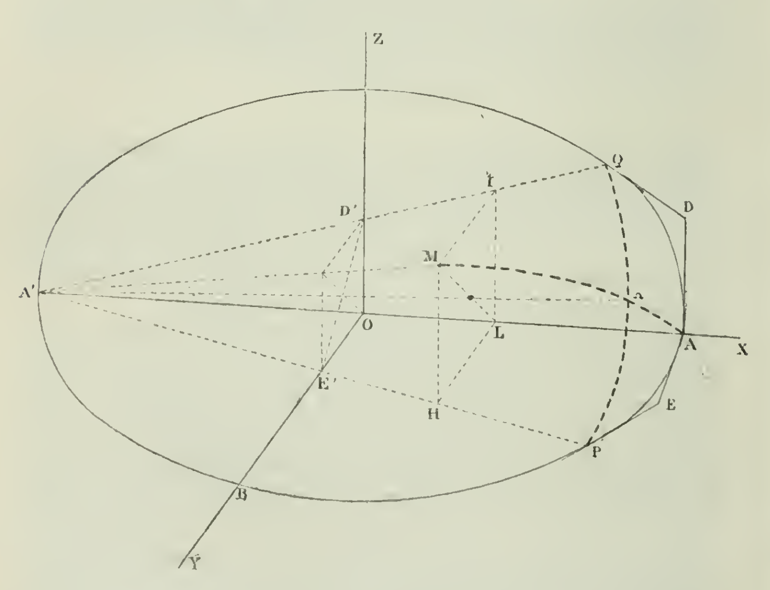
Au point m, correspond un point M sur l'ellipsoïde; à la droite mp $(t = h)$ correspond, d'après la première des formules (e), une ellipse située dans un plan parallèle à OZ; on sait d'ailleurs que cette ellipse, correspondant à une droite du plan Π, passe par A′. D'après cela, si l'on projette M en H sur le plan YOX, la droite A′H rencontre l'ellipse principale ABA′ en un point P, qui est le correspondant de p.

En projetant M sur ZOX, en I, on voit de même que Q correspond à q.

(*) Pour marquer que le point A′ est un point quelconque de l'ellipsoïde, il n'est même pas nécessaire d'introduire la transformation homographique; il suffit d'observer que rien ne suppose, dans les calculs précédents, que les axes OX, OY, OZ, sont rectangulaires, et toutes nos conclusions subsistent en prenant, pour axes de coordonnées, trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde.

Enfin au cercle γ qui est circonscrit au rectangle ωpmq, correspond une ellipse passant par les trois points P, M, Q, et aussi (§ 7, rem. V) par A. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'on prend un point quelconque* M *sur l'ellipsoïde et si on le joint à un sommet* A' *de la surface, les projections de* A'M *sur les deux plans principaux qui passent par le sommet considéré* A' *rencontrent les ellipses principales, respectivement, en des points* P *et* Q; *le plan* MPQ *passe par un point fixe qui est le sommet* A, *opposé à* A'.



26. — Enfin, voici une deuxième propriété résultant encore de la figure plane considérée.

On sait que le point de concours des diagonales, le point ω', est le centre de γ. A la droite pq, correspond l'ellipse PA'Q; et à ωm, l'ellipse AMA' ; au point ω' correspond le point Ω (autre que A'), commun à ces deux ellipses ; nous savons (§ 5) que celui-ci est en ligne droite avec le pôle ρ du plan AMPQ et le point A'.

Cherchons la position de ce point ρ ; à cet effet, menons les tangentes aux ellipses principales aux points A, P et Q.

Les plans tangents à la quadrique en ces points étant perpendiculaires aux plans principaux, le pôle du plan APQ est un point dont les coordonnées sont : a, AE, AD.

D'autre part, une propriété très simple (*), et probablement très connue, de l'ellipse donne

$$DA = OD', \text{ et } AE = OE';$$

la droite $A'\rho$ rencontre donc le plan ZOY en un point dont les coordonnées sont : $a = 0$, $\frac{OE'}{2}$, $\frac{OD'}{2}$. Ce point n'est autre que le milieu de D'E'.

D'ailleurs, la droite A'Ω passant par le milieu de D'E', passe aussi par le milieu de ML, L désignant la projection de M sur AA'; de là, l'énoncé suivant :

Théorème. — *On considère un axe* AA' *d'un ellipsoïde et une corde* A'M *de cette surface; si l'on projette* A'M *sur les deux plans principaux qui passent par* AA', *on obtient deux cordes* A'P, A'Q :

Les ellipses (A'PQ), (A'AM), *se coupent en un point* Ω, *et la droite* A'Ω *coupe en deux parties égales la projetante de* M *sur l'axe* AA'.

27. — Nous ne voulons pas nous étendre davantage sur les applications que comporte cette méthode de transformation, mais nous pouvons dire, après l'avoir vérifié sur des cas nombreux, que ces applications donnent lieu à des exercices intéressants, exercices que l'on peut démontrer ensuite, par une analyse le plus souvent assez simple. L'exemple que nous avons traité a été mis ici uniquement pour indiquer la marche qu'il faut suivre en appliquant cette méthode de transformation et il n'a, par lui-même, aucune importance. En développant cet exemple, nous avons seulement cherché à montrer, comme nous l'avons dit plus haut, l'efficacité d'un

---

(*) On déduit, en particulier, de cette remarque, une construction très commode de la tangente, en un point de l'ellipse, connaissant ce point et l'un des axes, en grandeur et en position, au moyen de la règle et de l'équerre.

procédé qui permet d'exploiter les vérités les plus simples de la géométrie plane, pour en tirer des propriétés correspondantes de la géométrie des quadriques.

Nous reviendrons d'ailleurs sur cette étude, que nous laissons ici très incomplète, et nous appliquerons alors la transformation omaloïdale à la recherche de propriétés de certaines quartiques gauches particulières qui, sur l'ellipsoïde, correspondent aux coniques du plan fondamental (*).

QUESTION 72

Première solution par M. J. Lemoine, élève en Mathématiques spéciales au Lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay).

On donne une parabole P, *rapportée à ses axes ordinaires : par le pied de la directrice on mène une transversale qui rencontre* P *en deux points* A *et* B. *Soit* C *le cercle qui passe par ces points et par le foyer de* P.

Lieu des centres des cercles C. *Ce lieu est une parabole cubique.*

Enveloppe des polaires de l'origine. Cette courbe est une cubique unicursale.

Enveloppe des cercles C ; *on trouvera une quartique à point triple.*

Par le pied de la directrice on mène deux droites rectangulaires Δ *et* Δ'. *Soient* C *et* C' *les cercles correspondants. Trouver le lieu des points communs à* C *et à* C' ; *ce lieu est une quartique passant doublement par les ombilics du plan.*

(G. L.)

Soit

$$y^2 - 2px = 0$$

l'équation de la parabole et

$$y = m\left(x + \frac{p}{2}\right)$$

une sécante passant par le pied de la directrice. La seconde

(*) On peut voir sur ce sujet un intéressant mémoire de Clebsch (MATH. ANNALEN, 1869 ; p. 253. *Ueber die abbildung algebraischer* Flöchen, inbesondere der vierten und fünften ordnung.

corde d'intersection du cercle avec la parabole aura pour coefficient angulaire — m. Son équation sera

$$y + mx + n = 0.$$

Par l'intersection de ces deux droites avec la parabole je fais passer une conique

$$\lambda(y^2 - 2px) + \left(y - mx - \frac{mp}{2}\right)(y + mx + n = 0.$$

En écrivant que cette conique est un cercle passant par le foyer de la parabole, on obtient l'équation de ce cercle :

$$m^2(x^2 + y^2) - p(1 + m^2)x - \frac{p}{m}y + \frac{p^2}{4}(2 + m^2) = 0$$

ou $$m^2\left[y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2\right] - p\left(x - \frac{p}{2}\right) - \frac{p}{m}\, y = 0.$$

Transportant les axes au foyer $x = \frac{p}{2}$ $y = 0$,

on trouve $$m^2(x^2 + y^2) - px - \frac{p}{m}\, y = 0,$$

Lieu des centres. — Le centre sera défini par les deux dérivées partielles égalées à 0.

$$2m^2x - p = 0,$$
$$2m^2y - \frac{p}{m} = 0.$$

En éliminant m entre ces deux équations, on obtient le lieu

des centres $$y^2 = \frac{2}{p}\, x^3,$$

parabole cubique qui est une développée de parabole.

Enveloppe des polaires de l'origine. — Dans le système actuel le sommet de la parabole a pour coordonnées

$$y = 0, \quad x = -\frac{p}{2},$$

Sa polaire a donc pour équation

$$\frac{p}{2}(2m^2x - p) + px + \frac{p}{m}\, y = 0$$

ou $$m^3 + m\frac{\left(x - \frac{p}{2}\right)}{x} + \frac{y}{x} = 0.$$

Si j'écris que cette équation en m a une racine double, il vient l'équation du lieu

$$\frac{4\left(x-\frac{p}{2}\right)^3}{x}+27y^2=0$$

$$y^2+\frac{4}{27x}\left(x-\frac{p}{2}\right)^3=0$$

C'est une cubique unicursale ayant pour asymptote l'axe des y et comme point de rebroussement le point

$$x=\frac{p}{2}\ y=0.$$

Enveloppe des cercles C. — L'enveloppe des cercles C s'obtiendra en éliminant m entre l'équation du cercle et l'équation dérivée en m

$$2m(x^2+y^2)+\frac{p}{m^2}y=0.$$

On trouve ainsi la courbe suivante :

$$27y^2(x^2+y^2)-4px^3=0,$$

quartique ayant l'origine pour point triple avec la tangente $x=0$. Elle a des branches paraboliques dont la concavité est tournée vers l'axe Ox (*).

Intersection des cercles correspondant à deux droites rectangulaires. — Les cercles C et C' correspondant aux droites rectangulaires Δ et Δ' ont pour équation

$$\begin{cases} m^2(x^2+y^2)=px+\dfrac{p}{m}y \\ \dfrac{1}{m^2}(x^2+y^2)=px-pmy. \end{cases}$$

Il s'agit d'éliminer m entre ces deux équations.

Je les ajoute

$$(x^2+y^2)\left(m^2+\frac{1}{m^2}\right)=2px+py\left(\frac{1}{m}-m\right).$$

Je les retranche

$$(x^2+y^2)\left(m^2-\frac{1}{m^2}\right)=py\left(m+\frac{1}{m}\right)$$

ou divisant par $m+\dfrac{1}{m}$ qui est différent de zéro :

(*) Il fallait déterminer la parabole asymptote de cette courbe. (G. L.)

$$m - \frac{1}{m} = \frac{py}{x^2 + y^2}$$

$$m^2 + \frac{1}{m^2} = \frac{p^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} + 2 = \frac{p^2y^2 + 2(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

On aura donc comme équation du lieu

$$\frac{p^2y^2 + 2(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} = 2px - \frac{p^2y^2}{x^2 + y^2}$$

ou

$$(x^2 + y^2)^2 - px(x^2 + y^2) + p^2y^2 = 0.$$

Cette courbe n'a pas de points à l'infini. Elle a un point de rebroussement à l'origine avec l'axe des x comme tangente. En la mettant sous la forme

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - px) + p^2y^2 = 0$$

on voit qu'elle est tout entière comprise à l'intérieur du cercle

$$x^2 + y^2 - px = 0.$$

Il est alors facile de la construire (*).

Deuxième solution, par M. U. GÉNIN, élève au Lycée de Bar-le-Duc.

I. — L'équation de la parabole est :

$$y^2 = 2px,$$

celle du cercle sera de la forme:

$$\left(y - mx - \frac{mp}{2}\right)(y + mx + k) + \lambda(y^2 - 2px) = 0.$$

Égalons les coefficients de x^2 et de y^2 :

$$1 + \lambda = - m^2.$$

d'où

$$\lambda = - (1 + m^2),$$

Exprimons que le cercle passe au foyer de la parabole :

$$- mp\left(\frac{mp}{2} + k\right) = \lambda p^2 = 0,$$

d'où

$$k = - \frac{\lambda p^2 + \frac{1}{2} m^2p^2}{mp} - p\,\frac{2 + m^2}{2m}.$$

(*) Pour préciser le tracé de cette courbe on pouvait déterminer les tangentes issues de l'origine. *(G. L.)*

L'équation finale du cercle est donc :

$$\left(y - mx - \frac{mp}{2}\right)\left(y + mx + p\,\frac{2 + m^2}{2m}\right) - (1 + m^2)(y^2 - 2px) = 0,$$

ou :

$$x^2 + y^2 - p\,\frac{1 + m^2}{m^2}\,x - \frac{p}{m^3}\,y + \frac{p^2}{4m^2}\,(2 + m^2) = 0.$$

Les coordonnées du centre sont :

$$x = p\,\frac{1 + m^2}{2m^2}, \qquad y = \frac{p}{2m^3}.$$

Il faut éliminer m entre ces deux équations.

La première donne :

$$m^2 = \frac{p}{2x - p}.$$

Portons cette valeur dans la seconde ; on en tire

$$m = \frac{2x - p}{2y}.$$

Le lieu est donc :

$$(2x - p)^3 = 4py^2.$$

C'est une parabole cubique qui a pour point triple le foyer de la parabole donnée.

II. — La polaire d'un point x_0, y_0 est :

$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0.$$

Pour l'origine, elle se réduit à $f'_z = 0$, c'est-à-dire :

$$\frac{1 + m^2}{m^2}\,x + \frac{y}{m^3} - p\,\frac{2 + m^2}{2m^2} = 0.$$

ou :

$$m^3(2x - p) + 2m(x - p) + 2y = 0. \qquad (1)$$

La dérivée par rapport à m est :

$$3m^2(2x - p) + 2(x - p) = 0.$$

Il faut éliminer m entre (1) et (2). Dans la première je remplace m^2 par sa valeur tirée de la seconde, et j'ai :

$$m = \frac{3y}{2(p - x)};$$

portant dans (2), j'ai le lieu :

$$27y^2(2x - p) = 8(p - x)^3.$$

C'est bien une cubique unicursale, car si on transporte les

axes de coordonnées au point : $y = 0$, $x = p$ et qu'on pose $y = tx$, on pourra avoir y et x en fonction de t.

III. — J'ordonne l'équation du cercle par rapport à m.

$$m^3\left(x^2 + y^2 - px + \frac{p^2}{4}\right) - mp\left(x - \frac{p}{2}\right) - py = 0.$$

Je prends sa dérivée par rapport à m :

$$3m^2\left(x^2 + y^2 - px + \frac{p^2}{4}\right) - p\left(x - \frac{p}{2}\right) = 0.$$

Il faut éliminer m entre ces deux équations pour avoir le lieu demandé :

Dans la première, je porte la valeur de m^2 tirée de la seconde, et j'obtiens : $m = \frac{-3y}{2x - p}$.

Portons cette valeur de m dans la deuxième :

$$27y^2\,[(2x - p)^2 + 4y^2] = 2p\,(2x - p)^3.$$

C'est une courbe du quatrième degré qui admet pour point triple le foyer de la parabole.

IV. — Les équations de deux cercles correspondant à deux droites rectangulaires sont :

$$m^3[(2x - p)^2 + 4y^2] - 2mp\,(2x - p) - 4py = 0. \quad (\alpha)$$

et

$$4pym^3 - 2m^2p\,(2x - p) + [(2x - p)^2 + 4y^2] = 0. \quad (\beta)$$

Il faut éliminer m entre ces deux équations pour avoir le lieu de leurs points de rencontre.

Cela revient à exprimer que ces deux équations ont une racine commune ; si j'appelle m_1, m_2, m_3, les racines de la première, celles de la seconde seront $\frac{-1}{m_1}$, $\frac{-1}{m_2}$, $\frac{-1}{m_3}$; on doit avoir, par exemple : $m_1 = \frac{-1}{m_3}$, d'où $m_1 m_3 = -1$.

Donc au lieu d'éliminer m entre les équations (α) et (β), je vais exprimer que la première (α) a deux racines m_1, m_3 telles que $m_1 m_3 = -1$, c'est-à-dire qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$m^3\,[(2x - p)^2 + 4y^2] - 2mp\,(2x - p) - 4py$$
$$= (am^2 + bm - a)\,(lm + q).$$

En identifiant les deux membres, on en tire les relations :

$$al = (2x - p)^2 + 4y^2 \qquad (1)$$
$$aq + bl = 0 \qquad (2)$$
$$bq - al = -2p\,(2x - p) \qquad (3)$$
$$aq = 4py. \qquad (4)$$

La deuxième donne : $bl = -4py$.

La troisième donne : $bq = (2x - p)^2 + 4y^2 - 2p\,(2x - p)$

d'où $\dfrac{l}{q} = \dfrac{-4py}{(2x - p)^2 + 4y^2 - 2p\,(2x - p)}$.

En divisant (1) par (4) membre à membre, on a :

$$\frac{l}{q} = \frac{(2x - p)^2 + 4y^2}{4py}.$$

Donc le lieu a pour équation :

$$\frac{(2x - p)^2 + 4y^2}{4py} = \frac{-4py}{(2x - p)^2 + 4y^2 - 2p\,(2x - p)}$$

ou :

$$[(2x - p)^2 + 4y^2]\,[(2x - p)^2 + 4y^2 - 2p\,(2x - p)] + 16py^2 = 0.$$

Les ombilics du plan ont pour coordonnées :

$$(i, -1, 0), \quad (-i, 1, 0).$$

Si on porte ces valeurs de x, y, z, dans l'équation de la courbe, on trouve :

$$4\,(-1 + 1)^2 = 0.$$

Donc la courbe passe doublement aux ombilics du plan.

QUESTION 88

Solution par M. E. Simonot, à la Faculté libre de Lyon.

On considère une ellipse E, *et le cercle* Δ *décrit sur le petit axe* BB′ *comme diamètre. Sur* BB′ *à partir du centre* O, *on prend deux points* P, P′ *tels que l'on ait*

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OP'} = \frac{bc}{a}\,;$$

par ces points P et P′ *on mène deux droites parallèles et dans la même direction ; ces droites rencontrent* Δ *en deux points* q *et* q′.

Trouver le lieu décrit par le point de rencontre des tangentes à Δ *aux points* q *et* q'.

1° *Solution analytique.* — Les droites Pq, P'q' ont pour équations

$$\text{P}q \qquad ay - bc = mx \qquad (1)$$
$$\text{P}'q' \qquad ay + bc = mx \qquad (2)$$

(α, β) étant le pôle de Pq, (α_1, β_1) celui de P'q'.

En identifiant les polaires de ces points avec les équations (1) et (2), il vient

$$\alpha = -\alpha_1 = -\frac{bm}{c}, \qquad \beta = -\beta_1 = \frac{ab}{c}.$$

L'équation quadratique du système des deux tangentes Nq est

$$(x^2 + y^2 - b^2)(\alpha^2 + \beta^2 - b^2) - (\alpha x + \beta y - b^2)^2 = 0. \ (3)$$

et celle du sytème des deux tangentes N'q' est

$$(x^2 + y^2 - b^2)(\alpha^2 + \beta^2 - b^2) - (\alpha x + \beta y + b^2)^2 = 0. \ (4)$$

Les coordonnées du lieu satisferont à l'équation

$$\alpha x + \beta y = 0$$

obtenue en retranchant (3) de (4), ou à

$$-\frac{bmx}{c} + \frac{aby}{c} + 0,$$

d'où

$$m = \frac{ay}{x}.$$

En éliminant α, β et m dans l'équation (3), il vient comme équation du lieu,

$$(x^2 + y^2 - b^2)(a^2y^2 + b^2x^2) - b^2c^2x^2 = 0$$

ou

$$(x^2 + y^2)(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) = 0.$$

En supprimant le facteur étranger $x^2 + y^2 = 0$, on voit que l'équation du lieu se réduit à celle de l'ellipse E.

2° On peut arriver plus rapidement au résultat par des considérations géométriques.

En effet, le triangle rectangle MOq donne

$$b^2 = \rho \cdot \text{OR} = \rho \sqrt{b^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}\cos^2\varphi}$$

d'où

$$ab = \rho\sqrt{a^2 - c^2\cos^2\varphi} = \rho\sqrt{a^2 - \frac{c^2x^2}{\rho^2}} = \sqrt{b^2x^2 + a^2y^2}$$

et enfin

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Nota. — La même question a été résolue par MM. Richard, à Agen; Michel, à Montpellier: Viélajus, à Bordeaux; Bèche, à Tulle.

QUESTION 91

Solution par M. E. Fesquet, Lycée de Nîmes.

On donne un point fixe O, *et une droite fixe* AB; *pour chaque point* P *de* AB, *on prend normalement à* AB, PM $= \lambda$. OP, λ *étant une constante. Quel est le lieu du point* M, *et quel est le problème simple de géométrie descriptive que l'on peut regarder comme l'origine du problème actuel?*

L'analyse conduit immédiatement à l'équation du lieu. En prenant pour axes AB et la perpendiculaire élevée par O sur AB, l'équation du lieu est :

$$y = \pm \lambda\sqrt{x^2 + a^2}$$

ou

$$y^2 - \lambda^2x^2 - a^2\lambda^2 = 0,$$

équation d'une hyperbole rapportée à ses axes. Les sommets réels sont sur Oy.

Considérons la figure comme une épure de géométrie descriptive. Soit AB la ligne de terre; considérons (O'M, OP) comme les projections d'une droite; nous sommes ramenés à chercher le lieu des traces verticales de ces droites. Rabattons OP, O'M autour de OP; l'angle POM est l'angle de la droite avec le plan horizontal; or :

$$\operatorname{tg} POM_1 = \frac{PM_1}{OP} = \frac{PM}{OP} = \lambda.$$

Donc tg POM_1 et par suite POM_1 est constant; l'angle de (O'M, OP) avec le plan horizontal est constant; il en est de même de l'angle de la droite avec la verticale du point O. La droite décrit donc un cône de révolution autour de la

verticale du point O, et le lieu des points tels que M est l'intersection du cône par le plan vertical. C'est une hyperbole, puisque le plan vertical est parallèle à l'axe de révolution.

Cette remarque donne quelques propriétés du lieu. Ainsi pour avoir la tangente en M, il suffit de mener par O une perpendiculaire sur OP, et de joindre le point d'intersection α de cette perpendiculaire avec AB au point M. Cela résulte immédiatement de la construction de la tangente en un point de la section.

Pour avoir les asymptotes, il suffit de mener par le point O' deux droites faisant avec Oy le complément de l'angle POM_1.

Remarque. — A peu près toutes les épures de géométrie descriptive donnent lieu à un problème de géométrie pure. Par exemple la propriété du plan bitangent au tore de couper celui-ci suivant deux cercles, permet de résoudre immédiatement le problème suivant (*).

Étant donnés deux cercles égaux C et C'; on mène une tangente commune intérieure EF, et par un point P quelconque de EF une parallèle à la ligne des centres C, C'. Cette parallèle rencontre chaque cercle aux points A, A' et B, B'. On élève PM perpendiculaire sur EF, et on prend sur cette droite deux longueurs PM, PM' telles que l'on ait

$$\overline{PM}^2 = PA \cdot PB$$

$$\overline{PM'}^2 = PA' \cdot PB'.$$

Le lieu des points M et M' ainsi définis se compose de deux circonférences.

La solution analytique de ce problème pourra peut-être intéresser les lecteurs du *Journal de Mathématiques spéciales.*

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

QUESTION 94

Solution par M. Paul Bourgarel, élève de Mathématiques spéciales à Antibes.

Démontrer, au moyen des relations entre les coefficients et les racines, que la condition :

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ C & D & E \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

exprime que les racines de l'équation :

$$Ax^4 - 4Bx^3 + 6Cx^2 - 4Dx + E = 0 \qquad (2)$$

sont en proportion harmonique, c'est-à-dire sont liées par la relation :

$$2(\alpha\beta + \gamma\delta) = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta).$$

Les relations entre les coefficients et les racines nous donnent :

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + \delta &= \frac{4B}{A} \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta &= \frac{6C}{A} \\ \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta &= \frac{4D}{A} \\ \alpha\beta\gamma\delta &= \frac{E}{A} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Pour obtenir la condition cherchée, il faut éliminer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ entre la relation (2) et les relations (3).

Posons

$$\alpha\beta = m$$
$$\gamma\delta = n$$
$$\alpha + \beta = p$$
$$\gamma + \delta = q.$$

Les relations précédentes deviennent :

$$2(m + n) = pq$$

$$p + q = \frac{4B}{A}$$

$$m + pq + n = \frac{6C}{A}$$

$$mq + np = \frac{4D}{A}$$

$$mn = \frac{E}{A}$$

relations qui peuvent s'écrire :

$$m + n = \frac{2C}{A} \qquad (4)$$

$$p + q = \frac{4B}{A} \qquad (5)$$

$$pq = \frac{4C}{A} \qquad (6)$$

$$mq + pn = \frac{4C}{A} \qquad (7)$$

$$mn = \frac{E}{A}. \qquad (8)$$

Nous sommes donc ramenés à éliminer m, n, p, q entre les relations (4), (5), (6), (7) et (8).

Dans (8) portons la valeur de n tirée de (4) et dans (6) portons la valeur de q tirée de (5); nous obtenons ainsi les deux équations :

$$Am^2 - 2Cm + E = 0 \qquad (9)$$

$$Ap^2 - 4Bp + 4C = 0. \qquad (10)$$

Puis dans (7) portons les valeurs de q et de n tirées des équations (4) et (5); nous obtenons ainsi :

$$2Bm - Apm + Cp - 2D = 0. \qquad (11)$$

Enfin dans l'égalité (10) transportons la valeur de p tirée de (11); nous obtenons :

$$A(B^2 - AC)m^2 - 2C(B^2 - AC)m + 2BCD - AD^2 - C^3 = 0.$$

Eliminons enfin m entre cette dernière équation et l'équation (9); l'élimination est immédiate et l'on trouve :

$$ACE - EB^2 - AD^2 + 2BCD - C^3 = 0,$$

c'est-à-dire précisément le développement du déterminant (1).

QUESTION 96

Solution, par M. A. LEBLOND, élève de Mathématiques spéciales au Lycée du Havre.

On considère une strophoïde droite S*; par le sommet de la courbe, son point double, et un point* M *mobile sur* S, *on fait passer une circonférence* Δ*; enfin par* M *on mène une parallèle à l'asymptote de* S, *et cette parallèle rencontre* Δ *en un point* I. *Trouver le lieu de ce point.*

Ce lieu est une circonférence; on donnera, après la solution analytique de ce problème, une démonstration géométrique du résultat trouvé. (G. L.)

Soit la strophoïde $y^2 = x^2 \dfrac{R + x}{R - x}$.

Soient α, β les coordonées d'un point I du lieu et α, y, celles du point M de la strophoïde auquel il correspond. Exprimons que ces deux points sont, avec l'origine et le sommet de la courbe, sur un même cercle, nous aurons :

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 + y^2 & \alpha & y \\ \alpha^2 + \beta^2 & \alpha & \beta \\ R^2 & -R & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou bien, en remplaçant la première ligne par le résultat obtenu en retranchant les éléments de la seconde de ceux de cette première, puis en supprimant le facteur $R(y - \beta)$:

$$\begin{vmatrix} y + \beta & 0 & 1 \\ \alpha^2 + \beta^2 & \alpha & \beta \\ R & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

D'où :

$$y = \alpha \frac{R + \alpha}{\beta}$$

substituant dans la relation $y^2 = \alpha^2 \dfrac{R + \alpha}{R - \alpha}$, nous aurons. en supprimant les facteurs singuliers α^2 et $R + \alpha$:

$$\alpha^2 + \beta^2 = R^2.$$

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Soient A le sommet et B l'intersection de AM et de Oy. (Le lecteur est prié de faire la figure.) Supposons le point M d'abscisse positive. Alors, on a : AIO = OMB comme ayant même mesure et AOI = OBM par suite des égalités d'angles suivantes :

$$AOI = AOM + MOI = AIM + MAI = 180^\circ - AMI = OBM$$

Les triangles OAI, OBM sont donc semblables ; on le démontrerait d'une façon analogue si M était d'abscisse négative. Mais le point M appartenant à la strophoïde, OBM est isoscèle, OAI l'est donc aussi. Donc OI = OA. C. Q. F. D.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Simon, au collège Chaptal ; Callé, à Grenoble ; Bourgarel, à Antibes ; Bèche, à Tulle ; Martin, à Nice ; Richard, à Agen ; Clément, à Rouen ; Beaumenu, à Moulins ; Houdry, à Melun.

QUESTION 97

Solution par M. Léon Clément, élève au Lycée de Rouen.

Soit M *un point d'un strophoïde ayant pour sommet* O *et pour point double* O'. *Du point* O' *comme centre avec* O'O *pour rayon décrivons un cercle* Δ. *Si du point* M *on abaisse une perpendiculaire sur* OO', *cette droite rencontre* Δ *en deux points, parmi lesquels on distinguera particulièrement le point* H *qui jouit de la propriété que* MH = MO.

1° Reconnaître l'exactitude de cette proposition ;

2° Démontrer que si les perpendiculaires à OM, *au point* O, *et les tangentes en* H *à* Δ *se coupent en* T, TM *est la tangente à la strophoïde ;*

3° Démontrer que si l'on prend MH' = MH, *le lieu du point* H' *est un cissoïde ;*

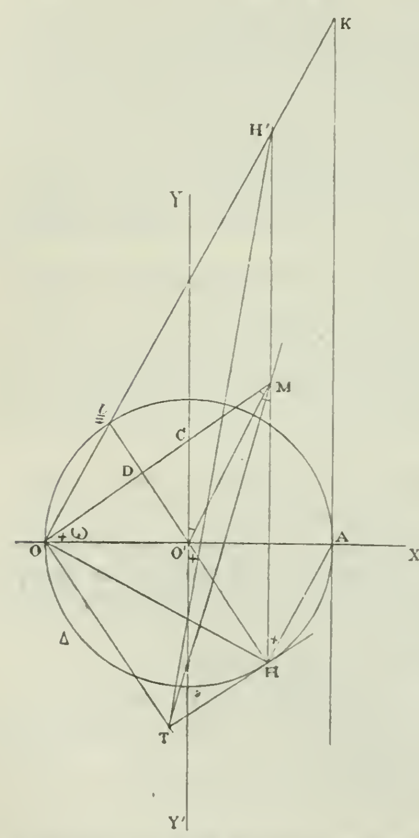
4° Reconnaître que la tangente au point H' *à la cissoïde passe, elle aussi, par le point* T ; *et faisant alors abstraction de la strophoïde considérée d'abord, déduire des remarques précédentes une construction de la tangente à la cissoïde.* (G. L.)

1° Menons O'M, et soit C le point d'intersection de OM avec la perpendiculaire O'Y à OO'. On a CM = CO'; par suite CMO' = CO'M. Or CO'M = O'MH comme alternes-internes.

Donc

$$CMO' = O'MH.$$

Donc les droites MH, MO sont symétriques par rapport à MO', et parconséquent un des points d'intersection H de MH avec la circonférence Δ est tel que MH = MO. Ce point H est le symétrique du point O par rapport à MO'; il en résulte que pour tous les points de la strophoïde situés dans l'angle YO'X et son opposé par le sommet, le point H est sur la partie de la circonférence située au-dessous du diamètre OO'. Pour les autres points de la courbe, le point H est sur la partie supérieure de la circonférence Δ.



2° Menons le rayon HO' et prolongeons-le jusqu'à sa rencontre en D avec OM. A cause de la symétrie par rapport à MO', les deux angles MOO', MHO' sont évidemment égaux. Mais MHO' = HO'Y' comme alternes-internes. Donc MOO' = HO'Y'. Ceci démontre que HO' est perpendiculaire sur OM. Si donc on appelle ω l'angle MOX, on a :

$$OT = HD = HO' + O'D = a\ (1 + \sin \omega).$$

Or l'équation polaire de la strophoïde, O étant le pôle et OX l'axe polaire, est :

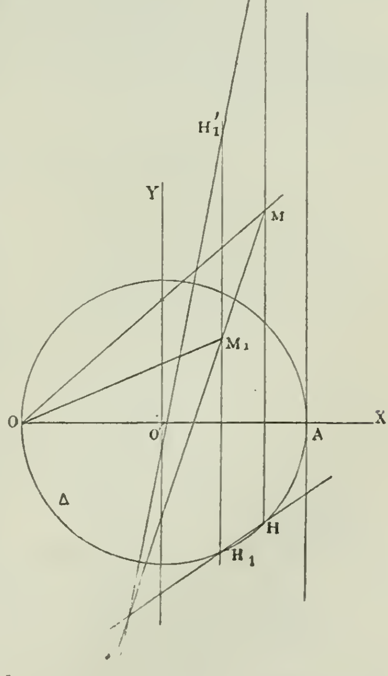
$$\rho = \frac{a\,(1 + \sin\omega)}{\cos\omega}.$$

La sous-tangente d'un point de la courbe a pour expression $\frac{\rho^2}{\rho'_\omega}$, c'est-à-dire :

$$a\,(1 + \sin\omega).$$

Donc OT est la sous-tangente du point M. Donc TM est la tangente.

On peut déduire de là un moyen assez commode de mener une tangente à la strophoïde par un point situé sur la courbe.



3° Menons OH, OH′; OH′ rencontre la circonférence Δ en un point I, et l'asymptote de la strophoïde en un point K. Joignons le point H au point A symétrique de O par rapport à O′.

De ce que MH = MH′ = MO, on en conclut que l'angle H′OH est droit ; donc le point I se trouve sur le diamètre HO′, et par suite AH est égal et parallèle à OI ; il en résulte que OI = H′K, car ces deux longueurs sont égales à AH.

Le lieu du point H est donc une cissoïde ayant le point O pour point de rebroussement, et AK pour asymptote.

4° Considérons deux points de la strophoïde M, M_1 voi-

sins l'un de l'autre. Soient H′, H'_1, les points correspondants de la cissoïde, et H, H_1, les points correspondants de Δ.

M étant le milieu de H′H, et M_1 le milieu de H'_1 H_1, les trois droites HH_1, MM_1, $H'H'_1$ sont concourantes.

Supposons que le point M_1 se rapproche indéfiniment du point M jusqu'à venir se confondre avec lui. A la limite le point H_1 se confond avec le point H, et le point H'_1 avec le point H′. Donc la tangente en H à la cissoïde passe par le point d'intersection T de la tangente en M à la strophoïde avec la tangente en H à la circonférence Δ.

Pour mener la tangente à la cissoïde par un point H′ de la courbe, on joindra au point O′ le point d'intersection I de OH′ avec Δ. On déterminera le second point d'intersection H de IO′ avec Δ. Au point H on mènera la tangente à Δ, et on abaissera du point O une perpendiculaire OT sur cette tangente. En joignant le point T au point H′ on aura la tangente cherchée.

Nota. — La même question a été résolue par M. Marzarit, à Angoulême.

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Solution de questions proposées.

Mélanges.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER, — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 28996-4.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DE TOUS LES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

J. BOURGET
Recteur de l'Académie de Clermont,

DE LONGCHAMPS
Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Charlemagne.

VAZEILLE
Directeur des études
à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

2e SÉRIE

TOME TROISIÈME



Année 1884.

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1884

COMITÉ DE RÉDACTION

MM. BOURGET
DE LONGCHAMPS
VAZEILLE
BOQUEL
MOREL

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

EXERCICES SUR LES INÉGALITÉS

M. de Longchamps, dans son Traité d'algèbre (*), a énoncé un certain nombre de questions sur des inégalités à vérifier; nous nous proposons ici de donner la solution de quelques-uns de ces exercices, qui sont la traduction de théorèmes dont on a souvent l'occasion de se servir en mathématiques élémentaires, ou qui présentent, dans la manière de les démontrer, quelque particularité les rendant intéressants; la plus remarquable de ces démonstrations est due, comme nous le dirons plus bas, à l'un des meilleurs analystes du siècle.

1. — *Démontrer que, si* $a_1, a_2, \dots a_p$ *sont des nombres qui ne sont pas tous égaux, on a*

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_p)^2 < p(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_p^2).$$

On sait que α et β étant deux nombres quelconques différents, on a

$$(\alpha - \beta)^2 > 0.$$

Considérons les quantités $a_1, a_2, \dots a_p$, et faisons les carrés des différences obtenues en retranchant de chacun de ces nombres ceux d'indices plus élevés; nous aurons

$$\Sigma\,(a_i - a_{i+j})^2 > 0.$$

En effectuant ces carrés, nous trouvons

(*) *Cours de Mathématiques spéciales.* 1re partie, Algèbre, par M. G. de Longchamps. — Paris, librairie Delagrave.

$$(p-1)\,a_1^2 + (p-1)\,a_2^2 + \ldots + (p-1)\,a_p^2 - 2a_1a_2$$
$$- 2a_1a_3 \ldots - 2a_{p-1}\,a_p > 0;$$

ou, en ajoutant de part et d'autre la somme des carrés des nombres donnés, et en faisant passer dans le second membre les termes affectés du signe —, il vient

$$p(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_p^2) > (a_1 + a_2 + \ldots + a_p)^2.$$

Remarque. — Si tous les nombres $a_1\ a_2 \ldots a_p$ étaient égaux, la somme, qui est positive dans le cas ordinaire, deviendrait nulle, et l'inégalité précédente se changerait en égalité.

2. — *Démontrer, avec la même hypothèse sur les nombres* $a_1, a_2, \ldots a_p$, *l'inégalité absolue*

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_p)^2$$
$$< p(2a_1^2 + 2a_2^2 + \ldots + 2a_p^2 - a_1a_2 - a_2a_3 - a_3a_4 - \ldots - a_pa_1).$$

Je considère les p inégalités suivantes qui sont bien connues

$$x^2 + a_1^2 + a_2^2 - xa_1 - xa_2 - a_1a_2 > 0$$
$$x^2 + a_2^2 + a_3^2 - xa_2 - xa_3 - a_2a_3 > 0$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$x^2 + a_p^2 + a_1^2 - xa_p - xa_1 - a_pa_1 > 0.$$

Je les ajoute membre à membre, ce qui donne

$$px^2 + 2a_1^2 + 2a_2^2 + \ldots + 2a_p^2 - 2x(a_1 + a_2 + \ldots + a_p)$$
$$- a_1a_2 - a_2a_3 - \ldots - a_p\,a_1 > 0.$$

Je multiplie par p, et j'ajoute au produit, de part et d'autre, l'expression $(a_1 + a_2 + \ldots + a_p)^2$;
l'inégalité qui en résulte peut se mettre sous la forme

$$[px - (a_1 + a_2 + \ldots + a_p)]^2$$
$$+ p(2a_1^2 + 2a_2^2 + \ldots + 2a_p - a_1a_2 - a_2a_3 \ldots - a_p\,a_1)$$
$$> (a_1 + a_2 + \ldots + a_p)^2.$$

Comme les inégalités dont nous sommes partis sont vraies quel que soit x, nous pouvons poser

$$px = a_1 + a_2 + \ldots + a_p;$$

alors l'inégalité se réduit à celle de l'énoncé.

Si les nombres $a_1, a_2, \ldots a_p$ étaient tous égaux, l'inégalité changerait encore en égalité.

3. — *Démontrer que l'on a l'inégalité absolue*

$$p\alpha^2 - 2\alpha(a_1 + a_2 + \ldots + a_p - p^2) + a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_p^2$$
$$- 2p(a_1 + a_2 + \ldots + a_p) + p^3 > 0.$$

Je vais démontrer que, quelle que soit la valeur que l'on donne à α, le trinôme du second degré en α conserve toujours le même signe, qui est ici le signe $+$, puisque p est un nombre entier et positif.

En effet, dans ce cas, la quantité sous le radical est

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_p - p^2)^2 - p(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_p^2)$$
$$+ 2p^2(a_1 + a_2 + \ldots + a_p) - p^4;$$

cette expression se réduit à

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_p)^2 - p(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_p),$$

et l'on sait, d'après l'exercice (1), que cette quantité est négative. C'est la condition nécessaire et suffisante pour que le trinôme conserve son signe.

On peut aussi mettre l'expression sous une forme qui rende évidente l'inégalité proposée; en effet, on peut grouper les termes de la façon suivante :

$$a_1^2 - 2pa_1 + p^2 - 2\alpha(a_1 - p) + \alpha^2$$

et d'autres termes analogues. Sous cette forme, on voit que l'expression est la somme de termes de la forme

$$(a_1 - p - \alpha)^2,$$

et il est évident que l'on a

$$\Sigma\,(a_1 - p - \alpha)^2 > 0.$$

4. — *Vérifier que les deux égalités*

$$(q - q')^2 - (p' - p)(pq' - qp') = 0$$
$$p(p' - p) - 2(q' - q) = 0$$

entraînent nécessairement : ou $p = p'$, *et par suite* $q = q'$, *ou* $p^2 - 4q = 0$, *si* $p - p'$ *est différent de zéro.*

Je remarque que si je supposais, à priori, $p' - p = 0$, les deux inégalités exigeraient, pour être vérifiées, que l'on eût $q - q' = 0$. Je vais prouver que les deux seules hypothèses possibles sont bien celles indiquées par l'énoncé.

Pour cela, j'écris la seconde inégalité de la façon suivante, en retranchant $4q$ de part et d'autre :

$$pp' - 2(q + q') = p^2 - 4q. \qquad (1)$$

D'autre part, les deux égalités proposées donnent, en

supposant $p - p'$ différent de zéro,

$$\frac{q'-q}{p'-p} = \frac{p}{2}, \quad \text{et} \quad \frac{q'-q}{p'-p} = \frac{pq'-qp'}{q'-q}.$$

On en tire

$$p(q'-q) - 2(pq'-qp') = 0$$

ou

$$2p(q+q') = 4p'q. \qquad (2)$$

Cela posé, je multiplie les deux membres de l'égalité (1) par p ; j'obtiens

$$p^2p' - 2p(q+q') = p^3 - 4pq,$$

ou, d'après l'égalité (2),

$$(p'-p)(p^2-4q) = 0.$$

On ne peut satisfaire à cette égalité qu'en posant

$$p'-p=0$$

ou

$$p^2-4q=0.$$

5. — *Démontrer que si* a, b, c, ... k, l, *représentent des quantités qui ne sont pas toutes égales, et qui sont supposées en nombre* p, *on a*

$$\sqrt[p]{abc\ldots kl} < \frac{a+b+c+\ldots+k+l}{p}.$$

(Cauchy.)

On sait que l'on a identiquement

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

et par suite

$$ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2;$$

donc, si $p=2$, on a

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}.$$

En second lieu, on a, pour quatre nombres a, b, c, d, la relation

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab}\,.\,\sqrt{cd}}$$

et par suite

$$\sqrt[4]{abcd} < \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} < \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2};$$

donc

$$\sqrt[4]{abcd} < \frac{a+b+c+d}{4}.$$

De la même manière, on démontrerait que l'on a

$$\sqrt[8]{abcdefgh} = \sqrt{\sqrt[4]{abcd}\,\sqrt{efgh}},$$

et par suite que le théorème est vrai pour huit nombres ; en général, on trouverait qu'il est vrai quand on a 2^k nombres.

Cela posé, pour démontrer que le théorème est général, Cauchy, au lieu de démontrer que, en le supposant vrai pour p quantités, il est vrai pour $p+1$ quantités, démontre au contraire que, en supposant ce théorème établi pour $p+1$ quantités, on peut l'établir pour p quantités.

On a identiquement

$$\sqrt[p]{abc \ldots kl} = \sqrt[p+1]{abc \ldots kl \sqrt[p]{abc \ldots kl}};$$

or, par hypothèse, puisque le théorème est établi pour $p+1$ quantités, on a

$$\sqrt[p+1]{abc \ldots kl \sqrt[p]{abc \ldots kl}} < \frac{a+b+c \ldots + k + l + \sqrt[p]{abc \ldots kl}}{p+1}.$$

Donc on a, après réduction,

$$p\sqrt[p]{abc \ldots kl} < a+b+c+\ldots+k+l;$$

on en tire facilement la généralisation indiquée par Cauchy.

Remarque. — La racine d'ordre p du produit de p nombres s'appelle quelquefois la *moyenne géométrique* de ces nombres. Le théorème de Cauchy peut, en adoptant cette expression, s'énoncer ainsi : *la moyenne géométrique de* p *nombres est toujours inférieure à leur moyenne arithmétique.* *(A suivre.)*

SUR LA MOYENNE HARMONIQUE

Par M. **G. de Longchamps.**

1. — On sait que Mac-Laurin(*) a nommé *moyenne harmonique* entre plusieurs valeurs données, x_1, x_2, ... x_p, celle

(*) Mac-Laurin, *Traité des courbes géométriques*, § 28.

dont la valeur inverse est *moyenne arithmétique* entre les valeurs inverses de ces quantités.

Si l'on suppose que sur une droite indéfinie Δ, et à partir d'une certaine origine O, on porte des longueurs

$$OA_1 = x_1,\ OA_2, = x_2,\ \ldots\ OA_p = x_p,$$

et, finalement, une longueur

$$OA = x,$$

vérifiant l'égalité

$$\frac{p}{x} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_p},$$

x est la moyenne harmonique, et le point A ainsi obtenu a été nommé par Poncelet (*) le *centre des moyennes harmoniques*. Ce point est aussi appelé, quelquefois, *conjugué harmonique du premier ordre* relativement au point O.

Nous nous proposons, ces définitions étant rappelées, d'indiquer ici comment on peut, par une construction rapide, et en supposant p assez considérable, construire la moyenne harmonique.

2. — Nous rappellerons d'abord la construction qu'on applique ordinairement au problème en question.

Sur A_1A_2 comme diamètre on décrit un demi-cercle, et du point O on mène à ce cercle une tangente; soit α_1 la projection du point de contact obtenu, sur Δ. On sait que l'on a

$$\frac{2}{O\alpha_1} = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2}.$$

Si l'on prend le point O_1 milieu de $O\alpha_1$, on aura donc

$$\frac{1}{OO_1} = \frac{1}{O_1\alpha_1} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OA_2}.$$

En répétant la construction précédente pour les trois points O, O_1 et A_3 on trouvera, de même, un point O_2, tel que

$$\frac{1}{OO_2} = \frac{1}{OO_1} + \frac{1}{OA_3}.$$

On a donc

(*) Poncelet, *Mémoire sur le centre des moyennes harmoniques;* JOURNAL DE CRELLE, t. III.
Voyez aussi Chasles, *Aperçu historique*, p. 147.

$$\frac{1}{OO_2} = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2} + \frac{1}{OA_3};$$

et ainsi de suite.

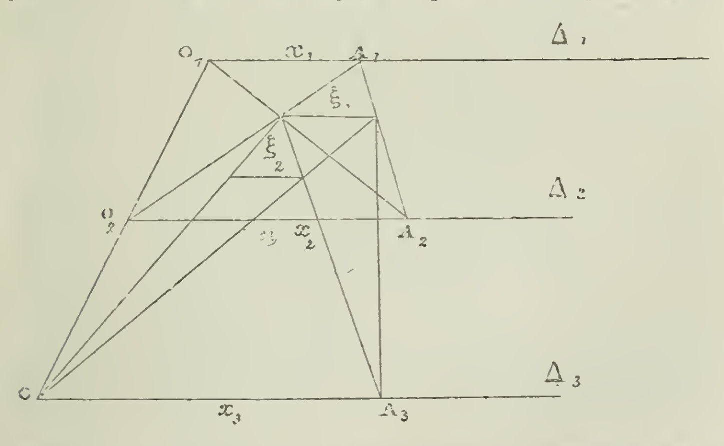
On trouvera donc facilement un point O_{p-1} tel que l'on ait

$$\frac{1}{OO_{p-1}} = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2} + \dots + \frac{1}{OA_p}.$$

En portant, à partir de O, une longueur égale à $p.\ OO_{p-1}$, on aura le centre des moyennes harmoniques.

Si l'on réfléchit à la somme de lignes que nécessite la construction précédente, on reconnaîtra qu'elle ne laisse pas que de présenter quelque complication quand on suppose p assez considérable. Si nous ne nous trompons, les constructions que nous allons maintenant indiquer offrent, sur la précédente, un avantage sensible.

3. — La première des deux constructions dont nous voulons parler repose sur ce théorème connu : *Si l'on désigne par* a *et* b *les bases d'un trapèze et par* 2x *la longueur de la*



parallèle à ces bases menée par le point de concours des diagonales : 1° ce point est situé au milieu de cette parallèle ; 2° on a

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$OA_1 = x_1,\ OA_2 = x_2,\ \ldots\ OA_p = x_p$$

et sur des droites parallèles $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_p$, portons, à partir d'origines arbitrairement choisies,

$$O_1A_1 = x_1,\ O_2A_2 = x_2,\ O_3A_3 = x_3,\ \ldots.$$

En faisant la construction qu'indique la figure, on a

$$\frac{1}{\xi_1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

puis

$$\frac{1}{\xi_2} = \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{x_3};$$

par conséquent,

$$\frac{1}{\xi_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3},$$

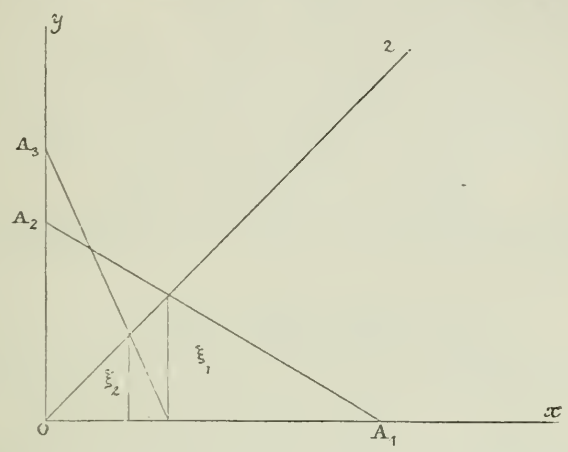
et ainsi de suite.

4. — Cette construction nous paraît particulièrement avantageuse parce qu'elle ne nécessite que l'usage de la règle.

A ce propos on peut remarquer que dans la construction indiquée au paragraphe précédent, le point que nous avons nommé α_1, n'étant autre chose que le conjugué harmonique de O par rapport au segment A_1A_2, on peut, par une construction connue, le déterminer en se servant seulement de la règle. Il faut ensuite, conformément à ce que nous avons dit, prendre le milieu de $O\alpha_1$; cette construction peut encore se faire avec la règle seule ; il suffit, à cet effet, de tracer un parallélogramme dont $O\alpha_1$ est une diagonale ; l'autre diagonale passe par le point cherché. Mais cette variété de la première construction exige, comme on le reconnaît sans peine, un nombre de lignes droites bien supérieur à celui des droites que nous employons dans la seconde construction.

5. — Enfin, la moyenne harmonique peut encore se construire, très simplement, en prenant pour base le théorème élémentaire suivant : *L'inverse de la distance du pied de la bissectrice de l'angle droit d'un triangle rectangle* AOB *au côté* OA *ou* OB *de ce triangle, est égale à* $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB}$.

Prenons un angle droit yOx et soit Oz la bissectrice ; ayant porté sur l'un des côtés de cet angle la longueur $OA_1 = x_1$,



puis, sur l'autre côté, les longueurs : $OA_2 = x_2$, $OA_3 = x_3$ ... nous avons d'abord :

$$\frac{1}{\xi_1} = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2},$$

puis

$$\frac{1}{\xi_2} = \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{OA_3},$$

d'où

$$\frac{1}{\xi_2} = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2} + \frac{1}{OA_3},$$

et ainsi de suite.

6. — En terminant cette petite note, nous dirons quelques mots d'une question que l'on rattache habituellement à la précédente; nous voulons parler de la construction de la *moyenne harmonique de carrés*.

Soit x_1, x_2, ... x_p des longueurs données en nombre p. on dit qu'une ligne x est une moyenne harmonique de carrés par rapport à ces longueurs, lorsque l'égalité

$$\frac{p}{x^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_p}$$

est vérifiée.

On sait comment on ramène la construction de la longueur x, définie par cette égalité, à celle de la moyenne harmonique qui vient de nous occuper.

Sur une ligne OP (dont la longueur est arbitraire) comme diamètre, on décrit un demi-cercle Δ, et on prend des cordes :

$$OA_1 = x_1, \quad OA_2 = x_2, \ OA_3 = x_3, \ \ldots.,$$

puis, l'on projette les points A_1, A_2, A_3, ... sur OP.

Soient a_1, a_2, a_3, ... ces projections ; on a :

$$x_1^2 = Oa_1 \,.\, OP, x_2^2 = Oa_2 \,.\, OP, \ldots;$$

Soit a le centre des moyennes harmoniques des points a_1, a_2, a_3, ..., on a

$$\frac{p}{Oa} = \frac{1}{Oa_1} + \frac{1}{Oa_2} + \frac{1}{Oa_3} + \ldots$$

Soit A le point qui est situé sur Δ et qui a pour projection a, on peut écrire :

$$\overline{OA}^2 = OP \,.\, Oa,$$

et, par suite,

$$\frac{p \,.\, OP}{\overline{OA}^2} = \frac{OP}{x_1^2} + \frac{OP}{x_2^2} + \ldots$$

ou

$$\frac{p}{\overline{OA}^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots$$

Mais on peut aussi, et c'est la remarque que nous voulions faire, construire directement, et beaucoup plus simplement, la moyenne harmonique de carrés en s'appuyant sur cette propriété bien connue : *l'inverse du carré de la hauteur d'un triangle rectangle est égale à la somme des carrés des inverses de côtés de l'angle droit.*

D'après cela, ayant pris sur le côté Ox de l'angle droit yOx, $OA_1 = x_1$, puis sur Oy :

$$OA_2 = x_2, \qquad OA_3 = x_3, \ \ldots;$$

la longueur ζ_1 de la perpendiculaire abaissée de O sur A_1A_2, vérifie l'égalité

$$\frac{1}{\zeta_1{}^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}.$$

En rabattant ζ_1 sur Ox et en joignant le point ainsi obtenu à A_3, ζ_2 désignant la distance de O à cette droite.

$$\frac{1}{\zeta_2^2} = \frac{1}{\zeta_1^2} + \frac{1}{x_3^2}.$$

et par suite

$$\frac{1}{\zeta_2^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2};$$

et ainsi de suite, on trouve ainsi, par une construction très rapide, une ligne ζ telle que l'on ait

$$\frac{1}{\zeta^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_p^2}.$$

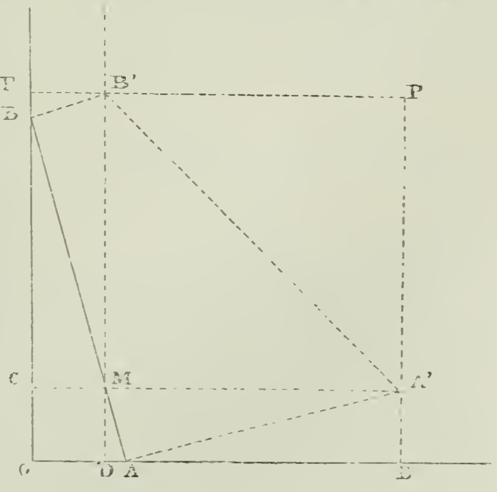
La ligne cherchée x s'obtient facilement quand on connaît ζ, puisque l'on a

$$\frac{x^2}{\zeta^2} = \frac{p}{1}.$$

NOTE SUR LE PROBLÈME DE PAPPUS

Par M. **J. Charrion**, élève de mathématiques au Lycée Saint-Louis (Classe de M. Ed. Lucas).

Tracer une droite de longueur donnée AB *passant par un point* M *de la bissectrice d'un angle droit* AOB.



J'appelle A′ et B′ les points de rencontre des parallèles à OA et OB menées par M avec les perpendiculaires en A et B à AB, C et D leurs intersections avec les côtés de l'angle droit.

Les deux trian-

gles MAA′, MBB′ sont égaux, puisqu'ils ont les côtés perpendiculaires et que les distances des points A et B aux bases MA′ et AB′ sont égales.

Donc surface trapèze $AA'BB' = \frac{AA'+BB'}{2} \times AB = \frac{1}{2} AB^2$.

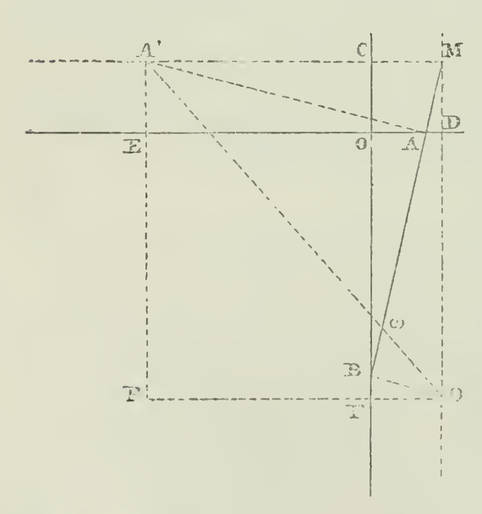
Menons par A′ et B′ les parallèles PE et PF aux côtés de l'angle droit :

$$DEMA' = 2MAA', MA'PB' = 2MA'B';$$

donc surface carrée $OEPF = 2AA'BB' + OCMD = AB^2 + OD^2$.

On sait donc construire ce carré, ce qui permet de déterminer les points A′ et B′ et par suite A et B qui sont respectivement sur les circonférences de diamètre MA′ et MB′.

Si la droite AB est dans l'angle formé par une des droites et le prolongement de l'autre, la solution est identique, à condition de désigner par AA′BB′ l'expression $\omega AA' - \omega BB'$, ω étant le point d'intersection des droites AB et A′B′ *(fig. 2)*.



Remarque. — Si on se propose de trouver une droite telle que MA + MB soit donné, le problème est celui du premier cas ou s'y ramène immédiatement.

En effet, si les points A et B se trouvent l'un sur l'un des côtés, l'autre sur le prolongement de l'autre *(fig. 3)*, en menant MA′B′ perpendiculaire à AB, on a $MA' = MB$, $MB' = MA$.

Si MA — MB est donné, le problème se ramène au deuxième cas traité.

SUR LE PROBLÈME DE PELL

Par M. **G. de Longchamps.**

1. — Le problème de *Pell* est celui qui se propose la résolution en nombres entiers de l'équation

$$x^2 - ay^2 = 1. \quad (a \text{ entier}) \qquad (1)$$

Ce problème célèbre a occupé un grand nombre de géomètres, et il ne sera peut-être pas sans intérêt d'indiquer ici quelques-unes des sources que l'on peut consulter sur cette intéressante et délicate question.

Voici comment *Gauss* (*) s'exprime à ce sujet :

« La résolution de l'équation (1) a déjà été traitée par les géomètres du siècle dernier. *Fermat* avait proposé ce problème aux analystes anglais, et *Wallis* (**) rapporte une solution qu'il attribue à *Brounker*. De son côté, *Ozanam* prétend qu'elle est de *Fermat*; enfin, *Euler* (***), qui s'en est occupé, dit que *Pellius* l'a trouvée le premier, ce qui a fait donner par quelques-uns à ce problème le nom de Pellien. »

C'est à *Lagrange* (****) qu'est due la première solution rigoureuse du problème de *Pell* : car, comme l'ont fait remarquer *Lagrange* et *Gauss*, la démonstration proposée par *Wallis* n'est pas exacte.

2. — Au problème de *Pell* on peut adjoindre celui qui a pour but la résolution en nombres entiers de l'équation

$$x^2 - ay^2 = -1. \quad (a \text{ entier}) \qquad (2)$$

Lagrange a fait remarquer que la résolution de cette équation pouvait se ramener à celle de l'équation de *Pell* et voici comment on peut établir ce fait remarquable.

(*) *Recherches arithmétiques*, par M. Ch. Fr. Gauss (de Brunswick), traduites par A. C. M. Poullet-Delisle. Paris, 1807 (p. 195).

(**) Wallis, *Algèbre*, chap. 98, t. II de ses œuvres, p. 418.

(***) L. Euler, *Introduction à l'algèbre*. Saint-Pétersbourg, 1770, 2 vol. in-8°.

(****) *Mélanges de la Société de Turin*, t. IV, p. 19. — *Histoire de l'Académie de Berlin*, 1767, p. 237. — *Suppléments à l'Algèbre d'Euler.* — *Éléments d'algèbre d'Euler*, 1774, t. II, p. 624.

Le nombre $x^2 + ay^2$ est entier; posons donc

$$x^2 + ay^2 = \alpha. \quad (\alpha \text{ entier}) \tag{3}$$

Les équations (2) et (3) donnent alors, par combinaison,

$$2x^2 = \alpha - 1,$$
$$2ay^2 = \alpha + 1$$

et, par suite,

$$4ax^2y^2 = \alpha^2 - 1.$$

Cette dernière relation écrite sous la forme

$$\alpha^2 - a(2xy)^2 = 1$$

est une équation de *Pell*, et en posant

$$2xy = \beta,$$

on voit que si l'on sait résoudre l'équation

$$\alpha^2 - a\beta^2 = 1,$$

on obtiendra les inconnues x et y au moyen des relations :

$$x^2 - ay^2 = -1,$$
$$x^2 + ay^2 = \alpha,$$
$$2xy = \beta,$$

qui sont compatibles si α et β représentent, comme nous le supposons, une solution de l'équation de *Pell*. Dans le cas où les équations précédentes admettent une solution entière, la résolution de l'équation (2) se trouve effectuée; sinon on peut affirmer qu'il n'existe aucune solution entière du problème proposé.

3. — Nous nous occuperons seulement, dans cette petite note, du cas où l'on suppose $a = 2$, cas particulier qui se rencontre dans plusieurs questions, et nous montrerons que les équations :

$$x^2 - 2y^2 = 1, \tag{A}$$
$$x^2 - 2y^2 = -1; \tag{B}$$

admettent une infinité de solutions entières.

La première partie a déjà été démontrée (*), et nous nous occuperons seulement de l'équation (B) que nous allons résoudre directement, sans la rattacher à l'équation de *Pell*.

A cet effet, considérons l'identité

$$2(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - 2ab - b^2)^2 + (a^2 + 2ab - b^2)^2 \tag{C}$$

(*) Voyez : J. 1882, p. 193; et J. 1883, p. 145.

et disposons des indéterminées a et b de façon que l'on ait

$$a^2 - 2ab - b^2 = 1.$$

On tire de là

$$a = b \pm \sqrt{2b^2 - 1}.$$

Posons maintenant

$$2b^2 - 1 = u^2.$$

On peut trouver pour b et pour u des valeurs entières vérifiant cette relation, si l'on sait déterminer une solution entière de l'équation (B). Soit x' y' cette solution, on a donc

$$u = x', \quad b = y'$$

et, par suite,

$$a = y' \pm x'.$$

D'ailleurs, pour les valeurs de a et de b, l'égalité (C) devient

$$2(a^2 + b^2)^2 = 1 + (a^2 + 2ab - b^2)^2$$

et l'équation (B) admet une solution nouvelle :

$$x = a^2 + b^2, \qquad y = a^2 + 2ab - b^2.$$

Généralement, cette solution est double, puisque a admet deux valeurs.

Ainsi, la connaissance d'une seule solution entière de l'équation (B) entraîne celle d'une infinité d'autres solutions qui se déduisent successivement les unes des autres, par une sorte de calcul récurrent.

Or l'équation (B) admet la solution évidente

$$y_0 = 1, \qquad x_0 = 1,$$

on déduit de celle-ci les suivantes :

$$y_1 = 5, \qquad x_1 = 7,$$
$$y_2 = 169, \qquad x_2 = 239,$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

4. — Cette solution (x_2, y_2), si l'on remarque que $169 = 13^2$, appelle l'attention sur l'équation biquadratique

$$x^2 + 1 = 2y^4, \qquad \text{(D)}$$

qui, outre la solution évidente $x' = 1$, $y' = 1$, admet aussi, d'après la remarque en question, la solution

$$x'' = 239, \qquad y'' = 13.$$

Du reste, l'équation (2) se rattache aussi à l'équation de *Pell*, de la manière suivante.

Posons, par une transformation naturelle,

$$x = y^2 + X;$$

nous avons entre les inconnues y et X la relation

$$y^4 - 2y^2X - X^2 - 1 = 0.$$

On en tire

$$y^2 = X \pm \sqrt{2X^2 + 1}.$$

En posant alors

$$2X^2 + 1 = U^2,$$

on a à résoudre une équation de *Pell*; et les inconnues x, y sont données par les formules :

$$x = 2X + U,$$
$$y^2 = X + U.$$

5. — La transformation que nous venons d'indiquer est bien propre à mettre en lumière cette sorte de dualité qui lie les équations (A) et (B), et en vertu de laquelle la résolution de l'une peut se faire quand on connaît une solution de l'autre.

Considérons, en effet, l'équation (B) et posons

$$x = y + X.$$

Nous avons alors, entre y et X, la relation

$$y^2 - 2Xy - X^2 - 1 = 0;$$

d'où,

$$y = X \pm \sqrt{2X^2 + 1}.$$

Ainsi, connaissant une solution de l'équation

$$2X^2 + 1 = t^2,$$

on aura immédiatement une solution de l'équation (B); on peut même dire que l'on aura deux solutions, parce que y a deux valeurs, l'une positive, l'autre négative; et parce que l'on peut prendre cette dernière, en changeant son signe.

6. — En terminant cette note qui, comme celles que nous avons rappelées plus haut et que nous avons publiées dans ce journal, a surtout pour but d'appeler l'attention et l'intérêt de quelques-uns de ses lecteurs sur *l'application élémentaire des identités à l'analyse indéterminée*, nous compléterons les renseignements que nous avons donnés sur le problème de *Pell*.

Cette intéressante question a fait récemment l'objet d'un

travail de M. *Brocard* (*), qui a terminé sa note par quelques indications bibliographiques que nous demandons la permission de reproduire ici, parce qu'elles pourront être utiles à ceux qui voudraient pénétrer plus avant dans cette question dont l'intérêt est loin d'être épuisé, même après ce qu'en a dit *Lagrange*.

Voici ces indications :

C. RICHAUD. *Sur l'équation* $X^2 - NY^2 = -1$. (*Journal de Mathématiques* de Liouville, t. IX 1864 ; t. X et t. XI).

S. GUNTHER. *Résolution de l'équation indéterminée* $y^2 - ax^2 = bz$, *en nombres entiers*. (*Ibid.* 1876.)

S. GUNTHER. *Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historischen Forschung*. 1876. Erlangen.

Ce dernier travail, comme l'indique son titre, est surtout historique. M. *S. Günther* reporte aux Hindous l'honneur d'avoir poussé plus loin que *Diophante*, l'étude de l'analyse indéterminée et notamment d'avoir résolu l'équation

$$x^2 - ay^2 = 1,$$

par une méthode qui, d'après *Hankel*, n'est autre chose que celle que *Lagrange* a exposée en 1769 et à laquelle nous avons fait allusion plus haut.

DESBOVES. *Mémoire sur la résolution en nombres entiers de l'équation*

$$aX^m + bY^m = cZ^n.$$

(*Nouvelles Annales* 1879; p. 265).

REALIS. *Sur quelques questions se rattachant au problème de Pell.* (*Nouvelle Correspondance mathématique*, 1880, p. 306.)

(*) *Nouvelle correspondance mathématique,* 1878, p. 161, 193, 228, 337

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir 1883, p. 265.)

XVI

Dans le triangle ABC *on a pris le point* C′ *sur* AB *et* B′ *sur* AC, *tels que l'angle* C′CB *soit égal à* $\frac{C}{m}$ *et que l'angle* B′BC *soit égal à* $\frac{B}{m}$. *Démontrer que si* CC′ = BB′, *le triangle* ABC *est isoscèle.*

Je suppose m positif et plus grand que l'unité; B′ et C′ sont alors respectivement entre A et C et entre A et B.

Supposons que B ne soit pas égal à C, et soit alors B > C, on a

$$\text{angle BB'A} = \left(C + \frac{B}{m}\right) = \left(B + C - \frac{m-1}{m}B\right)$$

$$\text{angle CC'A} = \left(B + \frac{C}{m}\right) = \left(B + C - \frac{m-1}{m}C\right)$$

d'où, puisque B > C,

$$\text{angle BB'A} < \text{angle CC'A}$$

et par suite

$$\text{angle CB'B} > \text{angle BC'C}.$$

Sur BC je décris un segment capable de CB′B, il coupe CC′ en un point C_1 qui est situé entre C et C′, puisque l'angle BC′C étant plus petit que CB′B, le point C′ se trouve à l'extérieur de ce segment capable.

Mais B > C donne

$$\frac{B}{m} > \frac{C}{m} \text{ ou } B'BC > C_1CB,$$

par suite

$$\text{arc } CB' > \text{arc } BC_1$$

ou en ajoutant l'arc $B'C_1$

$$\text{arc } CB'C_1 > \text{arc } BC_1B',$$

et comme il s'agit d'arcs plus petits qu'une demi-circonférence

$$\text{corde } CC_1 > \text{corde } BB'$$

et à fortiori

$$CC' > BB',$$

ce qui est contre l'hypothèse.

B ne peut donc être plus grand que C ; on démontrerait de même qu'il ne peut être plus petit; donc on a $B = C$ et le triangle ABC est isoscèle.

Une démonstration analogue s'applique au cas où m est négatif, mais plus grand que 1 en valeur absolue.

Dans le cas où la valeur absolue de m est plus petite que l'unité, que m soit positif ou négatif, le théorème n'est plus exact.

La démonstration géométrique qui précède m'a été donnée par M. Moret-Blanc; j'avais posé la question dans les *Nouvelles Annales;* M. Goffart en a publié dans le numéro de novembre 1883 une solution par la trigonométrie.

XVII

Soit un triangle ABC.

Sur CB	*prolongé et dans le sens*	CB	*on a pris*	A'	*tel que*	$BA' = m.CB$
Sur AC	—	AC	—	B'	—	$CB' = p.AC$
Sur BA	—	BA	—	C'	—	$AC' = q.BA$

On connaît les trois points A', B', C', *et les rapports* m, p, q. *Trouver* ABC.

Soit

$$l_a = B'C',\ l_b = A'C',\ l_c = A'B' ;$$

les trois triangles B'AC', A'BC', A'CB' donnent

$$l_a^2 = q^2c^2 + (p+1)^2b^2 + 2q(p+1)bc \cos A$$
$$l_b^2 = (q+1)^2c^2 + m^2c^2 + 2m(q+1)ac \cos B$$
$$l_c^2 = (m+1)^2a^2 + p^2b^2 + 2p(m+1)ab \cos C$$

ou en remplaçant cos A, cos B, cos C par leurs valeurs en fonction de a, b, c, on a

$$-a^2q(p+1) + b^2(p+1)(p+q+1) + c^2q(p+q+1) = l_a^2$$
$$a^2m(m+q+1) - b^2m(q+1) + c^2(q+1)(m+q+1) = l_b^2$$
$$a^2(m+1)(p+m+1) + b^2p(p+m+1) - c^2p(m+1) = l_c^2$$

On tire de là :

$$a^2 = \frac{\begin{vmatrix} l_a^2, & (p+1)(p+q+1), & q(p+q+1) \\ l_b^2, & -m(q+1), & (q+1)(m+q+1) \\ l_c^2, & p(p+m+1), & -p(m+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -q(p+1), & (p+1)(p+q+1), & q(p+q+1) \\ m(m+q+1), & -m(q+1), & (q+1)(m+q+1) \\ (m+1)(p+m+1), & p(p+m 1), & -p(m+1) \end{vmatrix}}$$

etc.

Les élèves, en donnant à m, p, q des valeurs particulières, peuvent s'exercer à déduire de ces formules des théorèmes particuliers.

Ainsi, si $m = p = q$, les triangles ABC, A'B'C' ont même centre de gravité. Si $m = p = q = 1$, on a

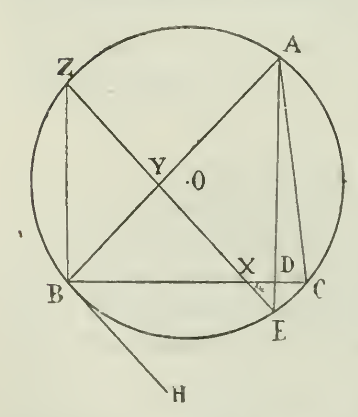
$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{7}(l_a^2 + l_b^2 + l_c^2).$$

(A suivre.)

QUESTION 96

Solution par M. Aubry, élève au Lycée de Douai.

On considère un triangle ABC *inscrit dans un cercle; la hauteur* CD *menée sur* AB *rencontre le cercle au point* E. *On demande de mener par le point* E *une corde* EZ, *rencontrant* AB *en* X, BC *en* Y *et la circonférence en* Z *de façon que* XY = YZ. (R.)



Prenons pour inconnue l'angle EXC $= \alpha$.

Si nous tirons BZ et que par le point B nous menions la parallèle BH à ZE, le faisceau (B. HYXZ) sera harmonique.

Mais on sait que le rapport anharmonique de ce faisceau est exprimé par

$$\frac{\sin \text{DBH}}{\sin \text{DBA}} : \frac{\sin \text{ZBH}}{\sin \text{ZBA}}$$

Nous aurons donc, en faisant abstraction du signe

$$\frac{\sin DBH}{\sin DBA} \times \frac{\sin ZBA}{\sin ZBH} = 1$$

ou, puisque DBH $= \alpha$, DBA $=$ B,

$$ZBA = ZEA = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad ZBH = \frac{\pi}{2} + B$$

$$\frac{\sin \alpha . \cos \alpha}{\sin B \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right)} = 1$$

c'est-à-dire $\sin 2\alpha = \sin 2B$.

On en déduit, en ne prenant que les valeurs inférieures à π,

$$\alpha = B \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - B.$$

Il y a donc deux solutions que l'on construira facilement; pour $\alpha = \frac{\pi}{2} - B$, EX est perpendiculaire à BA ; si $\alpha = B$, l'angle AEY est égal à l'angle EAB; par suite, le point Y se trouve sur la perpendiculaire à AE menée par le centre O de la circonférence.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Naura, à Vitry-le-François; Porée, à Bernay; Caitucoli, à Draguignan; Youssoufian, à Constantinople. Toutes ces solutions présentent le défaut de n'avoir donné que la première solution, celle qui correspond à $\alpha = \frac{\pi}{2} - B$.

QUESTIONS PROPOSÉES

126. — Étant donnés deux cercles tangents entre eux au point A, on mène de ce point une transversale qui coupe le premier cercle au point B, le second au point B′. On joint le point B du premier cercle au centre O′ du second et le point B′ du second cercle au centre O du premier. Les deux droites BO′, B′O se rencontrent en un point M dont on demande le lieu lorsque la transversale ABB′ prend toutes les positions possibles autour du point A. — Discussion. — Signa-

ler les propriétés du triangle BB'M. — Étant donné l'angle Θ que fait la transversale ABB' avec la ligne des centres dans une de ses positions, ainsi que les rayons R et R' des deux cercles, trouver les trois côtés du triangle BB'M en fonction de ces données. *(Aix, Conc. acad. 1867.)*

127. — On considère un trapèze ABCD, dans lequel les diagonales AC, BD, se coupent orthogonalement au point P. Soit pris le point P', symétrique de P par rapport à la parallèle équidistante des bases. Démontrer que les cercles P'AB, P'CD sont tangents. *(G. L.)*

128. — Si l'équation $x^2 - px + q = 0$ admet deux racines entières et positives :

1° L'expression

$$\frac{q(q+p+1)(4q+2p+1)}{36}$$

représente un nombre entier décomposable en une somme de q carrés;

2° L'expression

$$\frac{q^2(q+p+1)^2}{16}$$

représente un nombre entier décomposable en une somme de q cubes;

3° Le nombre $q^2(4q+2p+1)$ est décomposable en une somme algébrique de $4q$ carrés. *(Laisant.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 378-4.

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par M. **Emile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 20.)

XVIII

Soit un triangle ABC :

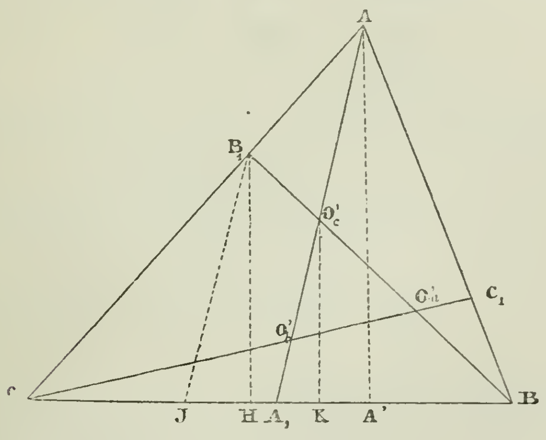
Je divise

BC *en* A_1, A_2, A_3 *de façon que* $\frac{CA_1}{CB} = m, \frac{CA_2}{CB} = n, \frac{CA_3}{CB} = p$

CA *en* B_1, B_2, B_3 — $\frac{AB_1}{AC} = n, \frac{AB_2}{AC} = p, \frac{AB_3}{AC} = m$

AB *en* C_1, C_2, C_3, — $\frac{BC_1}{AB} = p, \frac{BC_2}{AB} = m, \frac{BC_3}{AB} = n$

Démontrer que le triangle $O'_aO'_bO'_c$ *formé par les lignes* AA_1 BB_1, CC_1 *est équivalent au triangle formé par les lignes* AA_2 BB_2, CC_2, *et au triangle formé par les lignes* AA_3, BB_3, CC_3.



Si l'on remarque que, à cause de la symétrie de la figure, le théorème est évident pour le triangle équilatéral, on a une démonstration immédiate de la question en regardant le triangle donné comme la projection d'un certain triangle

équilatéral de l'espace; nous allons en donner une démonstration directe, en ne considérant que des lignes du plan.

Soit O'_a l'intersection de BB_1 et de CC_1
— O'_b — CC_1 — AA_1
— O'_c — AA_1 — BB_1;

Soit S la surface de ABC, S' la surface de $O'_aO'_bO_c$ et a, b, c les trois côtés du triangle;

On a évidemment

$$O'_cBA_1 + O'_cAB_1 + O'_bCA_1 + O'_bAC_1 + O'_aBC_1 + O'_aCB_1 = S + 2S'.$$

Soient A', K, H les projections de A, O'_c, B_1, sur CB;

Soit J le point où la parallèle à AA_1 menée par B_1 coupe CB, et soit $AA' = h_a$

On a

$$O'_cBA_1 = \frac{1}{2} A_1B \,.\, O'_cK.$$

$$A_1B = a(1 - m)$$

$$\frac{O'_cK}{B_1H} = \frac{A_1B}{JB};$$

mais

$$\frac{B_1H}{AA'} = \frac{B_1C}{AC} = \frac{1 - n}{1}.$$

donc

$$B_1H = h_a(1 - n)$$

et par suite

$$O'_cK = \frac{ah_a(1 - n)(1 - n)}{JB}$$

$$JB = JA_1 + A_1B;$$

mais

$$\frac{A_1}{AB_1} = \frac{CA_1}{CA}:$$

donc

$$JA_1 = mna$$

et

$$JB = mna + a(1 - m)$$

d'où

$$O'_cK = \frac{h_a(1 - n)(1 - m)}{mn + 1 - m}.$$

et enfin

$$O'_cBA_1 = \frac{1}{2}\,\frac{ah_a(1-n)(1-m)^2}{1-m+mn}$$

ou

$$O'_cBA_1 = S\,\frac{(1-n)(1-m)^2}{1-m+mn}.$$

O'_cAB_1 s'obtiendra en changeant m en $1-n$ et n en $1-m$, ce qui donne

$$O'_cAB_1 = S\,\frac{n^2m}{1-m+mn};$$

d'où

$$O'_cBA_1 + O'_cAB = S\,\frac{mn^2+(1-n)(1-m)^2}{1-m+mn},$$

et par permutation tournante

$$O'_b\,CA_1 + O'_bAC_1 = S\,\frac{pm^2+(1-m)(1-p)^2}{1-p+pm},$$

et

$$O'_aBC_1 + O'_aCB = S\,\frac{np^2+(1-p)(1-n)^2}{1-n+np};$$

d'où enfin

$$S + 2S' = S\left[\frac{mn^2+(1-n)(1-m)^2}{1-m+mn} + \frac{pm^2+(1-m)(1-p)^2}{1-p+pm} + \frac{np^2+(1-p)(1-n)^2}{1-n+np}\right].$$

La fonction entre parenthèses reste la même en changeant respectivement m, n, p, en n, p, m; c'est-à-dire si au lieu de S' il s'agit du triangle S'' formé par AA_2, BB_2, CC_2, et aussi s'il s'agit du triangle S''' formé par AA_3, BB_3, CC_3 en changeant m, n, p respectivement en p, m, n.

Le théorème est donc démontré.

Remarque I. — Si les trois droites AA_1, BB_1, CC_1 se coupent au même point, il en est de même de AA_2, BB_2, CC_2 et de AA_3, BB_3, CC_3.

Remarque II. — Dans ce cas, S' est nul et la fonction entre parenthèses doit être égale à l'unité : donc la relation

$$mnp = (1-m)(1-n)(1-p)$$

entraîne

$$\frac{mn^2 + (1 - n)(1 - m)^2}{1 - m + mn} + \frac{pm^2 + (1 - m)(1 - p)^2}{1 - p + pm} + \frac{np^2 + (1 - p)(1 - n)^2}{1 - n + np} = 1$$

et aussi

$$\frac{nm^2 + (1 - m)(1 - n)^2}{1 - n + mn} + \frac{mp^2 + (1 - p)(1 - m)^2}{1 - m + pm} + \frac{pn^2 + (1 - n)(1 - p)^2}{1 - p - pn} = 1.$$

Nous engageons les élèves à le démontrer directement.

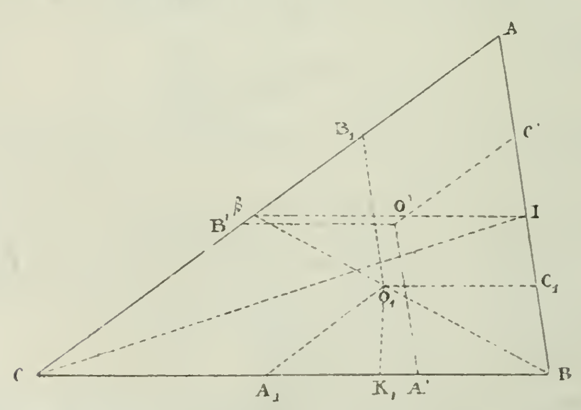
XIX

Par un point O_1 *pris dans le plan d'un triangle* ABC *on mène* $O_1A_1 = \xi_1$ *parallèle à* CA, A_1 *étant sur* BC

$O_1B_1 = \eta_1$ — AB, B_1 — CA

$O_1C_1 = \zeta_1$ — BC, C_1 — AB.

Construire le point pour lequel on a $\xi_1 = \eta_1 = \zeta_1$.



Si x_1, y_1, z_1 sont les distances de O_1 à BC, CA, AB, on a

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = 2S. \qquad (1)$$

Mais si K_1 est le pied de la perpendiculaire abaissée de O_1 sur BC, on a

$$O_1K_1 = O_1A_1 \sin C$$

ou

$$x_1 = \frac{\xi_1 c}{2R};$$

de même

$$y_1 = \frac{\eta_1 a}{2R},$$

$$z_1 = \frac{\zeta_1 b}{2R}.$$

R étant le rayon du cercle circonscrit à ABC, la relation (1) devient donc

$$ac\xi_1 + ab\eta_1 + cb\zeta_1 = 4SR = abc; \qquad (2)$$

l'hypothèse $\xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 = d$ donne donc

$$d = \frac{abc}{ac + ab + bc}$$

ou

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Si par un point O′ quelconque du plan on mène

$O'A' = \xi'$ parallèle à AB
$O'B' = \eta'$ — BC
$O'C' = \zeta'$ — CA

on verra de même qu'il existe entre ξ' η' ζ' la relation

$$ab\xi' + bc\eta' + ac\zeta' = abc, \qquad (3)$$

ce qui donne aussi un point particulier O′ pour lequel on a

$$\xi' = \eta' = \zeta' = \frac{abc}{ac + ab + bc} = d.$$

M. Jérabek a publié (*Mathesis*, t. Ier, p. 191) une intéressante étude sur les points pour lesquels on a

$$\xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 \text{ ou } \xi' = \eta' = \zeta'.$$

La construction géométrique que nous allons indiquer est de la plus grande simplicité.

Joignons BO_1 qui coupe CA en β'; par β' menons une parallèle à CB qui coupe AB en I.

Comme on a $O_1C_1 = O_1A_1$, on a $\beta'I = \beta'C$; le triangle $C\beta'I$ est donc isoscèle, et par suite CI est la bissectrice de l'angle ACB.

De là résulte la construction suivante :

Par le pied sur AB *de la bissectrice de* C, *on mène une paral-*

lèle à CB *qui coupe* AC *en un certain point qui, joint à* B, *donne une droite sur laquelle est le point* O_1.

Par le pied sur AC *de la bissectrice de* B *on mène une parallèle à* AB *qui coupe* BC *en un certain point qui joint à* A *donne une droite sur laquelle est le point* O_1.

On obtiendrait O′ par une construction analogue.

Les élèves peuvent s'exercer aux questions suivantes :

I. *Le lieu du point pour lequel*

$$\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1 = \text{constante}$$

est une droite.

II. *Le lieu du point pour lequel*

$$\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1 + \xi' + \eta' + \zeta' = \text{constante}$$

est une droite.

III. *Le lieu du point pour lequel on a*

$$\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1 = \xi' + \eta' + \zeta'$$

est une droite.

IV. *Le point dont les distances respectivement à* BC, AC, AB, *sont proportionnelles à* $\frac{c}{b}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{a}$ *est tel que*

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 \text{ est un minimum.}$$

Le point dont les distances à BC, AC, AB *sont respectivement proportionnelles à* $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{a}{b}$ *est tel que*

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 \text{ est un minimum,}$$

et l'on a dans ces cas les relations

$$b\xi_1 = c\eta_1 = a\zeta_1 \text{ et } c\xi' = a\eta' = b\zeta'.$$

La valeur commune des minima est

$$\frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}.$$

V. *Si l'on prend sur le côté* AB *un point* J_c *tel que* $\frac{J_cA}{J_cB} = \frac{c^2 + b^2}{c^2 + a^2}$ *et sur les autres côtés les points* J_a *et* J_b *analogues, on a trois droites qui concourent au point pour lequel*

$$\xi^2_1 + \eta^2_1 + \zeta^2_1 + \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 \text{ est un minimum.}$$

VI. *La droite qui joint un sommet à l'un des points* O_1 *ou* O′ *pour lesquels on a*

$$\xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 \quad ou \quad \xi' = \eta' = \zeta'$$

divise le côté opposé en deux segments qui sont proportionnels à deux des côtés du triangle. *(A suivre.)*

EXERCICES SUR LES INÉGALITÉS

(*Suite*, voir p. 3.)

6. — *La moyenne harmonique de* p *nombres est toujours plus petite que leur moyenne géométrique.*

On appelle moyenne harmonique de p nombres $a, b, c, \ldots k, l$, un nombre x satisfaisant à l'égalité suivante:

$$\frac{p}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \ldots + \frac{1}{k} + \frac{1}{l};$$

on en tire

$$x = \frac{p}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \ldots + \frac{1}{k} + \frac{1}{l}}.$$

L'inégalité à démontrer est une conséquence de la précédente; en effet, d'après l'énoncé, on doit avoir

$$\sqrt[p]{abc \ldots kl} > \frac{p}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{k} + \frac{1}{l}};$$

or, d'après la proposition précédente, on a

$$\sqrt[p]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdots \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{l}} < \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \cdots + \frac{1}{k} + \frac{1}{l}}{p};$$

on en tire immédiatement la proposition énoncée.

7. — *Démontrer que l'on a,* a *étant différent de* b,

$$a^3 + b^3 > \frac{(a+b)^3}{4},$$

et plus généralement

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^k < \frac{a^k + b^k}{2},$$

*(*k *étant un nombre entier positif).*

Étendre ce théorème à des quantités positives a, b, c, ... k, l, *en nombre* p.

On a

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$(a + b)^3 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2).$$

L'inégalité (1) revient à celle-ci :

$$3(a + b)(a - b)^2 > 0,$$

qui est évidente.

Pour la seconde posons

$$a = x + \alpha,$$
$$b = x - \alpha;$$

il est évident que, quelle que soit la loi du développement de la m^e puissance d'un binôme, si l'on a, m, n, p étant des entiers positifs,

$$(x + \alpha)^k = x^k + mx^{k-1}\alpha + nx^{k-2}\alpha^2 + px^{k-3}\alpha^3 + qx^{k-4}\alpha^4 + \dots$$

on aura aussi

$$(x - \alpha)^k = x^k - mx^{k-1}\alpha + nx^{k-2}\alpha^2 - px^{k-3}\alpha^3 + qx^{k-4}\alpha^4 - \dots$$

Donc

$$\frac{a^k + b^k}{2} = x^k + nx^{k-2}\alpha^2 + qx^{k-4}\alpha^4 + \dots$$

et l'inégalité proposée se transforme dans la suivante :

$$x^k < x^k + nx^{k-2}\alpha^2 + qx^{k-4}\alpha^4 + \dots$$

qui est évidente.

Cela posé, considérons quatre quantités a, b, c, d; nous avons

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^k = \left(\frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2}\right)^k$$

et par conséquent

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^k < \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^k + \left(\frac{c+d}{2}\right)^k}{2};$$

mais nous avons vu que l'on a

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^k < \frac{a^k + b^k}{2};$$
$$\left(\frac{c+d}{2}\right)^k < \frac{c^k + d^k}{2}.$$

Donc

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^k < \frac{a^k+b^k+c^k+d^k}{4}.$$

On prouverait de même que la proposition est vraie pour 8, 16, ... 2^n quantités positives.

Je dis que, si elle est vraie pour $p+1$ nombres, elle est vraie pour p. On a, en effet, identiquement

$$\frac{a+b+c+\ldots+h}{p} = \frac{\frac{p+1}{p}(a+b+c+\ldots+h)}{p+1}$$
$$= \frac{a+b+c+\ldots+h+\frac{a+b+\ldots+h}{p}}{p+1}.$$

On a donc

$$\left(\frac{a+b+c+\ldots+h}{p}\right)^k$$
$$= \left(\frac{a+b+c+\ldots+h+\frac{a+b+c+\ldots+h}{p}}{p+1}\right)^k$$

On en tire, d'après l'hypothèse que la proposition s'applique à $(p+1)$ quantités,

$$\left(\frac{a+b+c\ldots+h}{p}\right)^k < \frac{a^k+b^k+c^k+\ldots+h^k+\left(\frac{a+b+c+\ldots+h}{p}\right)^k}{p}$$

et par suite

$$\left(\frac{a+b+\ldots+h}{p}\right)^k < \frac{a^k+b^k+c^k+\ldots+h^k}{p}.$$

8. — *Soient* p *nombres en progression arithmétique,* a, b, ... k, l; *démontrer que l'on a*

$$\sqrt[p]{\mathrm{ab}\ldots\mathrm{kl}} < \frac{\mathrm{a}+\mathrm{l}}{2}, \text{ et } \sqrt[p]{\mathrm{b}\ldots\mathrm{l}} > \sqrt[p]{\mathrm{al}}.$$

Pour la première partie, on a, d'après le théorème de Cauchy,

$$\sqrt[p]{ab\ldots kl} < \frac{a+b+\ldots+l}{p}.$$

Mais on sait aussi que l'on a, dans une progression arith-

métique

$$a + b + c + \ldots + = \frac{p}{2}(a + l).$$

On en déduit bien la proposition indiquée.

En second lieu, on sait que, lorsque la somme de deux nombres est constante, le produit de ces deux nombres est d'autant plus grand que la différence entre ces nombres est moindre; il en résulte que, dans une progression arithmétique, le produit de deux termes également distants des extrêmes est supérieur au produit des extrêmes; on a donc

$$\begin{aligned} al &= la \\ bk &> la \\ ch &> la \\ &\cdots \\ &\cdots \\ hc &> la \\ kb &> la \\ la &= la. \end{aligned}$$

Donc, en multipliant ces inégalités et égalités membre à membre, il vient

$$(abc \ldots kl)^2 > (al)^p;$$

et, en extrayant la racine carrée $2p$:

$$\sqrt[p]{abc \ldots kl} < \sqrt{al}.$$

Comme application, on a, en prenant les p premiers nombres entiers

$$\sqrt{p} < \sqrt[p]{1 \cdot 2 \ldots p} < \frac{p+1}{2}.$$

(Cette double inégalité est proposée dans l'Algèbre de Todhunter.)

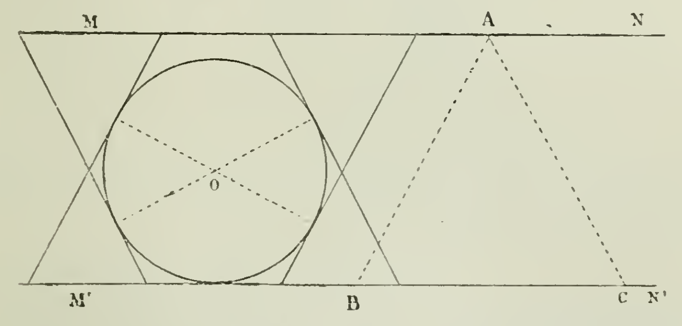
QUESTION 104

Solution par M. Ch. Laisant, élève à l'École Monge.

On donne un cercle compris entre deux droites parallèles ; on demande de mener à ce cercle une tangente telle que la partie de cette tangente comprise entre les deux parallèles ait une longueur donnée.

Soit une circonférence O comprise entre les parallèles MN, M'N'.

On prend un point quelconque A sur la ligne MN, et avec un rayon égal à la longueur donnée on décrit un arc de cercle qui coupe M'N' aux deux points B et C.



On tire les lignes AB, AC, et on leur mène à chacune deux parallèles tangentes au cercle O.

On voit que si la longueur donnée est plus petite que la distance des parallèles, le problème est insoluble.

Si la longueur donnée est égale à la distance des parallèles, le problème n'a que deux solutions.

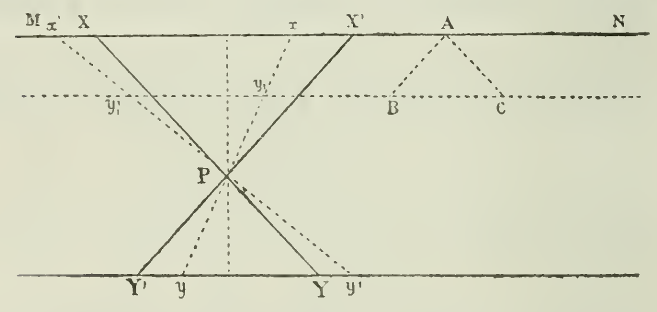
Si enfin la longueur donnée est plus grande que la distance des parallèles, le problème a quatre solutions.

QUESTION 105

Solution par M. Ch. Laisant, élève à l'École Monge.

On donne deux parallèles MN, M'N' *et un point* P *entre ces deux parallèles ; mener par le point* P *une droite rencontrant* MN *en* x, M'N' *en* y, *de telle façon que* Px — Py *ait une longueur donnée* C.

Par le point P je mène deux lignes quelconques xy, $x'y'$;



on reporte Py sur Px et Py' sur Px', de sorte que l'on aperçoive clairement que

$$xy_1 = Px - Py,$$
$$xy'_1 = Px' - Py'.$$

Il n'est pas difficile de démontrer que le lieu géométrique des points tels que $y_1y'_1$ est une parallèle à MN et à M'N'.

Cela posé, le problème est ramené à inscrire une droite d'une longueur donnée entre deux parallèles et passant par le point P.

En effet, soit mn la nouvelle parallèle obtenue. D'un point quelconque A pris sur MN avec un rayon égal à c, la différence donnée, on décrit un arc de cercle qui coupe mn en deux points B, C.

On tire les lignes AB, AC, auxquelles on mène des parallèles par le point P, et l'on a les lignes demandées.

On voit que si la longueur donnée c est égale à la distance

de MN à mn, il n'y a qu'une solution, et que si elle est plus grande, il y en a deux.

NOTE. — Ces questions, un peu trop simples, peuvent être facilement généralisées.

Soient Δ et Δ' les deux parallèles, et P un point fixe donné. On peut proposer de mener par P une transversale qui rencontre Δ et Δ' aux points A et A' et de telle façon qu'il existe entre PA et PA' une relation de la forme

$$m\mathrm{PA} + n\mathrm{PA}' = l,$$

l étant une ligne donnée, m et n désignant des nombres donnés positifs ou négatifs.

En appelant h et h' les distances du point P aux droites Δ, Δ', on a

$$\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PA}'} = \frac{h}{h'},$$

et par suite

$$\frac{m\mathrm{PA}}{n\mathrm{PA}'} = \frac{mh}{nh'},$$

ou finalement

$$\mathrm{PA} = l \,.\, \frac{h}{mh + nh'}$$

et

$$\mathrm{PA}' = l \,.\, \frac{h'}{mh' + nh'}.$$

Le problème se résout par la construction d'une quatrième proportionnelle.

On peut ensuite proposer de mener la transversale de façon que l'on ait

$$m\mathrm{PA}^2 + n\mathrm{PA}'^2 = l^2, \text{ etc.}$$

Toutes ces questions sont bien connues; leur solution et leur discussion n'offrent aucune difficulté.

(G. L.)

NOTA.— Les questions 104 et 105 ont été aussi résolues par MM. Chapron, à Versailles; Caronnet, collège Chaptal; de Kerdrel, à Kéruzoret; Blessel, à Paris; Berthelot, à Orléans; Besson, à Nantes.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Besançon.

On donne une droite AB, de longueur $2a$. Trouver le rayon x d'un cercle passant par les deux points A et B, de telle façon que le quadrilatère ABCD, qui a ses sommets aux extrémités de la corde AB et du diamètre CD perpendiculaire à AB, ait un périmètre donné $4p$. Quelle serait la valeur de x si, au lieu du périmètre, on supposait donnée la différence entre la somme des deux côtés DB, DA et la somme des deux côtés CB et CA ?

— Un verre à pied, de forme conique, dont le diamètre est 0^m25, au bord supérieur, contient exactement 1 litre à 4° centigrades ; il est complètement rempli par des poids égaux d'eau et de mercure. On demande quelle doit être l'épaisseur de la couche d'eau, sachant que la densité du mercure est 13,596 à 4° centigrades.

Bordeaux.

Session de novembre (série unique).

Calculer la longueur y d'une droite, connaissant la différence d des deux segments de cette droite divisée en moyenne et extrême raison.

— Étant donnée l'expression

$$m \cos \theta + n \cos (\theta + \alpha)$$

dans laquelle m, n, θ et α sont des quantités connues, la transformer en celle-ci :

$$x \cos (\theta + \varphi)$$

et déterminer les valeurs de x et de φ.

— Une masse d'eau de 548 kilog. à 35° est mélangée avec 210 kilog. de glace à zéro. Dire si toute la glace sera fondue, et, dans le cas de l'affirmative, calculer la température à laquelle se trouvera le mélange. Indiquer le sens des variations de volume qu'éprouveraient d'une part l'eau à 35°, et de l'autre part la glace après sa fusion.

— Expériences à l'aide desquelles on établit la composition de l'air.

Marseille.

Résoudre et construire un triangle connaissant le périmètre, la hauteur et le rapport des segments que cette hauteur détermine sur le côté opposé.

VARIÉTÉS

NOTE SUR LA TABLE DE LOGARITHMES

A SIX DÉCIMALES
CONSTRUITE SUR UN PLAN NOUVEAU

Par M. **Adolphe Benoist,**

Docteur en droit, membre de la Société mathématique de France.

(Paris, librairie de M. Delagrave.)

Les tables de Callet, de Dupuis, de Schrön, de Bremiker, etc., dont on se sert depuis longtemps en France et à l'étranger, donnent les logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques avec 7 décimales. Y a-t-il une raison majeure qui force à évaluer les logarithmes avec une si grande approximation? Faut-il regretter que les calculateurs de tables n'aient pas eu le courage d'aller jusqu'à 8, 9... décimales? Faut-il regretter avec Terquem que l'on n'ait pas imprimé les tables manuscrites de Borda à 10 décimales, déposées à l'Observatoire? Une table à 6 décimales n'est-elle pas suffisante pour tous les calculs? Une table à 5 ou même à 4 décimales, beaucoup plus portative et plus maniable, ne convient-elle pas à la résolution de la plupart des problèmes? On peut répondre facilement à toutes ces questions, et nous saisissons de nouveau l'occasion qui nous est offerte de répéter encore aux lecteurs du journal ce que nous avons dit dans le premier volume sur les applications numériques.

Commençons par rappeler le principe suivant:

Un logarithme n'a pas plus de chiffres exacts qu'il n'y en a dans le nombre, et réciproquement.

Ce principe est évident : le logarithme d'un nombre dépend de ce nombre et s'en déduit au moyen de calculs particuliers ; or, les résultats d'un calcul ne peuvent pas être plus approchés que les données. On peut s'assurer d'ailleurs de la justesse de notre conclusion à l'aide des tables mêmes. Soit à trouver le logarithme de $\pi = 3,1415926535...$ à l'aide des tables à 7 décimales; nous ferons le calcul suivant :

$$\begin{array}{lr} \log 3,1415\ \ldots\ldots = & 0,497.1371 \\ 9\ \ldots\ldots & 124,2 \\ 2\ \ldots\ldots & 2,76 \\ 6\ \ldots\ldots & 0,828 \\ \hline \log 3,1415926\ \ldots = & 0,497.1499 \end{array}$$

On voit qu'en regardant comme *exacte* la proportion d'interpolation, les chiffres 9 et 2 donnent seuls une correction sur les 7 chiffres décimaux du logarithme; la correction venant du chiffre suivant 6 porterait sur le 8ᵉ, le 9ᵉ ... chiffre du logarithme. Donc, 7 chiffres de π font connaître les 7 chiffres décimaux de son logarithme ; en prenant π avec une plus grande approximation, le logarithme ne serait pas différent. Réciproquement le logarithme 0,497.1499 fera connaître π avec 7 figures, comme on peut s'en assurer par le calcul suivant :

$$\log \pi = 0,497.1499$$

$$\pi = 3,1415927\ \ldots\ldots \qquad \begin{array}{r} 1499 \\ 1371 \\ \hline 128 \\ 124,2 \\ \hline 3,8 \\ 2,76 \\ \hline 1,04 \end{array}$$

On voit que les deux premiers chiffres 9, 2 tirés du calcul interpolatoire sont bons et que le 3ᵉ est déjà erroné. Donc la connaissance de 7 décimales dans le logarithme conduit à la connaissance de 7 chiffres dans le nombre.

On peut remarquer ici que le calcul interpolatoire ne peut

pas donner plus de deux chiffres exacts pour la correction, d'abord parce qu'il n'est pas vrai de dire que la variation du logarithme est proportionnelle à celle du nombre, et ensuite parce que les différences logarithmiques ne sont connues qu'approximativement avec deux ou trois figures.

Ces principes posés, il est facile de dire quelle est la meilleure table de logarithmes, et de porter un jugement motivé sur l'œuvre de M. Benoist.

1° Dans la plupart des applications industrielles, les nombres donnés n'ont pas plus de 3 figures exactes. Si l'on opère sur de pareils nombres, il suffit d'une table à 3 décimales, qui tient sur une simple feuille de papier, ou mieux encore de la règle à calcul, qui n'est qu'une table graphique de logarithmes à 3 décimales. Il y aurait un grand avantage à exercer les élèves au maniement d'une pareille table; ils apercevraient ainsi que l'emploi des logarithmes abrège réellement les calculs et permet de résoudre des problèmes difficiles. Montrons la vérité de notre assertion par deux exemples.

Exemple 1. — *Les dimensions mesurées d'un champ rectangulaire sont* B $= 55^{m},4$, H $= 37^{m},8$; *trouver son aire avec autant d'approximation que possible.*

Calcul direct par la multiplication abrégée.		Calcul par logarithmes.	
B =	55,4	log B =	1,743
H =	8,73	log H =	1,577
	1662	log S =	3,320
	388	S =	2090 mq
	44		
S =	2094 mq		

Le nombre des chiffres certains ne dépasse pas 3; on les obtient par l'emploi des logarithmes à 3 décimales, avec rapidité.

Exemple 2. — *Au bout de combien de temps un capital placé à intérêts composés au taux de* 5 o/o *sera-t-il doublé?*

Il s'agit de résoudre l'équation $(1,05)^x = 2$. Voici le tableau des calculs :

$$x \log (1,05) = \log 2; \qquad x = \frac{0,301}{0,021} = 14^a\ 4^m.$$

2° Dans les expériences délicates de la physique, de la chimie, de la géodésie, de la mécanique, etc., on parvient à évaluer les grandeurs avec 4 ou 5 figures exactes. Dans les calculs où entreront de pareilles données on se servira de tables à 4 ou 5 décimales. La détermination des 5 premières figures d'une grandeur mesurée représente à peu près le maximum d'approximation qu'on puisse atteindre dans les applications ; on peut donc dire qu'une table à 5 décimales suffit pour la solution de tous les problèmes numériques qu'on peut rencontrer dans les recherches scientifiques. L'astronome Lalande ne s'est jamais servi d'autres tables dans ses calculs d'astronomie, et Le Verrier avait en 1852 proscrit avec raison toute table plus étendue dans les lycées et collèges de l'Empire.

Cette mesure était excellente. Les tables à 5 décimales sont d'un petit format ; on arrive rapidement à en connaître le mécanisme, et l'on peut voir quel est l'avantage de la substitution des opérations logarithmiques aux opérations ordinaires ; tandis que les élèves sont vite rebutés par la grosseur des tables à 7 décimales, la difficulté d'apprendre à s'en servir, et la longueur des calculs auxquels leur emploi conduit, sous prétexte d'abréger les opérations de l'arithmétique.

3° Grâce aux perfectionnements de la mécanique, les astronomes sont en possession d'instruments admirables qui leur permettent d'évaluer les distances angulaires à moins d'*une* seconde d'arc. On peut se faire une idée de cette précision en remarquant qu'une seconde est l'angle sous lequel on voit un mètre à la distance de 200 kilomètres. La mesure du temps est d'une précision encore plus grande. Arrivera-t-on à une précision supérieure? Pourra-t-on atteindre, dans la mesure des angles, 0,1 de seconde, c'est-à-dire l'angle sous lequel on verrait un mètre à la distance de 2000 kilomètres, ou 500 lieues? C'est douteux. Les défauts des instruments, les incertitudes des corrections, sont au moins de cet ordre.

Quoi qu'il en soit, on peut dire qu'en astronomie la mesure

des angles et du temps donne des nombres ayant jusqu'à 6 figures exactes : car un angle tel que 69°54′38″ est égal à 251678″. Il faut donc à un astronome des tables à 6 décimales, et ces tables présentent la limite extrême de l'approximation dont on peut avoir besoin. Il n'est pas un seul calcul d'astronomie qui exige l'emploi de tables plus étendues. Les tables à 7 décimales sont donc parfaitement inutiles; leur approximation dépasse les besoins des calculs les plus rigoureux.

Nous louons donc M. Benoist d'avoir entrepris le travail pénible qu'exige la publication d'un ouvrage important, qui manquait à la France, et qui répond aux besoins les plus exigeants des astronomes. L'auteur a d'ailleurs disposé ses tables de la manière la plus commode, et il me paraît bon de faire connaître les améliorations les plus saillantes qu'elles présentent par rapport aux tables connues.

En supprimant la 7e décimale des logarithmes, on réduit la différence tabulaire à 1 ou 2 chiffres. Les calculs d'interpolation se font donc à vue. M. Benoist a su disposer les petits tableaux de corrections de manière à rendre la recherche du nombre aussi simple que la recherche du logarithme.

Les tables des lignes trigonométriques sont à double entrée, comme celles des logarithmes des nombres. Il résulte de cette disposition d'abord une économie de place, et ensuite l'avantage d'avoir sur une même page tout ce qui se rapporte à une même ligne. Il n'y a plus pour le calculateur de confusion possible dans la recherche du logarithme d'une ligne trigonométrique.

Pour bien montrer que les tables de M. Benoist sont supérieures aux tables à 7 décimales habituellement employées, nous allons donner le calcul complet d'un triangle. On pourra comparer le tableau des opérations avec celui que nous avons donné dans le tome Ier du Journal, pour indiquer aux élèves la meilleure disposition à prendre, quand on fait usage des tables de Dupuis ou de Schrön. Les calculs auxiliaires, qui tenaient une place notable, se trouvent à peu près supprimés, quand on se sert des tables de M. Benoist.

Résolution d'un triangle.

Données (*).

$a = 25824,52$
$b = 15642,34$
$C = 84^\circ . 32' . 18'',4.$

Inconnues.

$A = 62 . 50 . 54$
$B = 32 . 36 . 48$
$c = 28891$

Calcul de φ.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$$

$\log b = 4,19\,4301$
$\log a = 4,41\,2032$
$\log \operatorname{tg} \varphi = \bar{1},78\,2269$
$\varphi = 31^\circ . 12' . 14''$
.... 2269
2249
20
$45^\circ = 44 . 59 . 60$
$45 - \varphi = 13 . 47 . 46$

Calcul de $\frac{1}{2}(A + B)$.

$$\frac{1}{2}(A + B) = 90 - \frac{1}{2} C$$

$90 = 89 . 59 . 60$
$\frac{1}{2} C = 42 . 16 . 9,2$
$\frac{1}{2}(A + B) = 47 . 43 . 50,8$

Calcul de c.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$\log a^2 = 8,82\,4064$
$\log b^2 = 8,38\,8602$
$\log 2 = 0,30\,1030$
$\log a = 4,41\,2032$
$\log b = 4,19\,4302$
$\log \cos C = \bar{2},97\,8524$
$\log 2ab \cos C = 7,88\,5887$
$a^2 = 666\,904\,000$
$b^2 = 244\,682\,000$
$-2ab \cos C = \overline{1}23\,107\,000$
$c^2 = 834\,693\,000$
$\log c^2 = 8,92\,1526$
$\log c = 4,46\,0763$
$c = 28891.$

(*) *Composition donnée en 1868 pour le concours de l'École polytechnique.* — Il est clair qu'au point de vue pratique ces données sont absurdes; sur une longueur de 25 kilomètres on ne peut pas compter sur un mètre et à fortiori sur un centimètre; les dixièmes de seconde n'existent pas dans les applications. Les examinateurs en proposant ce calcul n'ont eu qu'un but. ils ont voulu s'assurer que les élèves savent se servir des tables à 7 décimales. — On peut se demander néanmoins quel intérêt il peut y avoir à être habile manipulateur de ces tables pour de futurs ingénieurs ou de futurs officiers d'artillerie, qui auront à résoudre des problèmes pratiques où les données n'auront jamais plus de 3 à 4 chiffres certains.

Calcul de $\frac{1}{2}(A - B)$.

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B) = \operatorname{tg}(45-\varphi)\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)$$

$\log\operatorname{tg}(45-\varphi) = 1{,}39\ 0143$

. . . 0088

55

$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B) = 0{,}04\ 1460$

$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B) = \bar{1}{,}43\ 1603$

$\frac{1}{2}(A-B) = 15^\circ.7'.3''$

. . . 1603

1577

26

Calcul de A *et* B.

$\frac{1}{2}(A+B) = 47 . 43 . 50{,}8$

$\frac{1}{2}(A-B) = 15\quad 7\quad 3$

$A = 62^\circ.50'.54''$

$B = 32 . 36 . 48$

Vérification.

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

$\log a = 4{,}41\ 2032$

$\log\sin C = \bar{1}{,}99\ 8024$

$\log\operatorname{cosin} A = 0{,}05\ 0707$

... $\bar{1}{,}94.9293$

$\log c = 4{,}46\ 0763$

L'ensemble du tableau de calcul ci-dessus montre bien que la plupart des calculs auxiliaires sont supprimés par l'emploi des tables à 6 décimales de M. Benoist; c'est là un avantage important qui doit faire abandonner définitivement les tables à 7 décimales, dont l'approximation surabondante rend sans profit le maniement laborieux.

Il nous reste, en finissant, à faire quelques critiques de détail sur l'ouvrage que nous analysons.

1° Les chiffres sont maigres, et le caractère antique des tables de Bremiker me paraît préférable pour la lecture.

2° Les blancs sont séparés par cinq nombres serrés; je pense que la disposition de Bremiker qui les sépare par 3 nombres seulement vaut mieux pour la recherche rapide des logarithmes.

3° Il eût été à désirer que le volume des tables fût moindre. Je crois que cette condition n'était pas compatible avec la disposition adoptée par M. Benoist.

4° Nous ne pouvons que louer l'auteur et l'éditeur du soin apporté dans l'exécution typographique de l'ouvrage. Il est à souhaiter qu'il soit rapidement adopté par les calculateurs de profession, afin que sa parfaite exactitude soit contrôlée, ou que l'on corrige les quelques fautes qui ont pu se glisser dans la masse considérable des chiffres qu'il renferme, malgré toute l'attention apportée par l'auteur au moment de la correction des épreuves.

J. Bourget.

QUESTIONS PROPOSÉES

129. — Deux cercles égaux O′ et O″ sont tangents au même point à un cercle O. On mène la tangente commune AA′ aux deux cercles O et O′, et l'on décrit les deux cercles C et C′ tangents à la fois aux deux cercles O, O′, et à la tangente AA′. Puis, sur la ligne OO″ comme diamètre, on décrit une circonférence S. Si γ est le cercle tangent à la fois aux trois cercles O, O″ et S, le diamètre du cercle γ est moyen proportionnel entre les rayons des cercles C et C′.

(Perrin.)

130. — Le volume compris entre deux sphères tangentes extérieurement et le cône circonscrit à ces sphères est équivalent à la moitié du volume compris entre ce cône et la sphère passant par les deux cercles de contact du cône avec les deux sphères données. *(Perrin.)*

131. — Si l'on désigne par m la somme des trois quatrièmes proportionnelles $\frac{yz}{x}$, $\frac{zx}{y}$, $\frac{xy}{z}$, que l'on peut former avec les trois longueurs x, y, z, la relation

$$4R^3 - 4R^2m + Rm^2 - 2xyz = 0$$

sera vérifiée dans un triangle :

1° Si x, y, z représentent les distances du point de concours des hauteurs aux trois côtés, et R le *rayon* du cercle circonscrit;

2° Si x, y, z représentent les distances du centre du cercle inscrit aux sommets, et R le *diamètre* du cercle circonscrit.

La relation précédente se décompose en facteurs lorsque $y = z$. *(Em. Lemoine.)*

132. — Construire par la géométrie un triangle isoscèle connaissant, soit les distances de ses sommets au centre du cercle inscrit, soit les distances du point de concours des hauteurs aux côtés. *(Em. Lemoine.)*

133. — Etant donnés un triangle ABC et deux points A' et A_1, sur le côté BC, mener par ces deux points un cercle qui coupe AC en B' et B_1, AB en C' et C_1 de façon que AA', BB', CC' concourent en un même point. On voit facilement que AA_1, BB_1, CC_1 concourent aussi. *(Em. Lemoine.)*

134. — On considère un cercle Δ de centre O ; soit AB un diamètre de ce cercle, et OC le rayon perpendiculaire à AB. On prend

$$\mathrm{OF} = \mathrm{FC} = \mathrm{CH} = \frac{\mathrm{R}}{2};$$

par le point H on mène une droite Δ' parallèle à AB, et par le point C une droite Δ'', également parallèle à AB. Cela posé, par A, on trace une transversale mobile, qui rencontre Δ en M, et Δ'' en M'. En M, on mène la tangente à Δ, et cette droite rencontre en I la perpendiculaire abaissée de M' sur AB. Soit K le point où $M'I$ rencontre Δ'. Démontrer : 1° que le cercle δ décrit du point I comme centre avec IK pour rayon rencontre MI en un point dont le lieu géométrique est un cercle ; 2° que δ passe constamment par un point fixe, le point F. *(G. L.)*

135. — On considère un cercle de centre O, et un diamètre AB ; aux points A et B, on mène les tangentes Δ, Δ' ; soit M un point pris sur la circonférence donnée ; la tangente en ce point rencontre Δ et Δ' en P et P'. Soit M' le point diamétralement opposé à M. Les droites $M'P$, $M'P'$ rencontrent AB aux points Q, Q' ; ayant posé $OQ = x$, $OQ' = y$, on demande de démontrer que ces quantités variables

x et y vérifient la relation

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{R},$$

R étant le rayon de la circonférence donnée. En déduire, entre autres conséquences, que si l'on porte OQ′ de O en R sur le diamètre perpendiculaire à AB, la droite RQ passe par un point fixe. *(G. L.)*

136. — On donne un cercle Δ et une tangente Δ′. Soit O le centre du cercle; on mène par O une demi-droite qui rencontre Δ en A, et Δ′ en A′. Soit I le conjugué harmonique de O par rapport à AA″. Ayant projeté le point I sur Δ′, au point B, on mène BA. Démontrer que BA passe par un point fixe. *(G. L.)*

137. — On considère deux droites rectangulaires Ox et Oy, et une droite Δ parallèle à Ox. Par O, on mène une transversale mobile qui rencontre Δ en A ; de O comme centre, avec OA pour rayon, on décrit un cercle qui rencontre Ox en B; par B, on mène une parallèle à Oy, et cette parallèle rencontre Δ en M. Démontrer que si l'on projette M sur Oy en B, et O en I sur AB, le lieu du point I est une circonférence. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 2786-4.

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 25.)

XX

On donne un triangle équilatéral ABC ; *trouver le lieu du point* M *tel que* MC = MA + MB.

Ce problème est fort connu, la solution que nous allons en donner se recommande par la plus extrême simplicité.

Il est évident que pour le point M on peut écrire

$$MC.AB = MA.CB + MB.CA :$$

car on a simplement ainsi multiplié chaque terme de la relation donnée par un côté du triangle équilatéral ; or cette égalité exprime que dans le quadrilatère ABCM le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés, c'est-à-dire que ce quadrilatère est inscriptible. Donc le point M se trouve sur le cercle circonscrit à ABC.

XXI

Soit un triangle ABC ; *je projette les deux sommets* B *et* C *en* B' *et en* C' *sur une droite passant par le point* A.

Par C' *je mène une perpendiculaire sur* AB ;

Par B' — — — AC.

Ces deux perpendiculaires se rencontrent sur la hauteur partant de A.

Soient A', C_1, B_1 les pieds des perpendiculaires abaissées respectivement de A, C', B' sur AC, AB, AC.

Soit O le point où $C'C_1$ coupe AA';

Soit O' — $B'B_1$ — .

Les deux triangles semblables OAC_1, AA'B donnent

$$OA = \frac{AB \times AC_1}{AA'} \quad (1)$$

Les deux triangles semblables $O'AB_1$, $AA'C$ donnent

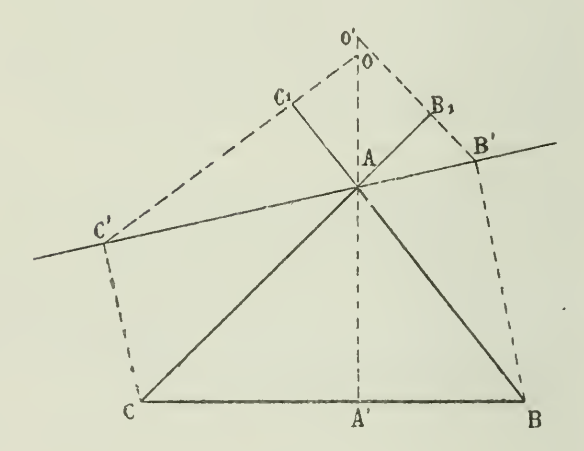
$$O'A = \frac{AC \times AB_1}{AA'} \qquad (2)$$

— — $AC'C_1$, ABB' donnent

$$AC' \times AB' = AB \times AC_1 \qquad (3)$$

— — $AB'B_1$, ACC' donnent

$$AC' \times AB' = AC \times AB_1 \qquad (4)$$



La comparaison de (3) et (4) donne

$$AB \times AC_1 = AC \times AB_1 ;$$

par conséquent les égalités (1) et (2) donnent

$$AO = AO',$$

c'est-à-dire que O et O' coïncident; C. Q. F. D.

L'énoncé de ce théorème m'a été indiqué par M. Jos. Marchand, qui en a fait la base d'une méthode encore inédite pour mener les plans tangents aux surfaces gauches.

On peut évidemment le généraliser ainsi :

Si l'on projette en A', B', C', *les trois sommets d'un triangle* ABC *sur une droite quelconque du plan, et si de* A', B', C' *on abaisse des perpendiculaires respectivement sur* BC, AC, AB, *ces trois perpendiculaires se coupent en un même point.*

Et généraliser encore cette dernière proposition par projection.

XXII

Etant donnés un triangle ABC *et un point* O *dans son plan, déterminer les angles du triangle* A'B'C' *tel qu'il ait* ABC *pour projection et que son point de concours des hauteurs* O' *se projette en* O.

Joignons OA, OB, OC qui coupent respectivement en A_1, B_1, C_1 les côtés BC, AC, AB; appelons l, m, n les trois rapports

$$\frac{CA_1}{A_1B}, \quad \frac{AB_1}{B_1C}, \quad \frac{BC_1}{C_1A};$$

si l'on désigne par x, y, z les trois côtés B'C', A'C', A'B'; et par A', B', C' les angles B'A'C', A'B'C', A'C'B', il est évident que puisque les rapports se conservent en projection l'on aura, en désignant par A'_1, B'_1, C'_1 les pieds des hauteurs du triangle A'B'C',

$$l = \frac{C'A'_1}{A'_1B'} = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{x^2 + z^2 - y^2} = \frac{y \cos C'}{z \cos B'} = \frac{\operatorname{tg} B'}{\operatorname{tg} C'};$$

$$m = \frac{A'B'_1}{B'_1C'} = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{y^2 + x^2 - z^2} = \frac{z \cos A'}{x \cos C'} = \frac{\operatorname{tg} C'}{\operatorname{tg} A'};$$

$$n = \frac{B'C'_1}{C'_1A'} = \frac{z^2 + x^2 - y^2}{z^2 + y^2 - x^2} = \frac{x \cos B'}{y \cos A'} = \frac{\operatorname{tg} A'}{\operatorname{tg} B'}.$$

Si l'on remarque que l'on a $A' + B' + C' = 180$ et par suite

$$\operatorname{tg} A' + \operatorname{tg} B' + \operatorname{tg} C' = \operatorname{tg} A' \operatorname{tg} B' \operatorname{tg} C',$$

ces équations donnent

$$\operatorname{tg}^2 A' = \frac{mn + n + 1}{m},$$

$$\operatorname{tg}^2 B' = \frac{ln + l + 1}{n},$$

$$\operatorname{tg}^2 C' = \frac{lm + m + 1}{l}.$$

On peut transformer ces valeurs de diverses façons en remarquant que l'on a

$$l . m . n = 1.$$

Remarque. — En se servant des équations

$$l = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{x^2 + z^2 - y^2}, \quad m = \text{etc.}$$

il est évident que l'on peut trouver directement le rapport des côtés x, y, z.

XXIII

A propos du problème XVII dont je donne ici de nouveau l'énoncé (Voir le numéro de janvier 1884, p. 21),

Soit un triangle ABC :

Sur CB *prolongé et dans le sens* CB *on a pris* A′ *tel que* BA′ = m . CB;

Sur AC *prolongé et dans le sens* AC *on a pris* B′ *tel que* CB′ = p . AC;

Sur BA *prolongé et dans le sens* BA *on a pris* C′ *tel que* AC′ = q . BA.

On connaît les trois points A′, B′, C′ *et les rapports* m, p, q.

Trouver ABC,

M. Laisant m'envoie l'élégante construction suivante, très facile à démontrer *a posteriori* :

Je divise B′C′, C′A′, A′B′ respectivement en A″, B″, C″ de façon à avoir

$$\frac{B'A''}{A''C'} = \frac{p}{q+1}, \quad \frac{C'B''}{B''A'} = \frac{q}{m+1}, \quad \frac{A'C''}{C''B'} = \frac{m}{p+1};$$

les trois droites A′A″, B′B″, C′C″ se coupent deux à deux aux points A, B, C.

Il ajoute que la *méthode des équipollences* conduit immédiatement à cette construction et donnerait de même la solution — par des constructions de triangles semblables — du problème plus général :

Sur les côtés d'un polygone inconnu ABCD... *on a construit des triangles* AA′B, BB′C, *etc.*, *respectivement semblables à autant de triangles donnés différents les uns des autres ; on connaît les points* A′, B′, C′, D′... *Trouver les points* A, B, C, D,... qui serait évidemment bien difficile à aborder par une autre méthode.

XXIV

Inscrire dans un triangle ABC *un triangle* A′B′C′ *tel que la somme des carrés de ses côtés soit minima.*

Lemme. — *On donne deux points fixes* B′, C′ *et une droite*

fixe CB; *trouver sur cette droite le point* A′ *pour lequel* $\overline{CA'}^2 + \overline{B'A'}^2$ *est un minimum.*

Il est facile de démontrer que A′ est la projection sur BC du milieu α de B′C′.

Appelons α, β, γ les milieux de B′C′, A′C′, A′B′; le lemme précédent nous montre que les droites αA′, βB′, γC′ sont respectivement perpendiculaires à BC, AC, AB, et comme elles sont les médianes du triangle A′B′C′, elles se coupent en un point K.

Or l'on sait que si du *centre des médianes antiparallèles* d'un triangle on abaisse des perpendiculaires sur les côtés de ce triangle ce point est le centre de gravité du triangle formé par les pieds des perpendiculaires, et réciproquement; donc le point K est le *centre des médianes antiparallèles.*

Le triangle A′B′C′ inscrit à ABC et tel que

$$\overline{B'C'}^2 + \overline{A'C'}^2 + \overline{A'B'}^2$$

soit un minimum est donc le triangle formé par les pieds des perpendiculaires abaissées du centre des médianes antiparallèles sur les trois côtés.

En désignant par S la surface de ABC, la valeur de ce minimum est

$$\frac{12S^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

XXV

On donne un triangle ABC : *soient* O_a, O_b, O_c *les centres des trois cercles ex-inscrits à ce triangle; soient* H_a, H_b, H_c *les points de concours des hauteurs des trois triangles* CO_aB, BO_cA, AO_bC :

1° *Démontrer que les deux triangles* ABC, $H_aH_bH_c$ *sont égaux, et homothétiques inverses;*

2° *Que si* X *est le centre d'homothétie de ces deux triangles,* O *le centre du cercle inscrit de* ABC, π *le centre de gravité de* ABC, *on a*

$$\frac{X\pi}{XO} = \frac{1}{3};$$

H_bC est parallèle à OA
H_bA — OC

La figure $AOCH_b$ est donc un parallélogramme; il en est de même de $AOBH_c$; donc BCH_bH_c est aussi un parallélogramme. Par suite

H_cH_b est égale, parallèle et de sens contraire à BC
de même H_bH_a — — — AB
— H_aH_c — — — CA

La première partie est donc démontrée.

Le point X, qui peut être considéré comme le centre du parallélogramme H_cH_bCB, est évidemment sur la droite menée parallèlement à OA par le milieu de BC; il est aussi sur la droite menée parallèlement à OB par le milieu de AC et sur la droite menée parallèlement à OC par le milieu de AB. Cela posé, soient α, β, γ les milieux de BC, AC, AB.

Les deux triangles $X\alpha\gamma$, OCA sont homothétiques inverses, et le rapport d'homothétie est 1/2; donc si l'on joint OX, $A\alpha$, ces deux lignes se couperont en π et l'on aura

$$\frac{X\pi}{XO} = \frac{1}{3}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous engageons les élèves à examiner les théorèmes très simples qu'on obtient en projetant la figure de façon que O' étant la projection de O, A', B', C' celles de A, B, C; O' soit le point de concours des hauteurs de A'B'C'.

(A suivre.)

PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR

ET PLUS PETIT MULTIPLE COMMUN DES NOMBRES FRACTIONNAIRES

Par M. **P. Barrieu**, professeur au Lycée de Mont-de-Marsan.

On dit qu'une fraction est divisible par une autre, ou multiple d'une autre, quand elle est égale au produit de cette autre par un nombre entier.

Nous appellerons *plus grand commun diviseur* de plusieurs fractions *la plus grande fraction irréductible* qui divise chacune des fractions données; *plus petit multiple commun* de plusieurs fractions, *la plus petite fraction irréductible* qui soit divisible par chacune de ces fractions.

Nous désignerons toujours par $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$ . . . les fractions irréductibles égales respectivement aux fractions $\frac{A}{B}$, $\frac{A'}{B'}$, $\frac{A''}{B''}$. . .

Enfin nous emploierons toujours les notations :

$$D(a, b, c, \ldots), \quad m(a, b, c, \ldots)$$

pour désigner le plus grand commun diviseur et le plus petit multiple commun des nombres a, b, c, . . .

Lemme. — *Pour qu'une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ soit divisible par une fraction irréductible $\frac{\alpha}{\beta}$, il faut et il suffit que α soit un diviseur de* a, *et β un multiple de* b.

La condition est nécessaire, car si $\frac{a}{b}$ est divisible par $\frac{\alpha}{\beta}$, on a

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot q ;$$

d'où

$$a\beta = b\alpha q.$$

Il en résulte que α divise $a\beta$, mais il est premier avec β, donc il divise a; de même b divise $a\beta$, mais il est premier avec a, donc il divise β.

La condition est suffisante, car si on a en même temps

$$a = \alpha q$$
$$\beta = bq'$$

on a

$$a\beta = \alpha bqq'$$

d'où

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot qq'.$$

Théorème I. — *Le plus grand commun diviseur de plusieurs fractions irréductibles est une fraction irréductible, qui a pour numérateur le plus grand commun diviseur des numérateurs, et pour dénominateur le plus petit multiple commun des dénominateurs.*

Soient les fractions irréductibles $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, ..., et soit $\frac{\alpha}{\beta}$ une fraction irréductible qui divise chacune des fractions données. Il résulte du lemme que α est un diviseur commun des numérateurs, et β un multiple commun des dénominateurs; $\frac{\alpha}{\beta}$ aura donc sa valeur maxima lorsque α sera le plus grand commun diviseur des numérateurs, et β le plus petit multiple commun des dénominateurs.

On a donc

$$D\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{a''}, \ldots\right) = \frac{D\,(a,\ a'\ a'', \ldots)}{m\,(b,\ b'\ b'', \ldots)}. \qquad (1)$$

En remplaçant les fractions irréductibles $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, ... par les fonctions égales $\frac{A}{B}$. $\frac{A'}{B'}$, $\frac{A''}{B''}$, ... l'égalité (1) devient

$$D\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right) = \frac{D\,(a, a', a'', \ldots)}{m\,(b, b', b'', \ldots)}. \qquad (2)$$

D'où la règle suivante :

Pour avoir le plus grand commun diviseur de plusieurs fractions, on les réduit à leur plus simple expression, et l'on divise ensuite le plus grand commun diviseur des numérateurs par le plus petit multiple commun des dénominateurs.

Corollaire I. — *Le plus grand commun diviseur des inverses de* n *nombres entiers est égal à l'inverse du plus petit multiple commun de ces nombres.*

Car en appliquant le théorème I aux fractions irréductibles $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{a''}$, ... on a

$$D\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots\right) = \frac{1}{m\,(a, b, c, \ldots)}. \qquad (3)$$

Corollaire II. — *Le plus grand commun diviseur de plusieurs fractions irréductibles est égal au plus grand commun diviseur des numérateurs multiplié par le plus grand commun diviseur des inverses des dénominateurs.*

En effet, la formule (3) donne

$$m(b,\ b',\ b'',\ldots) = \frac{1}{D\left(\frac{1}{b},\ \frac{1}{b'},\ \frac{1}{b''},\ldots\right)}$$

et, en portant cette valeur dans l'égalité (1), on a

$$D\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''},\ldots\right) = D(a, a', a'',\ldots).\ D\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{b'}, \frac{1}{b''},\ldots\right) \quad (4)$$

Théorème II. — *Le plus petit multiple commun de plusieurs fractions irréductibles est une fraction irréductible qui a pour numérateur le plus petit multiple commun des numérateurs, et pour dénominateur le plus grand commun diviseur des dénominateurs.*

En effet, soit $\frac{\alpha}{\beta}$ une fraction irréductible divisible par chacune des fractions irréductibles données; α sera un multiple commun des numérateurs, et β un diviseur commun des dénominateurs; $\frac{\alpha}{\beta}$ aura donc sa valeur minima lorsque α sera le plus petit multiple commun des numérateurs, et β le plus grand commun diviseur des dénominateurs.

Donc

$$m\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots\right) = \frac{m(a, a', a'', \ldots)}{D(b, b', b'', \ldots)}. \quad (4)$$

En remplaçant les fractions irréductibles par les fractions égales, on a

$$m\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right) = \frac{m(a, a', a'', \ldots)}{D(b, b', b'', \ldots)}. \quad (5)$$

Corollaire I. — *On a*

$$m\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots\right) = \frac{1}{D(a, b, c, \ldots)}. \quad (6)$$

Corollaire II. — *On a*

$$m\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots\right) = m(a, a', a'', \ldots).\ m\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{b'}, \frac{1}{b''}, \ldots\right) \quad (7)$$

Même démonstration que pour les corollaires du théorème I.

Théorème III. — *Toute fraction qui en divise séparément plusieurs autres, divise leur plus grand commun diviseur.*

Il suffit de démontrer le théorème pour les fractions irréductibles : car si une fraction en divise séparément plusieurs autres, la fraction irréductible qui lui est égale divise les fractions irréductibles respectivement égales à ces autres, et réciproquement.

Reprenons la formule

$$D\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots\right) = \frac{D(a, a', a'', \ldots)}{m(b, b', b'', \ldots)}.$$

Si une fraction irréductible $\frac{\alpha}{\beta}$ divise chacune des fractions, son numérateur α divise tous les numérateurs et par suite divise $D(a, a', a'', \ldots)$; d'autre part, son dénominateur β est un multiple de tous les dénominateurs, et par suite un multiple de $m(b, b', b'', \ldots)$. Donc, d'après le lemme, la fraction irréductible $\frac{\alpha}{\beta}$ divise

$$\frac{D(a, a', a'', \ldots)}{m(b, b', b'', \ldots)},$$

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Le plus grand commun diviseur de plusieurs fractions ne change pas quand on remplace deux ou plusieurs de ces fractions par leur plus grand commun diviseur.*

En effet, en formant les groupes

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''} \ldots$$

$$D\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}\right), \frac{a''}{b''}, \ldots$$

On voit que toute fraction irréductible qui divise les fractions du premier groupe, divise aussi celles du deuxième, et réciproquement. Donc les deux groupes ont le même plus grand commun diviseur.

On pourrait encore démontrer ce théorème par les identités de la manière suivante :

$$D\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots\right) = \frac{D(a, a', a'', \ldots)}{m(b, b', b'', \ldots)}$$
$$= \frac{D[D(a, a'), a'', \ldots]}{m[m(b, b'), b'', \ldots]}$$
$$= D\left[\frac{D(a, a')}{m(b, b')}, \frac{a''}{b''}, \ldots\right]$$
$$= D\left[D\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}\right), \frac{a''}{b''}, \ldots\right]$$

C. Q. F. D.

Théorème IV. — *Toute fraction qui est un multiple commun à plusieurs autres, est un multiple de leur plus petit multiple commun.*

Corollaire. — *Le plus petit multiple commun de plusieurs fractions ne change pas quand on remplace deux ou plusieurs de ces fractions par leur plus petit multiple commun.*

Même démonstration que pour le théorème III.

Théorème V. — *Le produit du plus grand commun diviseur de plusieurs fractions par le plus petit multiple commun de leurs inverses est égal à l'unité.*

En effet, on a

$$D\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right) = \frac{D(a, a', a'', \ldots)}{m(b, b', b'', \ldots)}$$
$$m\left(\frac{B}{A}, \frac{B'}{A'}, \frac{B''}{A''}, \ldots\right) = \frac{m(b, b', b'', \ldots)}{D(a, a', a'', \ldots)}$$

d'où

$$D\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}\right) \cdot m\left(\frac{B}{A}, \frac{B'}{A'}, \frac{B''}{A''}, \ldots\right) = 1 \quad (8)$$

(A suivre.)

QUESTION 98

Solution par M. Ferdinand Taratte, élève au Lycée d'Evreux.

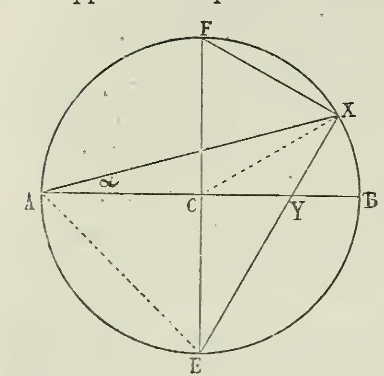
Dans un cercle dont le centre est C, *on mène deux diamètres rectangulaires* AB *et* EF. *On demande de trouver sur l'arc* BF *un point* X *tel que si l'on mène les lignes* AX, BX, EX, *dont la*

dernière rencontre CB *en* Y, *on ait*

$$AX.BX = CY.XE. \qquad \text{(Reidt.)}$$

Supposons le problème résolu. On a donc

$$\frac{AX}{CY} = \frac{EX}{BX}.$$



Mais les deux triangles EAX et BXY étant semblables, on a

$$\frac{AX}{XY} = \frac{EX}{BX}.$$

Donc CY = XY et le triangle CYX est isoscèle; mais il en est de même de CEX, et angle XCF = 2CXE = 2BCX d'où

$$XCF = 60°.$$

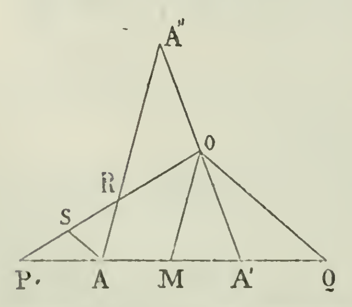
On fera donc sur CF au point C un angle de 60° et on aura ainsi le point X.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Aubry, à Douai; Youssoufian, à Constantinople; Porée, à Bernay; Naura, à Vitry-le-François; Bourgarel, à Antibes; Voignies, à Commercy.

QUESTION 103

Solution par M. Aubry, élève au Lycée de Douai.

On considère un triangle OPQ. *Soit* A *un point pris sur* PQ, A′ *le symétrique de* A *par rapport au milieu de* PQ, A″ *le symétrique de* A′ *par rapport au point* O.



La droite AA″ *rencontre* OP *au point* R. *Démontrer que la médiane* AS *du triangle* RAP *est parallèle à* QO. (G. L.)

Soit M le milieu de PQ, et par suite celui de AA′; si nous joignons ce point au sommet O, OM sera parallèle à AA

et nous aurons la relation

$$\frac{PO}{PM} = \frac{PR}{PA};$$

d'où

$$\frac{PO}{2PM} = \frac{PR}{2PA}.$$

En remarquant que $PQ = 2PM$, et $PR = 2PS$, cette relation devient

$$\frac{PO}{PQ} = \frac{PS}{PA}.$$

Ce qui démontre le parallélisme de AS et de QO.

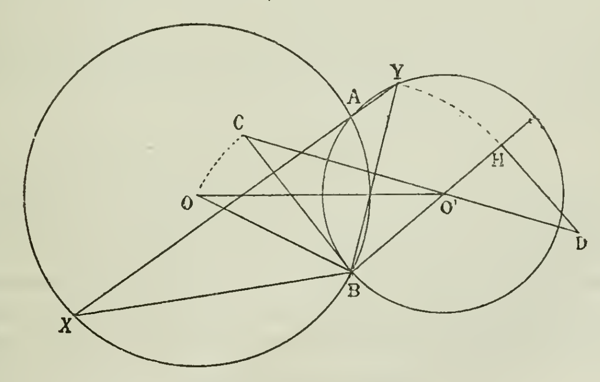
Nota. — La même question a été résolue par M. Mathieu, à Nantes; Bourgarel, à Antibes; Guilloz, institution Sainte-Marie, à Besançon; Martin, à Nice; Chapron, à Versailles; Taratte, à Évreux; Vigarié, à Toulouse.

QUESTION 106

Solution par M. Aubry, élève au Lycée de Douai.

Deux cercles se coupent en A *et* B. *On demande de mener par le point* A *une droite rencontrant l'un des cercles en* x, *l'autre en* y, *de façon que, si l'on tire* Bx *et* By, *on ait*

$$Bx^2 + By^2 = d^2.$$



Soient O et O' les centres des cercles donnés; tirons OO' et joignons Bx, By, BO, BO'. Les angles x et O, y et O' sont égaux comme ayant des mesures égales. Il s'ensuit que les

triangles Bxy et BOO′ sont semblables et donnent la proportion

$$\frac{Bx}{By} = \frac{BO}{BO'}.$$

On pourra donc déterminer le point y, par exemple. Par le point B on mènera une perpendiculaire à BO′, BC = BO, on joindra CO′ et on portera sur cette droite une longueur $CD = d$. On projettera le point D en H sur BO′, et de B comme centre avec BH pour rayon on décrira un arc de cercle qui en général coupera le cercle O′ en deux points.

Si l'on a $BH < 2R'$ ou, en ayant égard à la similitude des triangles BCO′ et DHO′, $CD < 2CO'$ ou $d < 2\sqrt{R^2 + R'^2}$, il y aura deux solutions.

Si $BH = 2R'$, ou $d = 2\sqrt{R^2 + R'^2}$, il n'y a qu'une solution. Enfin le problème est impossible si $d > 2\sqrt{R^2 + R'^2}$.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Caen.

Trouver deux angles x et y tels que l'on ait

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1\,; \quad \operatorname{tg}(x + y) = \frac{4}{3}.$$

— Calculer le diamètre d'une sphère d'or valant un million de francs. On admet que l'or, à volume égal, vaut 30 fois plus que l'argent, que celui-ci vaut 200 francs le kilogramme et qu'un décimètre cube d'argent pèse $10^k,500$.

— Résoudre l'équation

$$\cos 2x - \cos 6x = \sin 3x + \sin 5x.$$

— Résoudre un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse a, et sachant que ce triangle est équivalent à un carré dont le côté est k ; application : $a = 1$; $k = 0,46$.

— Calculer au bout de combien d'années et de jours sera décuplée une somme placée à intérêts composés au taux de 4 0/0 ; les intérêts se capitalisent au bout de chaque année.

Clermont-Ferrand.

Étant donné un hexagone régulier, on joint les sommets de deux en deux ; on obtient ainsi deux triangles équilaté-

raux ABC, A'B'C'. On suppose le triangle A'B'C' transporté perpendiculairement au plan ABC, et parallèlement à lui-même ; on joint alors les sommets AA', A'B, BB', B'C, CC', C'A. 1° h désignant la distance des plans des deux triangles et a le côté de l'hexagone, on demande d'évaluer le volume du solide défini par la condition précédente ; 2° calculer h par la condition que toutes les faces soient des triangles équilatéraux, et évaluer le volume correspondant.

— Partager un cône en deux parties équivalentes par un plan parallèle à la base.

— Entre quelles limites varie la fraction

$$\frac{3x^2 - 5x + 5}{2x^2 - 3x + 4}\,?$$

— Étant donné un triangle équilatéral ABC, on prend sur le côté CA une longueur CB' égale à α, et sur le côté AB une longueur AC' égale aussi à α ; on mène la ligne B'C', qui rencontre le prolongement de CB en un point A' ; calculer la longueur BA'. En désignant par a le côté du triangle, on fera le calcul en supposant $a = 10$, $\alpha = 6$.

— Trouver dans quel rapport un plan partage le volume d'une sphère, connaissant le rapport de la distance du centre de la sphère au rayon.

— Somme des cubes des n premiers termes d'une progression géométrique.

— Trouver la somme des n premiers nombres impairs et aussi la somme des n premiers nombres pairs.

— Partager un cône en deux parties équivalentes par un plan parallèle à la base.

— Évaluer la somme des nombres impairs de 31 à 115.

— Si l'on inscrit dans un demi-cercle un demi-polygone régulier d'un nombre pair de côtés, et qu'on lui circonscrive un demi-polygone semblable, la surface engendrée par la demi-circonférence tournant autour de son diamètre est moyenne proportionnelle entre les surfaces engendrées par les deux polygones.

— Variations de la fraction

$$\frac{x^2 - x + 3}{2x^2 - 3x + 4}.$$

— Étant donnée la relation

$$\cos x = \frac{\sin h + \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta},$$

dans laquelle on a $h = 33^\circ 57' 7'',9$;
$\varphi = 27^\circ 5'$;
$\delta = 13^\circ 38' 11'',1$,

calculer l'angle x.

— Dans un plan vertical, on donne deux points A et B fixes, la distance horizontale, $AC = d$, des deux points, leur distance verticale $BC = h$. Aux deux points A et B est attaché un fil de longueur h ; ce fil supporte une poulie mobile P, dont le rayon est négligeable, et dont la chape porte un poids Q. On demande : 1° de construire géométriquement la position d'équilibre du fil ; 2° d'exprimer sa tension au moyen des données ; 3° de calculer cette tension lorsque $d = 8^m,25$; $h = 4,34$; $l = 12,42$; $Q = 1,937$.

— Aux trois sommets d'un triangle équilatéral sont appliquées trois forces parallèles et de même sens, dont les intensités respectives sont 1, 2, 3. Trouver la résultante de ces forces et son point d'application. Considérer le cas où la force 3 est contraire aux deux autres.

— Inscrire dans un cercle de rayon a un triangle isoscèle tel que la somme de la base et de la hauteur ait une longueur donnée l.

— La surface d'un secteur circulaire est 5^{m2} ; son angle au centre est 49° ; on demande à moins de $0^m,001$ le rayon de la base d'un cône circulaire droit dont ce secteur est le développement de la surface latérale sur un plan. Volume de ce cône.

— Connaissant dans un triangle le périmètre et les angles, on demande de calculer sous forme logarithmique les trois côtés et la surface.

— La hauteur d'un cône est 15 m. ; le rayon de sa base 7 m. ; on demande à quelle distance de la base il faut mener un plan parallèle pour que le volume du tronc de cône soit 150 mètres cubes. Surface latérale de ce tronc de cône.

— Former l'équation du second degré qui admet pour

racines 2 et $-\frac{5}{7}$; ou qui admet pour racines $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$.

— Le volume d'un cône est $\frac{1}{3}$ de mètre cube; le rayon de sa base est 1 mètre. Calculer la surface latérale.

— Entre quelles limites varie la fraction $\frac{x^2+1}{(x-1)^2}$?

— On donne la somme l de l'hypoténuse et de la hauteur d'un triangle rectangle; entre quelles limites peuvent varier la surface et le périmètre de ce triangle rectangle?

Dijon.

Deux points fixes A et B étant donnés sur l'un des côtés d'un angle, déterminer sur l'autre côté un point M, tel que la somme $MA^2 + MB^2$ soit égale à une quantité donnée. Discussion.

— Calculer l'angle aigu B d'un triangle rectangle dans lequel on connaît l'hypoténuse a, et la longueur β de la bissectrice, soit intérieure, soit extérieure, issue du sommet de cet angle B.

— Angle de deux droites qui se coupent sur la ligne de terre, et sont dans un plan passant par cette ligne de terre.

Lyon.

Deux triangles semblables ont leurs bases homologues dans un rapport donné, par exemple de 2 à 3. Après avoir fait tourner ces triangles chacun autour de sa base, on propose de dire dans quel rapport sont respectivement les surfaces et les volumes engendrés.

— Calculer la valeur de l'angle dont le cosinus est donné par la formule

$$\cos x = \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha}, \text{ avec } \alpha = 57^\circ 57' 57''.$$

Montpellier.

On donne la surface et la diagonale d'un parallélépipède rectangle. Calculer ses dimensions, sachant qu'elles sont en progression arithmétique, ou en progression géométrique.

NOTICE SUR VICTOR-ALEXANDRE PUISEUX

Victor-Alexandre PUISEUX naquit à Argenteuil près de Paris, le 16 avril 1820. Son père, receveur des contributions indirectes, fut appelé trois ans après à Longwy en Lorraine, et en 1826 à Pont-à-Mousson. C'est au collège de cette ville que le futur membre de l'Institut fit ses premières études. Les dispositions extraordinaires que le jeune élève montrait pour les sciences déterminèrent ses parents à l'envoyer finir ses études à Paris : à l'âge de 14 ans, il vint occuper une petite chambre, rue Saint-Jacques : c'est là qu'il se livrait au travail avec une incroyable ardeur, ne connaissant guère d'autres distractions que de longues promenades à pied et de fréquentes visites à son frère aîné qui était déjà élève de l'École normale (section des Lettres). L'année suivante il entra comme élève boursier au collège Rollin.

En 1836, âgé seulement de 16 ans, Victor Puiseux terminait ses Mathématiques spéciales, et sollicitait une dispense d'âge pour se présenter à l'École normale. M. Cousin, alors Ministre, la lui refusa ; mais il regretta sa décision, en le voyant, cette année même, obtenir le premier prix de physique au grand Concours. On lui offrit alors de le nommer élève de l'École, par décret spécial ; mais il refusa à son tour, déclarant qu'il voulait entrer à l'École par la grande porte. Un an après, le prix de Mathématiques spéciales constatait de nouveau sa supériorité, et les portes de l'École s'ouvraient devant lui ; il s'y maintint toujours au premier rang. Après ses trois années d'études, reçu le premier à l'agrégation des sciences, il obtint de passer encore une année à Paris, où il perfectionna ses études mathématiques en même temps qu'il était chargé d'une Conférence aux élèves de l'École normale.

Envoyé comme professeur de Mathématiques spéciales au collège royal de Rennes, il y fit un stage de trois ans, puis il fut chargé d'une chaire de Mathématiques que

l'on venait de créer à la Faculté de Besançon. C'est à cette époque qu'il enrichit le *Journal de Liouville* de notes remarquables par la rigueur des méthodes et l'élégance des démonstrations.

Dans le tome VII de ce journal, sous le titre de Géométrie, il établit par une analyse élégante et habile que l'hélice est la seule courbe dont la courbure et la torsion sont invariables dans tous les points. Bientôt après, étudiant le mouvement d'un point matériel pesant sur une sphère, il justifiait par le calcul une circonstance particulière qui se présente dans les oscillations du pendule conique et dont la théorie générale n'avait pas encore rendu raison. Dans les volumes suivants du même recueil, il traitait diverses questions de mécanique relatives à la cycloïde, aux courbes tautochrones ; dans le tome XI, il donnait pour la première fois l'expression générale de la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique. En même temps que d'autres géomètres, il s'occupa dans le tome XII du beau théorème de Gauss : « *Si l'on déforme une surface flexible, le produit des rayons de courbure principaux, en chaque point, n'est pas altéré* » ; il en donna une démonstration directe, très simple, tirée de considérations classiques et élémentaires.

Appelé en 1849 à l'École normale en qualité de Maître de conférences, il propagea dans plusieurs générations de jeunes professeurs les saines traditions de rigueur et de clarté dont il offrait lui-même le plus parfait modèle. En 1853 il fut appelé comme astronome à l'Observatoire, qu'il quitta en 1859, pour se consacrer tout entier à l'enseignement et à ses travaux personnels. Il avait été pendant quelques années suppléant de Sturm et de Leverrier à la Faculté des sciences, de Binet au Collège de France ; en 1857, il remplaça, comme professeur titulaire de Mécanique céleste à la Sorbonne, l'illustre Cauchy, dont il avait été l'élève, l'admirateur et l'ami. En 1868, il devint membre du Bureau des Longitudes et quitta définitivement l'enseignement de l'École normale.

Il avait publié plusieurs travaux importants, surtout celui

relatif à la théorie des fonctions, qui fit sensation et lui valut les éloges de Cauchy et sur lequel M. Ch. Hermite, un des juges les plus compétents, a prononcé le jugement suivant (Comptes rendus, t. XXXII, p. 458). « *Les propositions données par M. Puiseux sur les racines des équations algébriques considérées comme fonctions d'une variable* z *qui entre rationnellement dans leur premier membre, me semblent ouvrir un vaste champ de recherches destinées à jeter un grand jour sur la nature analytique de ce genre de quantités.* » Et M. Hermite montrait en effet, dans un travail extrêmement remarquable, combien la théorie de M. Puiseux éclairait celle de la résolution des équations algébriques et de la division de l'argument dans les fonctions elliptiques. Il fit paraître des mémoires relatifs au mouvement des corps solides de révolution, à la théorie de la Lune.

Tous ces remarquables travaux avaient depuis longtemps attiré sur V. Puiseux l'attention de l'Académie : présenté comme candidat par la section de Géométrie, il ne fut, par suite de la guerre franco-allemande, élu qu'en 1871. Tous les concurrents se retirèrent spontanément, et par une exception aussi rare que glorieuse, il recueillit l'unanimité des suffrages, « *sans une seule voix dissidente ni une seule abstention* », comme l'a dit M. J. Bertrand.

Signalons encore ici divers travaux de V. Puiseux (*Journal de Liouville*, t. XIII) : Du mouvement d'un solide de révolution posé sur un plan horizontal ; même journal, t. XVII ; Solution de quelques questions relatives au mouvement d'un corps solide pesant posé sur un plan horizontal.

En 1872, il publia dans les *Annales scientifiques de l'Ecole Normale* (t. 1er, 2me série) un beau Mémoire intitulé : De l'équilibre et du mouvement des corps pesants en ayant égard aux variations d'intensité et de direction de la pesanteur.

Mentionnons également un autre Mémoire sur la convergence des séries qui se présentent dans la théorie du mouvement elliptique des planètes, et deux autres : Sur le développement en séries des coordonnées des planètes, et de la fonction perturbatrice (*Journal de Liouville*, t. XVI de la 1re série et t. V de la 2e).

Appelé par la confiance de l'Académie à faire partie de la commission dite « du passage de Vénus », il fut réellement l'âme des premières résolutions par les calculs immenses auxquels il se livra pour marquer les régions où l'on pourrait observer le phénomène, et pour éclairer la commission sur le choix qu'il convenait de faire entre elles : il construisit des cartes, indiqua quelles localités convenaient le mieux pour observer par la méthode de Halley, quelles stations il fallait plutôt choisir, si on voulait utiliser la méthode de de Lisle. C'est à lui que l'on doit encore les premières réductions du calcul des observations faites par les envoyés français dans les diverses stations.

Disons un mot d'un autre Mémoire de lui publié (1877-1878, 2e partie, p. 1) dans les *Annales de la Société scientifique* de Bruxelles : « *Note sur les polygômes qui sont à la fois inscrits dans un cercle et circonscrits dans un autre cercle.* » Dans ce petit travail, Puiseux reprend par une voie simple et élémentaire un problème traité autrefois par Jacobi, et lié intimement au problème de multiplication de l'argument dans les fonctions elliptiques. Il donne une méthode ingénieuse pour déterminer directement les degrés de polynômes entiers qui jouent un rôle important dans la question, et en déduit un assez bon nombre de conséquences curieuses.

Dans ces derniers temps, malgré les souffrances cruelles, souvent intolérables, que lui causait la maladie qui l'a emporté, il avait accepté la tâche ingrate de surveiller la nouvelle édition des œuvres de Laplace, entreprise sous les auspices de l'Académie des sciences ; 5 volumes sont aujourd'hui publiés.

Nous avons parlé du savant; quant au professeur, nul plus que lui n'apporta la rigueur et la clarté dans son enseignement; tous ceux qui l'ont entendu peuvent l'attester. V. Puiseux n'était pas seulement mathématicien : intelligence parfaitement équilibrée, il s'intéressait sérieusement à une foule de questions. Dès sa première jeunesse, il avait cultivé avec bonheur les langues étrangères et la botanique. Ces aptitudes variées le désignèrent à la sortie de ses études à l'attention du célèbre naturaliste Auguste Saint-Hilaire, dont il suivait alors assidûment les cours. Puiseux accepta avec empresse-

ment la proposition qui lui fut faite d'accompagner son maître en Norwège, où ils entreprirent l'exploration botanique du pays; ils poussèrent jusqu'à Drontheim; la saison avancée ne leur permit pas d'aller plus loin. V. Puiseux eut toujours un goût extraordinaire pour les voyages, surtout les voyages dans les montagnes. Les Alpes avaient particulièrement ses préférences: vingt fois il les parcourut, non pas seulement en simple touriste, comme on pourrait le croire, mais en véritable explorateur. En 1848, il fut le premier qui atteignit le sommet de la pointe des Ecrins (4,103 m.) (voir Whymper, *Scrambles amongst the Alps*); il fut, on le comprend, un des premiers fondateurs du Club alpin français.

Chez Victor Puiseux l'homme privé n'était pas moins digne de servir de modèle que le savant : étranger à l'esprit d'intrigue, à l'ambition personnelle, son indifférence pour les honneurs allait jusqu'à l'apathie. Il pensait que c'est au pouvoir à distinguer le vrai mérite et non point à celui-ci à venir s'offrir. A l'un de ses amis qui venait le féliciter sur sa nomination au grade d'officier de la Légion d'honneur, il fit cette réponse si modeste et si simple : « Oh! dit-il, ces distinctions ne me sont agréables que par le plaisir qu'elles font à mes amis. » La simplicité, la douceur, la régularité de sa vie ont frappé tous ceux qui l'ont approché : il ne connaissait d'autre bonheur que le travail, la contemplation des beautés de la nature, les joies pures de la famille. V. Puiseux avait épousé en 1849 la fille de M. Jeannet, alors proviseur du lycée de Versailles : six enfants complétèrent cette union basée sur les sentiments les meilleurs et les plus élevés. Il eut la douleur de voir quatre d'entre eux et leur mère le précéder dans la tombe. Deux fils seulement, deux fils dignes de lui, survivent aujourd'hui, et gardent pieusement la mémoire de ses vertus. Eux seuls pourraient témoigner à quel point sa tendresse paternelle a été ingénieuse et persévérante. Doué d'aptitudes presque universelles, il dirigeait leurs études, leurs voyages, leurs amusements. Aucun devoir n'était indifférent à la conscience de Puiseux : aimant profondément son pays, on le vit en juin 1848, récemment nommé à la Faculté de Besançon,

quitter la toge de professeur pour le fusil de garde national et se rendre à Paris pour y concourir à la défense de l'ordre social. Il fit plus encore en 1870 : laissant dans le Midi ses jeunes enfants qu'il accompagnait en voyage de vacances, il vint s'enfermer dans Paris assiégé et donner à tous, dans les postes pénibles et périlleux des remparts, l'exemple de la fermeté et de l'abnégation.

Victor Puiseux était un homme de convictions profondément chrétiennes, mais il y joignait la tolérance la plus parfaite. A l'école il s'était lié avec Pierre Olivain, entré depuis dans la Compagnie de Jésus et tombé en 1871 sous les balles de la Commune. Ensemble ils donnaient aux œuvres de charité une partie de leurs jours de congé ; ensemble ils fondèrent une des Conférences de Saint-Vincent de Paul de Paris, aujourd'hui encore jeune et vivante, composée en grande partie d'élèves des Écoles et qui gardent fidèlement le souvenir de ses fondateurs.

Enfin, pour conclure, une bonté inépuisable, une charité active étaient comme l'âme de sa vie. Il venait à peine d'avoir la joie de marier son fils aîné, quand la mort est venue le prendre, le 9 septembre 1883, à Frontenay (Jura), dans la famille de sa belle-fille, et où, fidèle aux convictions de sa vie, il a donné aux siens le consolant spectacle d'une mort vraiment chrétienne.

Un vieil ami et camarade d'école.

QUESTIONS PROPOSÉES

138. — Soit yOx un angle, A un point pris sur Ox; par le point A on mène une droite AB, et par le point O une droite OP, telle que l'angle POy soit égal à l'angle BAx. Trouver le lieu géométrique du point d'intersection de AB et de OP lorsque l'angle BAx varie. *(L. Lévy.)*

139. — Mener par un point donné A une droite dont les distances à deux points donnés aient une somme donnée.

Discuter en faisant varier la position du point A dans le plan. *(L. Lévy.)*

140. — Si d'un point de la circonférence de diamètre AB, pour centre, on décrit une circonférence tangente à AB, les tangentes à cette circonférence issues des points A et B sont parallèles. *(L. Lévy.)*

141. — Construire un triangle sachant que la bissectrice coupe deux circonférences données sous des angles donnés, et que les côtés adjacents passent par les centres des deux circonférences. *(L. Lévy.)*

142. — Soient ABC un triangle, O le centre du cercle circonscrit; par O je mène une droite quelconque, qui coupe respectivement BC, CA, AB, en m, n, p. Soient m', n', p', les symétriques de m, n, p, par rapport à O ; démontrer que les droites Am', Bn', Cp' se coupent sur le cercle circonscrit à ABC. — Généraliser le théorème par projection et en déduire la construction par points d'une ellipse dont on connaît le centre et trois points. *(E. Lemoine.)*

143. — On considère un cercle Δ et deux diamètres rectangulaires AB et CD ; d'un point M mobile sur Δ, on abaisse une perpendiculaire MP, sur AB. Par le point P on mène des parallèles aux droites CA et CB et l'on joint MC. Cette droite MC rencontre les parallèles en question aux points R et Q. Trouvez le lieu décrit par le milieu de RQ.

Ce lieu est un cercle. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 6052-4.

SUR LA QUESTION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

DONNÉE

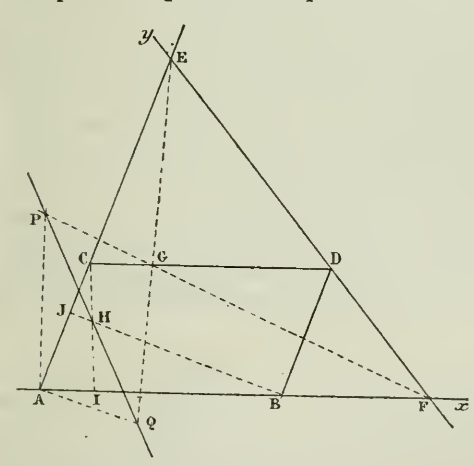
AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE FORESTIÈRE, EN 1883

Par M. **Picquet**, répétiteur à l'École polytechnique.

Étant donné un parallélogramme ABCD, *dont les côtés* AB, AC *sont fixes de position, mais variables quant à leurs longueurs, de telle sorte que le sommet* D *décrive une droite fixe* EF, *trouver le lieu décrit par le point de rencontre* H *des hauteurs du triangle* ABC.

A chaque point D *de la droite* EF *correspond ainsi un point du lieu; établir cette correspondance pour les différentes régions de la droite* EF *dans le cas général, et spécialement dans le cas où l'angle* A *est un angle droit.*

La première partie de la question avait été donnée à l'intention de tous les candidats; elle a en effet été traitée par un grand nombre d'entre eux avec plus ou moins d'élégance, suivant qu'ils possédaient ou non l'usage des déterminants.



Prenant pour axes de coordonnées obliques les côtés AB, AC du parallélogramme et désignant leur angle par θ, si

$$ax + by + c = 0$$

est l'équation de la droite EF, et si α et β sont les coordonnées variables du point D, on voit immédiatement que les hau-

teurs CH, BH ont pour équations

$$x + (y - \beta)\cos\theta = 0,$$
$$(x - \alpha)\cos\theta + y = 0.$$

On a de plus

$$a\alpha + b\beta + c = 0.$$

Éliminant α et β entre ces équations, on a

$$\begin{vmatrix} 0 & -\cos\theta & x + y\cos\theta \\ -\cos\theta & 0 & x\cos\theta + y \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

ou, en supprimant le facteur $\cos\theta$,

$$x(a\cos\theta + b) + y(a + b\cos\theta) + c\cos\theta = 0,$$

équation qui représente une ligne droite PQ.

La seconde partie de la question, destinée à différencier les candidats, n'a établi entre eux aucune distinction, attendu que personne ne l'a traitée; et l'objet de cette note est de leur indiquer la marche qu'ils devaient suivre.

Si le point D vient en E, le point H vient au point Q, où la perpendiculaire élevée en A à l'axe Ay rencontre la perpendiculaire abaissée de E sur l'axe Ax. De même si D vient en F, H vient au point P où la perpendiculaire AP à l'axe Ax rencontre la perpendiculaire abaissée de F sur l'axe Ay. C'est ce qu'il est, d'ailleurs, facile de vérifier par le calcul. La droite demandée est donc *la seconde diagonale du parallélogramme* APGQ *dont les côtés sont perpendiculaires aux axes et dont deux sommets opposés sont le point* A *et le point de rencontre des hauteurs* G *du triangle* AEF : et l'on voit alors aisément que si le point D décrit successivement les segments ∞ E, EF, F ∞, sur la droite donnée, le point H décrit respectivement les segments ∞ P, PQ, P ∞, sur la droite trouvée.

Si l'angle θ devient droit et si l'on applique encore au point D la construction qui donne le point H, pour tout point D de la droite donnée, on trouve l'origine A; cependant, si l'on fait $\cos\theta = 0$ dans l'équation de la droite PQ, elle devient

$$bx + ay = 0$$

qui représente la droite menée par l'origine symétriquement par rapport à la perpendiculaire à EF. Or, si l'on applique

à un point quelconque de cette droite la construction inverse qui permet de déduire le point D du point H, on trouve que le point D correspondant est à l'infini. Si donc on trouve une droite et non pas seulement l'origine, cela tient à ce que le point à l'infini sur la droite donnée donne lieu à une infinité de points H à distance finie, tandis que tous les points à distance finie ne fournissent que l'origine.

Il est facile d'ailleurs de se rendre compte de la direction particulière trouvée dans ce cas pour la droite PQ. Le quadrilatère inscriptible BCIJ donne en effet

$$AJ \times AC = AI \times AB,$$

d'où

$$\frac{AJ}{AI} \times \frac{AC}{AB} = 1.$$

Mais, lorsque θ tend vers $\frac{\pi}{2}$, $\frac{AJ}{AI}$ tend vers le coefficient angulaire de la droite qui joint l'origine à un point du lieu ; $\frac{AC}{AB}$ est le coefficient angulaire de la droite qui joint l'origine au point correspondant de la droite donnée ; ce qui prouve que *le produit des coefficients angulaires des droites qui joignent l'origine à deux points correspondants tend vers l'unité.* Supposant le point D à l'infini sur EF, on en conclut alors pour la droite PQ la direction indiquée par le calcul.

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 49.)

XXVI

On donne un triangle ABC; *lieu des points* O *tels que si par* O *on mène*

OA_c *parallèle à* BC *et terminé en* A_c *sur* AC,
OC — AB — C_a *sur* AC,

on ait ·

$$\frac{CC_a}{AA_c} = l,$$

l étant un rapport donné.

Soit K le point du lieu situé sur BC ; k le point de AC tel que Kk soit parallèle à AB;

Soit H le point du lieu situé sur AB ; h le point de AC tel que Hh soit parallèle à BC ;

Soit μ le point du lieu situé sur AC.

La réciproque du théorème des transversales montre facilement que H, K, μ sont en ligne droite, je dis que cette droite est le lieu cherché. En effet : soit O un point de cette droite, OA_c, OC_a les lignes construites comme l'indique l'énoncé.

On a

$$\frac{CC_a}{AA_c} = \frac{\mu C + \mu C_a}{\mu A + \mu A_c}; \qquad (a)$$

mais μ étant un point du lieu on a facilement

$$\mu C = \frac{l}{l+1} \cdot b \qquad (1)$$

$$\mu A = \frac{1}{l+1} \cdot b \qquad (2)$$

Soit

$$\frac{\mu C_a}{\mu A} = \frac{O\mu}{\mu H} = j,$$

on a

$$\mu C_a = j \cdot \mu A = \frac{j.b}{l+1}; \qquad (3)$$

mais alors

$$\frac{\mu A_c}{\mu h} = \frac{O\mu}{\mu H} = j,$$

donc

$$\mu A_c = j \cdot \mu h = j(Ah - A\mu) = \frac{j.b}{l(l+1)}. \qquad (4)$$

De (1), (2), (3), (4), substitués dans (a), on tire

$$\frac{CC_a}{AA_c} = \frac{\dfrac{l}{l+1}.b + \dfrac{j.b}{l+1}}{\dfrac{1}{l+1}.b + \dfrac{j.b}{l(l+1)}} = l.$$

Le point O jouit donc de la propriété considérée; on démontre immédiatement que tout point qui n'est pas sur la droite $HK\mu$ ne jouit pas de cette propriété: le lieu est donc la droite $HK\mu$. C. Q. F. D.

Appelons L cette droite.

Nous laissons aux élèves à démontrer:

1° Que, quel que soit l, *la droite* $HK\mu$ *passe par le symétrique de* B *par rapport au milieu de* AC.

2° Que, si par O *on mène une parallèle à* AC *coupant* BC *en* B_c

—	—	AB	—	—	C_b
—	—	AC	—	AB	B_a
—	—	BC	—	—	A_b

et que l'on cherche le lieu des points O *tels que* $\frac{BB_c}{CC_b} = m$, m *étant un rapport donné, lieu qui est une droite que nous appelons* M *; et le lieu des points* O *tels que* $\frac{AA_b}{BB_a} = n$, n *étant un rapport donné, lieu qui est une droite que nous appelons* N *: les trois lieux* L, M, N *concourront en un même point si l'on a* $l.m.n = 1$.

XXVII

Étant donné un triangle ABC, *trouver dans son plan un point tel qu'en menant par ce point des parallèles aux trois côtés, les longueurs de ces parallèles comprises entre les côtés du triangle soient proportionnelles aux carrés des côtés auxquels elles sont parallèles.*

Première solution. — Soient A_c, A_b les points où la parallèle à BC menée par O coupe AC et AB;

Soient B_a, B_c les points où la parallèle à AC menée par O coupe AB et CB;

Soient C_b, C_a les points où la parallèle à AB menée par O coupe CB et AC.

On a par l'énoncé

$$\frac{A_cA_b}{a^2} = \frac{B_cB_a}{b^2} = \frac{C_aC_b}{c^2} = \rho;$$

mais on sait que

$$\frac{A_cA_b}{BC}+\frac{B_aB_c}{AC}+\frac{C_aC_b}{AB}=2\,;$$

donc

$$a\rho+b\rho+c\rho=2$$

ou

$$\rho=\frac{1}{p}$$

par suite

$$A_bA_c=\frac{a^2}{p}$$

$$B_cB_a=\frac{b^2}{p}$$

$$C_aC_b=\frac{c^2}{p}$$

Il est facile de démontrer que la distance d'un sommet à la parallèle menée par ce point au côté opposé est égale au diamètre du cercle inscrit ; par conséquent ce point est celui que nous avons désigné par ω, et dont nous avons étudié les propriétés (voir *Journal de Mathématiques spéciales*, 1883, page 49 et suivantes).

On peut démontrer aussi le théorème suivant :

Les trois triangles $C\omega_1B$, $C\omega_1A$, $A\omega_1B$ *sont respectivement proportionnels à* $p-a$, $p-b$, $p-c$.

Il y a d'autres points qui répondent à la question.

Ainsi nous sommes partis de l'égalité

$$\frac{A_cA_b}{BC}+\frac{B_aB_c}{AC}+\frac{C_aC_b}{AB}=2\,;$$

mais si nous étions partis de l'égalité

$$\frac{B_aB_c}{AC}+\frac{C_aC_b}{AB}-\frac{A_cA_b}{BC}=2\,;$$

nous aurions trouvé

$$\rho\alpha=\frac{1}{p-a}.$$

$\rho\alpha$ représentant la valeur commune des rapports

$$\frac{A_cA_b}{a^2}=\frac{B_aB_c}{b^2}=\frac{C_aC_b}{c^2},$$

on trouverait ainsi un point pour lequel m aurait

$$A_b A_c = \frac{a^2}{p-a},$$

$$B_a B_c = \frac{b^2}{p-a},$$

$$C_a C_b = \frac{c^2}{p-a}.$$

On verrait facilement que la distance d'un sommet à la parallèle menée par ce point au côté opposé est égale au diamètre du cercle ex-inscrit de rayon r_a, par conséquent *(loc. cit.)* ce point est celui que nous avions étudié en le désignant par ω_a, etc. Les quatre points ω_1, ω_a, ω_b, ω_c sont donc tels si par chacun de ces points on mène des parallèles aux trois côtés, les parties de ces parallèles comprises entre les côtés du triangle sont proportionnelles aux carrés des côtés.

Deuxième solution. — Proposons-nous de déterminer géométriquement le point ω_1 d'une autre façon que par les constructions indiquées *(loc. cit.)*.

On a

$$\frac{CC_a}{AC} = \frac{C_a C_b}{AB} \text{ ou } \frac{CC_a}{b} = \frac{C_a C_b}{c}$$

$$\frac{AA_c}{AC} = \frac{A_b A_c}{BC} \text{ ou } \frac{AA_c}{b} = \frac{A_b A_c}{a};$$

d'où

$$\frac{CC_a}{AA_c} = \frac{C_a C_b}{A_b A_c} \cdot \frac{a}{c} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a}{c} = \frac{c}{a}.$$

D'après le problème XXVI $\left(\text{c'est le cas de } l = \frac{c}{a}\right)$, le point ω_1 appartient à une droite facile à déterminer ; pour la construire il faut prendre sur CB, à partir de C dans le sens CB, la longueur $CA_1 = AB$ et joindre A_1 au symétrique de B par rapport au milieu de AC.

Le point ω_1 appartient encore à une autre droite analogue qui est le lieu des points caractérisés par l'égalité

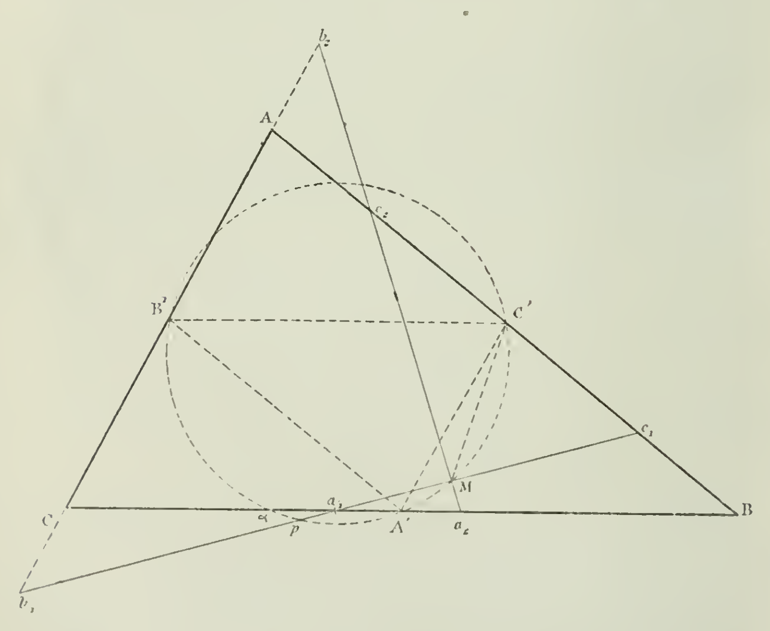
$$\frac{AA_b}{BB_a} = \frac{a}{b}.$$

Il est donc déterminé.

Une méthode semblable s'applique à la construction des points ω_a, ω_b, ω_c.

XXVIII

Soit M *un point du cercle des neuf points du triangle* ABC, *soit un angle droit ayant son sommet en* M *et dont les côtés coupent* BC *en* a_1, a_2, *tels que le milieu de la droite* a_1a_2 *soit aussi le milieu* A' *de* BC, *je dis que la droite* Ma_1 *coupera* AC *en* b_1, AB *en* c_1, *que la droite* Ma_2 *coupera* AC *en* b_2, AB *en* c_2 *de façon que les milieux de* b_1b_2, c_1c_2 *coïncident respectivement avec les milieux* B' *et* C' *de* AC *et de* AB.



Démontrons par exemple que $C'c_1 = C'c_2$, ou, puisque c_2Mc_1 est rectangle, que $MC'c_1$ est isoscèle, ou enfin que angle $C'c_1M =$ angle $C'Mc_1$.

On a

$$C'c_1M = c_1Ba_1 + Ba_1c_1 = C'B'A' + Ba_1c_1;$$

c'est-à-dire que, si p et α sont les points où Ma_1 et BC

coupent le cercle des neuf points, l'angle $C'c_1M$ a pour mesure $\frac{1}{2}$ C'MA' $+ \frac{1}{2}$ MA' $+ \frac{1}{2}$ $p\alpha$.

L'angle $C'Mc_1$ a pour mesure $\frac{1}{2}$ C'M $+ \frac{1}{2}$ MA'p ou $\frac{1}{2}$ C'MA' $+ \frac{1}{2}$ A'p.

Mais comme par hypothèse dans le triangle rectangle a_1Ma_2 on a $a_1A' = A'M$, les 2 angles $A'a_1M$, a_1MA' sont égaux ; donc leurs mesures $\frac{1}{2}$MA' $+ \frac{1}{2}$ $p\alpha$ et $\frac{1}{2}$ A'p sont égales.

La mesure de $C'Mc_1$ est donc $\frac{1}{2}$ C'MA' $+ \frac{1}{2}$ MA' $+ \frac{1}{2}$ $p\alpha$, c'est-à-dire la même que celle de $C'c_1M$. Ces deux angles étant égaux, le théorème est démontré.

XXIX

Soit un triangle ABC ;

Soient l_a *le plus court chemin entre un point* O *de son plan et le sommet* A *après avoir touché* BC, l_b *le plus court chemin entre* O *et* B *après avoir touché* AC, l_c, *etc.* ;

Trouver : 1° Le point O *pour lequel* $l_a + l_b + l_c$ *est un minimum ;*

2° Le lieu des points pour lesquels la somme $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2$ *est égale à un carré donné ;*

3° Le point pour lequel cette somme de carrés est minima.

Ces questions paraissent fort complexes, mais une remarque très simple va en donner la solution immédiate.

Soient A', B', C' les symétriques des sommets par rapport aux côtés opposés ; on a évidemment

$$l_a = OA'$$
$$l_b = OB'$$
$$l_c = OC'$$

de sorte que le point O pour lequel $l_a + l_b + l_c$ est un minimum est le point pour lequel la somme des distances aux trois points A', B', C' est minimum ; c'est comme l'on sait le point d'où l'on voit les trois côtés de A'B'C' sous

le même angle si aucun des angles de ce triangle n'est supérieur à 120 degrés, etc. Le lieu des points pour lesquels $l_a + l^b + l_c^2$ est égal à un carré donné est une circonférence qui a pour centre le centre de gravité du triangle A'B'C'. ce centre de gravité est le point du plan pour lequel la somme $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2$ est minimum.

Nous engageons les élèves à discuter ces problèmes.

Le minimum de $l_a + l_b + l_c$ est :

$$\sqrt{2T\sqrt{3} + \frac{1}{2}\left[a^2 + b^2 + c^2 + \left(\frac{4S}{R}\right)^2\right]}$$

T, S, R représentant la surface de A'B'C', la surface de ABC et le rayon de cercle circonscrit à ABC;

Le minimum de $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2$ est :

$$\frac{1}{3}\left[a^2 + b^2 + c^2 + \left(\frac{4S}{R}\right)^2\right].$$

PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR

ET PLUS PETIT MULTIPLE COMMUN DES NOMBRES FRACTIONNAIRES

Par M. **P. Barrieu,** professeur au Lycée de Mont-de-Marsan.

(*Suite*, Voir p. 54.)

Théorème VI. — *Si l'on multiplie ou si l'on divise plusieurs fractions par un même nombre, entier ou fractionnaire, leur plus grand commun diviseur et leur plus petit multiple commun sont multipliés ou divisés par ce nombre.*

Considérons d'abord les fractions irréductibles $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$ ..., et voyons ce que devient leur plus grand commun diviseur quand on multiplie tous les numérateurs par un nombre premier α.

Si le facteur premier α n'est contenu dans aucun des dénominateurs, les fractions $\frac{a\alpha}{b}$, $\frac{a'\alpha}{b'}$, $\frac{a''\alpha}{b''}$, . . . sont irréductibles.

Mais le facteur premier α a été introduit dans tous les numérateurs; donc le plus grand commun diviseur des numérateurs est multiplié par α, tandis que le plus petit multiple commun des dénominateurs n'a pas changé. Le plus grand commun diviseur des fractions est donc multiplié par α.

Si au contraire le facteur premier α entre dans un ou plusieurs des dénominateurs, les fractions $\frac{a\alpha}{b}$, $\frac{a'\alpha}{b'}$, $\frac{a''\alpha}{b''}$, . . . réduites à leur plus simple expression, conformément à la règle du n° 1, n'auront plus α facteur commun des numérateurs, et d'autre part l'exposant de α aura diminué d'une unité dans tous les dénominateurs. Le plus grand commun diviseur des numérateurs n'aura donc pas changé, tandis que le plus petit multiple commun des dénominateurs aura été divisé par α. Donc le plus grand commun diviseur des fractions sera encore multiplié par α.

Ainsi dans tous les cas, en multipliant tous les numérateurs par le facteur premier α, on multiplie le plus grand commun diviseur des fractions par α.

Si maintenant, après avoir réduit à leur plus simple expression les fractions $\frac{a\alpha}{b}$, $\frac{a'\alpha}{b'}$, $\frac{a''\alpha}{b''}$, . . . , nous multiplions de nouveau tous les numérateurs par α, ou par tout autre facteur premier, le plus grand commun diviseur des fractions sera de nouveau multiplié par α, ou par cet autre facteur premier, et ainsi de suite.

Il résulte de là que, si nous multiplions tous les numérateurs par les facteurs premiers qui composent un entier p, le plus grand commun diviseur des fractions sera multiplié par p.

On démontrerait de même que si l'on multiplie tous les dénominateurs par un entier q, le plus grand commun diviseur des fractions est divisé par q.

On a donc

$$\mathrm{D}\left(\frac{ap}{bq}, \frac{a'p}{b'q}, \frac{a''p}{b''q}, \ldots\right) = \frac{p}{q}.\ \mathrm{D}\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots\right)$$

et, en remplaçant les fractions irréductibles par les frac-

tions égales :

$$D\left(\frac{A \cdot P}{B \cdot Q}, \frac{A' \cdot P}{B' \cdot Q}, \frac{A'' \cdot P}{B'' \cdot Q}, \ldots\right) = \frac{P}{Q} \cdot D\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right). \quad (9)$$

C. Q. F. D.

On démontrerait de la même manière l'identité

$$m\left(\frac{A.P}{B.Q}, \frac{A'.P}{B'.Q}, \frac{A''.P}{B''.Q}, \ldots\right) = \frac{P}{Q} \cdot m\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right). \quad (10)$$

Corollaire I. — *Si l'on divise plusieurs fractions par leur plus grand commun diviseur, les quotients ainsi obtenus sont premiers entre eux.*

En effet, d'après la définition même du diviseur, ces quotients sont entiers, et de plus leur plus grand commun diviseur est l'unité puisqu'il est égal au plus grand commun diviseur des fractions divisé par lui-même.

Corollaire II. — *Si l'on divise le plus petit multiple commun de plusieurs fractions par chacune d'elles, les quotients ainsi obtenus sont premiers entre eux.*

En effet. posons

$$\mu = m\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right)$$

nous avons d'après le théorème VI

$$D\left(\frac{\mu B}{A}, \frac{\mu B'}{A'} \cdot \frac{\mu D''}{A''}, \ldots\right) = \mu \cdot D\left(\frac{B}{A}, \frac{B'}{A'}, \frac{B''}{A''}, \ldots\right)$$

$$= \frac{\mu}{m\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right)} \text{(v.th.V)}$$

$$= 1$$

C. Q. F. D.

Théorème VII. — *Le plus grand commun diviseur de plusieurs fractions est égal à un nombre quelconque, entier ou fractionnaire, divisé par le plus petit multiple commun des quotients obtenus en divisant ce nombre par chacune des fractions.*

En effet, on a d'après le théorème VI :

$$m\left(\frac{K \cdot B}{A}, \frac{K \cdot B'}{A'}, \frac{K \cdot B''}{A''}, \ldots\right)$$

$$= K \cdot m\left(\frac{B}{A}, \frac{B'}{A'}, \frac{B''}{A''}, \ldots\right)$$

$$= \frac{K}{D\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}\right)} \text{ ; (Voir théorème V)}$$

d'où

$$D\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right)$$
$$= \frac{K}{m\left(\frac{K \cdot B}{A} \cdot \frac{K \cdot B'}{A'}, \frac{K \cdot B''}{A''}, \ldots\right)}. \qquad (11)$$

Corollaire I. — *Le plus grand commun diviseur de plusieurs fractions est égal à un multiple commun quelconque* M *divisé par le plus petit multiple commun des quotients obtenus en divisant* M *par chacune des fractions.*

Car en faisant $K = M$ dans la formule (11) on a

$$D\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right)$$
$$= \frac{M}{m\left(\frac{M \cdot B}{A}, \frac{M \cdot B'}{A'}, \frac{M \cdot B''}{A''}, \ldots\right)}. \qquad (12)$$

Corollaire II. — *Le plus grand commun diviseur de* n *fractions est égal à leur produit divisé par le plus petit multiple commun des produits obtenus en combinant ces fractions* (n — 1) *à* (n — 1).

Car, en prenant pour K le produit $P = \frac{A}{B} \cdot \frac{A'}{B'} \cdot \frac{A''}{B''}, \ldots$

on a

$$D\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right) = \frac{P}{m\left(\frac{P \cdot B}{A}, \frac{P \cdot B'}{A'}, \frac{P \cdot B''}{A''}, \ldots\right)}$$
$$= \frac{P}{m\left(\frac{P}{\frac{A}{B}}, \frac{P}{\frac{A'}{B'}}, \frac{P}{\frac{A''}{B''}}, \ldots\right)} \qquad (13)$$

Théorème VIII. — *Le plus petit multiple commun de plusieurs fractions est égal à un nombre quelconque, entier ou frac-*

tionnaire, divisé par le plus grand commun diviseur des quotients obtenus en divisant ce nombre par chacune des fractions.

En effet, on a, d'après le théorème VI,

$$\begin{aligned} D\left(\frac{K \,.\, B}{A}, \frac{K \,.\, B}{A'}, \frac{K \,.\, B}{A''} \cdots\right) &= K \,.\, D\left(\frac{B}{A}, \frac{B'}{A'}, \frac{B''}{B''}, \cdots\right) \\ &= \frac{K}{m\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \cdots\right)}; \end{aligned}$$

d'où

$$m\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right) = \frac{K}{D\left(\frac{K.B}{A}, \frac{K.B'}{A'}, \frac{K.B''}{A''}, \ldots\right)} \quad (14)$$

Corollaire I. — *Le plus petit multiple commun de plusieurs fractions est égal à un multiple commun quelconque M divisé par le plus grand commun diviseur des quotients obtenus en divisant M par chacune des fractions.*

Car, pour $K = M$, l'identité (14) devient

$$m\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right) = \frac{M}{D\left(\frac{M.B}{A}, \frac{M.B'}{A'}, \frac{M.B''}{A''}, \ldots\right)} \quad (15)$$

Corollaire II. — *Pour qu'un multiple commun à plusieurs fractions soit le plus petit, il faut et il suffit qu'en divisant ce multiple par chacune des fractions les quotients obtenus soient premiers entre eux dans leur ensemble.*

En effet, l'égalité (15) montre que pour que l'on ait

$$M = m\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}\right),$$

il faut et il suffit que

$$D\left(\frac{M.B}{A}, \frac{M.B'}{A'}, \frac{M.B''}{A''}, \ldots\right) = 1$$

ou, en d'autres termes, que les quotients $\frac{M.B}{A}$, $\frac{M.B'}{A'}$, $\frac{M.B''}{A''}$, ... soient premiers entre eux.

Corollaire III. — *Le plus petit multiple commun de* n *fractions est égal à leur produit divisé par le plus grand commun diviseur des produits obtenus en combinant ces fractions* (n — 1) *à* (n — 1).

En effet, en prenant pour K le produit

$$P = \frac{A}{B} \cdot \frac{A'}{B'} \cdot \frac{A''}{B''}, \ldots$$

on a

$$m\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right) = \frac{P}{D\left(\frac{P.B}{A}, \frac{P.B'}{A'}, \frac{P.B''}{A''}, \ldots\right)}$$

$$= \frac{P}{D\left(\frac{\frac{P}{A}}{B}, \frac{\frac{P}{A'}}{B'}, \frac{\frac{P}{A''}}{B''}, \ldots\right)} \qquad (16)$$

Théorème IX. — *Le produit de* n *fractions est égal au plus petit multiple commun des produits obtenus en combinant ces fractions* i *à* i *multiplié par le plus grand commun diviseur des produits obtenus en les combinant* (n — i) *à* (n — i).

En effet, considérons les produits obtenus en combinant n fractions i à i; le produit P des n fractions est évidemment un multiple commun des produits ainsi obtenus; et les produits obtenus en divisant P par chacun d'eux sont les produits des n fractions combinées $(n - i)$ à $(n - i)$. Si donc nous convenons de désigner par $m\ (C_n^i)$, $D\ (C_n^i)$ le plus petit multiple commun et le plus grand commun diviseur des produits obtenus en combinant n fractions i à i, nous aurons, d'après le théorème VIII :

$$m\ (C_n^i) = \frac{P}{D\ (C_n^{n-i})};$$

d'où

$$P = m\ (C_n^i).\ D\ (C_n^{n-i}). \qquad (17)$$

Théorème X. — *Pour qu'un diviseur commun à plusieurs fractions soit le plus petit, il faut et il suffit qu'en divisant chacune des fractions par ce diviseur, les quotients obtenus soient premiers entre eux dans leur ensemble.*

En effet, soit δ un diviseur commun quelconque des fractions $\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots$ Nous avons, d'après le théorème VI,

$$D\left(\frac{A}{B.\delta}, \frac{A'}{B'.\delta'}, \frac{A''}{B''.\delta''}, \ldots\right) = \frac{D\left(\frac{A}{B}, \frac{A}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right)}{\delta}$$

Donc pour que $\delta = D\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right)$, il faut et il suffit que

$$D\left(\frac{A}{B.\delta}, \frac{A'}{B'.\delta}, \frac{A''}{B''.\delta}, \ldots\right) = 1$$

ou, en d'autres termes, que les quotients $\frac{A}{B.\delta}, \frac{A'}{B'.\delta}, \frac{A''}{B''.\delta}, \ldots$ soient premiers entre eux.

Théorème XI. — *Si l'on élève plusieurs fractions à la puissance* p, *leur plus grand commun diviseur et leur plus petit multiple commun sont élevés à cette puissance.*

En effet, si les fractions $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \ldots$ sont irréductibles, les fractions $\frac{a^p}{b^p}, \frac{a'^p}{b'^p}, \ldots$ le sont aussi, et l'on a, en appliquant à ces fonctions le théorème I,

$$D\left(\frac{a^p}{b^p}, \frac{a'^p}{b'^p}, \ldots\right) = \frac{D(a^p, a'^p, \ldots)}{m(b^p, b'^p, \ldots)} \qquad (10)$$

$$= \frac{\{D(a, a', \ldots)\}^p}{\{m(b, b', \ldots)\}^p}$$

$$= \left\{D\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \ldots\right)\right\}^p$$

et, en remplaçant les fractions irréductibles par les fractions égales,

$$D\left(\frac{A^p}{B^p}, \frac{A'^p}{B'^p}, \ldots\right) = \left\{D\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \ldots\right)\right\}^p \qquad (18)$$

On démontrerait de même que

$$m\left(\frac{A^p}{B^p}, \frac{A'^p}{B'^p}, \ldots\right) = \left\{m\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \ldots\right)\right\}^p \qquad (19)$$

Conclusion. — De l'étude précédente il résulte que les propriétés du plus grand commun diviseur et du plus petit multiple commun sont les mêmes pour les nombres entiers et pour les nombres fractionnaires. On pourra donc faire usage de ces propriétés sans s'occuper de la nature des nombres sur lesquels on opère. — En particulier, quelles que soient les valeurs entières ou fractionnaires aux lettres a, b, c, ... on aura toujours les identités suivantes :

$$D(a,b,c,\ldots) = D[D(a,b),c,\ldots] \qquad m(a,b,c,\ldots) = m[m(a,b),c,\ldots]$$

$$D(a,b,c,\ldots)\,.\,m\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c},\ldots\right) = 1 \qquad m(a,b,c,\ldots)\,.\,D\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c},\ldots\right) = 1$$

$$D(ak,bk,ck,\ldots) = K\,.\,D(a,b,c,\ldots) \qquad m(ak,bk,ck,\ldots) = K\,.\,m(a,b,c,\ldots)$$

$$D(a,b,c,\ldots) = \frac{M}{m\left(\frac{M}{a},\frac{M}{b},\frac{M}{c},\ldots\right)} \qquad m(a,b,c,\ldots) = \frac{M}{m\left(\frac{M}{a},\frac{M}{b},\frac{M}{c},\ldots\right)}$$

$$D(a,b,c,\ldots) = \frac{P}{m\left(\frac{P}{a},\frac{P}{b},\frac{P}{c},\ldots\right)} \qquad m(a,b,c,\ldots) = \frac{P}{D\left(\frac{P}{a},\frac{P}{b},\frac{P}{c},\ldots\right)}$$

$$D(a^p,b^p,c^p,\ldots) = \left\{D(a,b,c,\ldots)\right\}^p \qquad m(a^p,b^p,c^p,\ldots) = \left\{m(a,b,c,\ldots)\right\}^p$$

$$P = D(C_n^i)\,.\,m(C_n^{n-i}).$$

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Besançon.

On donne un cercle en papier très mince et très flexible, de rayon OA $= 1$. Dans ce cercle, on découpe un secteur AOB avec lequel on forme un cône de révolution en réunissant les rayons extrêmes OA, OB. On demande : 1° quel est en degrés, minutes et secondes l'angle AOB quand AB $= 1$, et quelle est alors la surface du secteur; 2° les expressions générales de la surface latérale, de la surface totale et du volume du cône, ainsi que la position de son centre de gravité; comment varient ces expressions avec l'arc AB. Calculer les valeurs pour AB $= 1$.

— On donne un rectangle ABCD; on fait tourner le triangle ADC autour de la diagonale AC jusqu'à ce qu'il

vienne en D'AC, en faisant un angle x avec ABC. On demande d'exprimer en fonction de x : 1° le volume du tétraèdre ABCD'; 2° la surface totale; 3° la distance du sommet D' au centre de gravité de la base opposée.

— Un trapèze ABB'A'. dont les angles A' et B' sont droits, est défini par les trois dimensions $AA' = a$; $BB' = b$; $B'A' = c$; on prend sur A'B' un point M tel que $\frac{MA'}{MB'} = \frac{a}{b}$; on tire MA et MB; calculer la surface du triangle ABM et le volume engendré par ce triangle en tournant autour de A'B'. Déterminer ensuite les trois quantites a, b, c, de façon : 1° que l'angle AMB soit droit; 2° que la surface ABM soit égale a m^2; 3° que le volume engendré par le triangle soit égal à $\frac{2}{3}\pi n^3$.

Lille.

Un corps du poids de 75 kilog. tombe d'une hauteur de $1^m,30$ sur un sol qui oppose à la continuation de son mouvement une résistance constante de 5000 kilog. Jusqu'à quelle hauteur s'y enfoncera-t-il?

Marseille.

Résoudre et construire un triangle rectangle connaissant le périmètre et la hauteur abaissée sur l'hypoténuse. Discussion.

— On a un triangle ABC d'une surface de 16 mètres carrés; on prend sur la base AC un point D tel que $AD = \frac{AC}{4}$, et on tire BD; sur la droite DB, on prend un point E tel que $DE = \frac{DB}{4}$; puis on mène AE, EC. Calculer la surface des triangles AEC, AEB, BEC.

Montpellier.

On donne dans un triangle la surface S, l'angle C, et l'on sait que $a + b - c = k$; calculer les côtés a, b, c et les angles A, B.

Toulouse.

Par les extrémités de deux rayons OB. OC d'une circonférence donnée, on mène les tangentes BA, CA, qui se coupent en A. Exprimer en fonction du rayon R et de la projection BE de l'arc CFB sur OB les volumes des corps engendrés : 1° par le segment BCFG : 2° par le triangle BOC ; 3° par le triangle curviligne BFCA, lorsque ces trois figures tournent autour de OB. Cas particulier où BE est égal à BO, c'est-à-dire où l'angle BOC est droit. On représentera BE par a.

Grenoble.

Étudier la variation de la fraction

$$\frac{x^2 - 1}{5x^2 + 4x},$$

et déterminer en particulier : 1° les maxima et minima de cette fonction ; 2° les valeurs de x pour lesquelles la fonction est négative.

Nancy.

Soit ABC un triangle rectangle isoscèle, l'angle B étant droit ; par le point A, on mène dans le plan du triangle la droite AD, qui fait avec AB l'angle α ; on demande, en fonction de α, le volume engendré par le triangle tournant autour de AD. — Discussion.

Dijon.

Résoudre l'équation

$$\sin 5x = \sin 7x.$$

— Deux cercles variables sont respectivement inscrits dans un angle donné et sont opposés au sommet, et la somme de leurs aires reste égale à la constante S. Cela posé, on demande d'exprimer en fonction de α et de S la valeur de la distance mutuelle de leurs centres quand elle est minima.

VARIÉTÉS

*Nous donnerons très prochainement à nos lecteurs une analyse de l'ouvrage important dont M. Maximilien Marie vient de faire paraître les quatre premiers volumes, sur l'*Histoire des sciences mathématiques et physiques. *En attendant, nous reproduisons ici une partie relative à la troisième période, d'*Hipparque *à* Diophante, *sur l'algèbre des géomètres grecs.*

Voici, il nous semble, comment l'algèbre pouvait, dès l'antiquité, être instituée dans son office essentiel, qui est de donner le moyen de formuler des lois, sans qu'il fût nécessaire pour cela de recourir à l'intervention d'aucun artifice étranger.

Proposition I.

On obtient le rapport de deux grandeurs de même espèce au moyen des opérations qui en fournissent la plus grande commune mesure.

Si deux grandeurs A et B ont pour plus grande commune mesure une grandeur M, et que cette plus grande commune mesure y soit respectivement contenue a fois et b fois, A est a fois la b^{me} partie de B, et le rapport de A à B est $\frac{a}{b}$. En même temps, le rapport de B à A est $\frac{b}{a}$.

Si les opérations instituées pour obtenir la plus grande commune mesure entre A et B devaient se prolonger indéfiniment, comme il arrive lorsque l'on compare la diagonale d'un carré à son côté, les deux grandeurs A et B seraient incommensurables, et leur rapport ne pourrait pas être formulé exactement.

Définition. — Le rapport de deux grandeurs A et B est dit égal à celui de deux autres grandeurs C et D, lorsque les deux séries, finies ou indéfinies, d'opérations instituées pour obtenir la plus grande commune mesure entre A et B d'une

part, entre C et D de l'autre, fournissent la même suite de quotients, de sorte que deux restes de mêmes rangs soient toujours respectivement contenus le même nombre de fois dans les restes précédents.

Proposition II.

Si l'on arrête successivement les opérations de la recherche de la plus grande commune mesure entre deux grandeurs A et B après la première, après la seconde, etc., et que l'on prenne les expressions approchées du rapport, en considérant successivement comme nuls le premier reste, le second, etc., ces expressions sont alternativement trop petites ou trop grandes.

En effet, supposons que l'on ait trouvé, par exemple

$$A = 2B + R,$$
$$B = 3R + R_1,$$
$$R = 4R_1 + R_2,$$
$$R_1 = 2R_2 + R_3,$$
$$R_2 = 5R_3 + R_4;$$

négligeons le reste R_4, et concevons la grandeur A' qui, comparée à B, donnerait

$$A' = 2B + R',$$
$$B = 3R' + R'_1,$$
$$R' = 4R'_1 + R'_2,$$
$$R'_1 = 2R'_2 + R'_3,$$
$$R'_2 = 5R'_3.$$

Ces égalités donnent successivement

$$R'_1 = 10R'_3 + R'_3 = 11R'_3,$$
$$R' = 44R'_3 + 5R'_3 = 49R'_3,$$
$$B = 147R'_3 + 11R'_3 = 158R'_3,$$
$$A' = 316R'_3 + 49R'_3 = 365R'_3.$$

A' vaudrait donc 365 fois la 158e partie de B.

Négligeons maintenant le reste R_3, concevons la grandeur A'', qui comparée à B donnerait

$$A'' = 2B + R'',$$
$$B = 3R'' + R''_1,$$
$$R'' = 4R''_1 + R''_2.$$
$$R''_1 = 2R''_2.$$

On tirera de ces égalités

$$R'' = 9R''_2,$$
$$B = 29R''_2,$$
$$A'' = 67R''_2;$$

de sorte que le rapport de A″ à B serait $\frac{67}{29}$.

Mais, si l'on s'était servi des égalités primitives, le calcul étant identiquement le même, on aurait trouvé

$$A = 365R_3 + 67R_4$$

et

$$B = 158R_3 + 29R_4;$$

or, le rapport

$$\frac{365R_3 + 67R_4}{158R_3 + 29R_4},$$

étant formé des rapports

$$\frac{365R_3}{158R_3} \text{ et } \frac{67R_4}{29R_4}$$

ajoutés termes à termes, est compris entre les deux ; la valeur exacte du rapport est donc comprise entre deux de ses valeurs approchées consécutives.

Cela posé, la première valeur approchée du rapport fournie par l'annulation du premier reste R serait évidemment trop petite ; donc la seconde serait trop grande, la troisième trop petite, etc.

Plus généralement les valeurs approchées du rapport fournies par l'annulation des restes de rangs impairs, sont trop petites et les autres trop grandes.

Proposition III.

Toutes les valeurs approchées du rapport sont irréductibles, puisque chacune d'elles est fournie par les nombres de fois que deux grandeurs commensurables contiennent respectivement leur plus grande commune mesure.

Proposition IV.

Considérons trois valeurs approchées consécutives du rapport, et, pour cela, supposons que, si l'on eût continué les opérations commencées sur A et B, on eût trouvé

$$R_3 = 6R_4 + R_5;$$

la troisième valeur approchée du rapport que l'on obtiendrait en négligeant R_5, se formera en remplaçant R_3 par $6R_4$ dans l'expression

$$\frac{365R_3 + 67R_4}{158R_3 + 29R_4},$$

ce qui donnera

$$\frac{365 \times 6R_4 + 67R_4}{158 \times 6R_4 + 29R_4},$$

ou

$$\frac{365 \times 6 + 67}{158 \times 6 + 29};$$

d'où résulte la règle suivante :

Si $$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \quad \frac{P_n}{Q_n} \quad \text{et} \quad \frac{P_{n+1}}{Q_{n-1}}$$

représentent trois valeurs consécutives approchées du rapport, et si a désigne le nombre de fois que le dernier reste employé est contenu dans l'avant-dernier,

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_n + P_{n-1}}{Q_n a_n + Q_{n-1}}.$$

Proposition V.

On conclut de là, par des opérations portant simplement sur des nombres entiers, que la différence entre deux valeurs consécutives approchées du rapport,

$$\frac{P_n}{Q_n} \quad \text{et} \quad \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

est toujours

$$\frac{1}{Q^n \cdot Q_{n-1}},$$

qu'elle va donc toujours en diminuant ; que, par conséquent, une valeur approchée de rang impair est moindre qu'une valeur approchée de rang pair ; que les valeurs approchées de rang impair vont en augmentant et les autres en diminuant ; enfin que l'erreur commise en prenant une valeur approchée du rapport pour sa valeur exacte, décroît indéfiniment lorsque le rang de cette valeur approchée croît suffisamment.

(M. MARIE, *Histoire des Sciences math. et phys.*, tome Ier.)

QUESTIONS PROPOSÉES

144. — Soit ABC un triangle, A' et A'' les pieds sur BC des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle A ; B' et B'', C' et C'' les points analogues sur AC et sur AB. Soient α' et α'' les symétriques de A' et A'' par rapport au milieu de BC ; β' et β'' les symétriques de B' et B'' par rapport au milieu de AC ; γ' et γ'' les symétriques de C' et C'' par rapport au milieu de AB. Démontrer :

1° Que les trois circonférences décrites sur $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ comme diamètres ont même axe radical ;

2° Qu'il en est de même des trois circonférences décrites sur $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ comme diamètres ;

3° Que ces trois dernières circonférences se coupent, se touchent ou ne se coupent pas, suivant que ABC est acutangle, rectangle ou obtusangle ; lorsqu'elles se touchent, le point de contact est le point symétrique du sommet de l'angle droit par rapport au milieu de l'hypoténuse ;

4° Lorsqu'elles se coupent ou se touchent, les distances d'un point d'intersection ou du point de contact aux trois sommets sont proportionnelles aux côtés opposés ;

5° Les axes radicaux des deux groupes de trois circonférences se coupent au centre du cercle circonscrit au triangle ABC. *(E. Lemoine.)*

145. — Démontrer qu'une corde Δ, normale à une parabole P, est égale à quatre fois la portion de la tangente Δ' parallèle à Δ, cette portion étant comptée depuis le point de contact jusqu'au point de rencontre de Δ' avec la directrice. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 9568-4

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 25.) 75

XXX

Dans un triangle ABC *déterminer un point* O *tel que si par ce point on mène des parallèles aux trois côtés, les longueurs des segments des côtés compris entre les parallèles soient proportionnelles à des longueurs données* q, r, s.

En adoptant les notations du problème XXVII on doit avoir

$$\frac{B_cA_b}{q} = \frac{A_cC_a}{r} = \frac{A_cB_a}{s}.$$

Première solution. — Posons

$$A_cA_b = x,$$
$$B_aB_c = y,$$
$$C_aC_b = z;$$

la condition du problème devient

$$\frac{a-x}{q} = \frac{b-y}{r} = \frac{c-z}{s} \qquad (1)$$

et comme l'on a d'ailleurs

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 2, \qquad (2)$$

on obtient immédiatement x, y, z et le problème peut être considéré comme résolu.

Deuxième solution. — Je fais un triangle quelconque $O'B'_cC'_b$ semblable à OB_cC_b, c'est-à-dire à ACB.

Par O′ je mène une parallèle à $B'_cC'_b$ et sur cette parallèle je prends A'_c et A'_b tels que si la parallèle à $O'B'_c$ menée par A'_c coupe $O'C'_b$ en C'_a, et que la parallèle à $O'C'_b$ menée par A'_b coupe $O'B'_c$ en B'_a, on ait

$$\frac{B'_cC'_b}{A'_cC'_a} = \frac{q}{r} \qquad \frac{B'_cC'_b}{A'_bB'_a} = \frac{q}{s},$$

ces deux parallèles se couperont en A′, et il n'y aura plus qu'à prendre dans ABC le point O homologue de O′ dans A′B′C′.

Dans ces deux solutions nous avons admis implicitement que x, y, z sont positifs ; mais en leur supposant des signes quelconques, il y a d'autres points du plan qui répondent à la question, et nous engageons les élèves à faire l'intéressante discussion qui permet de les trouver tous et de fixer leurs positions.

XXXI

Construire un triangle connaissant les longueurs l_a, l_b, l_c *des segments compris entre les côtés, des parallèles aux trois côtés menées par le centre du cercle inscrit à ce triangle.*

Ce problème est la question 863, que j'ai posée dans les *Nouvelles Annales*, en 1868. Voici une solution par le calcul ; la solution insérée même année, page 451, était une solution géométrique.

Soient x, y, z les trois côtés BC, AC, AB ; il est facile de calculer l_a, l_b, l_c en fonction de x, y, z ; on trouve

$$l_a = \frac{x(y+z)}{x+y+z} = \frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}};$$

$$l_b = \frac{y(x+z)}{x+y+z} = \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}{\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}};$$

$$l_c = \frac{z(x+y)}{x+y+z} = \frac{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}};$$

en posant

$$\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy} = K$$

on tire de là

$$\frac{1}{x} = \frac{K}{2}(l_b + l_c - l_a);$$

$$\frac{1}{y}=\frac{K}{2}(l_c+l_a-l_b);$$
$$\frac{1}{z}=\frac{K}{2}(l_a+l_b-l_c);$$

substituant dans la valeur de K, on en tire

$$K=\frac{4}{2l_bl_c+2l_al_c+2l_al_b-l_a^2-l_b^2-l_c^2},$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{1}{2}\,\frac{2l_bl_c+2l_al_c+2l_al_b-l_a{}^2-l_b{}^2-l_c{}^2}{l_b+l-l_a}\\ y&=\text{etc.}\end{aligned}\right\}(1)$$

On traiterait d'une façon analogue le cas où l'on donnerait les longueurs l'_a, l'_b, l'_c des parallèles menées par le centre du cercle ex-inscrit tangent au côté BC, etc.

On aurait ainsi

$$(2)\left\{\begin{aligned} x&=\frac{1}{2}\,\frac{2l'_al'_b+2l'_al'_c-2l'_bl'_c+l'^2_a+l'^2_b+l'^2_c}{l'_a+l'_b+l}\\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{M_a}{l'_a+l'_b+l'_c}\\ y&=\frac{1}{2}\cdot\frac{M_a}{l'_a+l'_b-l'_c}\\ z&=\frac{1}{2}\cdot\frac{M_a}{l'_a+l'_c-l'_b}.\end{aligned}\right.$$

etc.

Remarquons que si l'on pose

$$A=\frac{1}{2}(l_c+l_b-l_a),$$

$$B=\frac{1}{2}(l_a+l_c-l_b),$$

$$C=\frac{1}{2}(l_b+l_a-l_c),$$

On peut mettre les formules (1) sous la forme

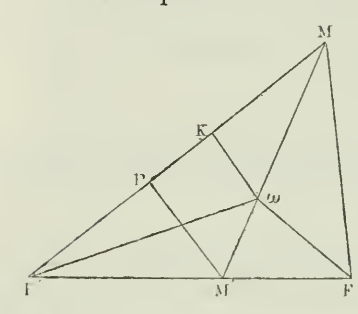
$$x=\frac{AB+AC+CB}{A}=B+C+\frac{CB}{A},$$
$$y=\frac{AB+AC+CB}{B}=A+C+\frac{AC}{B},$$

et faire une remarque analogue pour les formules (2).

XXXII

Dans une ellipse la projection, sur les rayons vecteurs partant des foyers de la partie de la normale comprise entre le point de la courbe et le grand axe, est constante.

Soit M le point de la courbe; MM′ la normale sur M terminée en M′ sur le grand axe; F et F′ les deux foyers; ω le centre du cercle inscrit au triangle F′MF; K et P les projections de ω et de M′ sur F′M; $2a$, $2b$, $2c$, le grand axe, le petit axe et la distance focale, on a



$$\frac{MK}{MP} = \frac{M\omega}{MM'}.$$

Mais comme Fω et F′ω sont les bissectrices des angles en F et en F′ des triangles M′FM, M′F′M, on a

$$\frac{M\omega}{\omega M'} = \frac{MF}{M'F} = \frac{MF'}{M'F'};$$

d'où

$$\frac{M\omega}{MM'} = \frac{MF}{MF + M'F} = \frac{MF'}{MF' + M'F'}.$$

d'où encore

$$\frac{M\omega}{MM'} = \frac{MF + MF'}{MF + M'F + MF' + M'F'} = \frac{2a}{2a + 2c}$$

On a donc

$$\frac{MK}{MP} = \frac{a}{a + c}. \qquad (1)$$

Mais MK est la tangente menée de M au cercle inscrit, c'est donc la moitié du périmètre du triangle MF′F diminuée de FF′ ou

$$\frac{1}{2}(2a + 2c) - 2c$$

ou

$$a - c;$$

on a enfin alors de (1)

$$MP = \frac{(a - c)(a + c)}{a} = \frac{b^2}{a},$$

Ce qu'il fallait établir.

Une démonstration tout à fait analogue s'applique à l'hyperbole et à la parabole.

XXXIII

Nous allons énoncer ici quelques propriétés du triangle dans un ordre où leur démonstration est assez facile, et nous engageons les élèves à prendre ces énoncés comme exercice.

Soit ABC *un triangle quelconque ;*

A', A'', A_1 *respectivement les pieds sur* BC *de la bissectrice intérieure de* CAB, *de la bissectrice extérieure du même angle et le point symétrique de* A *par rapport au milieu de* BC ;

B', B'', B_1, C', C'', C_1, *les points analogues par rapport aux autres côtés.*

Soit O *un point du plan,*

C_a *le point où la parallèle à* AB *menée par* O *coupe* AC,
B_a — — AC — — AB.

1° *Démontrer que si l'on a*

$$\frac{C_aC}{B_aB} = \frac{b^2}{c^2},$$

le point O *appartient soit à la droite* A_1A', *soit à la droite* A_1A'' ;

2° *Démontrer que les trois droites* A_1A'. B_1B', C_1C' *se coupent en un même point* ω ;

3° *Que les droites* A_1A'', B_1B'', C_1C' *se coupent en un même point* ω_c ; *les droites* A_1A'', B_1B', C_1C'' *en* ω_b ; *les droites* A_1A', B_1B'', C_1C'' *en* ω_a ;

4° *Que les droites* $A\omega_a$, $B\omega_b$, $C\omega_c$ *se coupent en* I ;

5° *Que les distances de* ω *aux trois côtés* BC, AC, AB *sont respectivement proportionnelles à* $b + c - \frac{bc}{a}$, $a + c - \frac{ac}{b}$, $a + b - \frac{ab}{c}$; *celles de* ω_a *aux mêmes côtés, à* $-\left(b + c + \frac{bc}{a}\right)$, $c - a + \frac{ac}{b}$, $b - a + \frac{ab}{c}$; *celles de* I, *à* $\frac{1}{a\,(ab + ac - bc)}$,

$$\frac{1}{b(ab+bc-ac)}, \quad \frac{1}{c(ac+cb-ab)};$$

6° *Que si par le point* ω *on mène des parallèles aux trois côtés. les parties de ces parallèles comprises entre deux côtés du triangle sont égales entre elles et à* $\frac{2abc}{ab+ac+bc}$; *soit* l *cette longueur;*

7° *Que les points* ω_a, ω_b, ω_c *jouissent de la même propriété que le point* ω, *les longueurs étant alors respectivement pour* ω_a, ω_b, ω_c $\frac{2abc}{ab+ac-bc} = l_a$, *etc ;*

(Les points ω, ω_a, ω_b, ω_c sont des points sur lesquels M. J. Neuberg a publié une note en 1881. (Voir *Mathesis*, 1881, page 149.)

8° *Que si nous formons le triangle qui a pour hauteurs* a, b, c, *les diamètres des cercles inscrits et ex-inscrits à ce triangle seront les longueurs* l, l_a, l_b, l_c ;

9° *Exprimer les distances de* ω, ω_a, ω_b, ω_c *aux trois côtés du triangle en fonction des hauteurs de* ABC, *par exemple la distance de* ω *à* BC *est :* $h_a \frac{h_b+h_c-h_a}{h_a+h_b+h_c}$, *etc. ;*

10° *Ce qui montre que l'on peut construire ou calculer les côtés d'un triangle connaissant les trois distances d'un des points* ω, ω_a, ω_b, ω_c *aux trois côtés;*

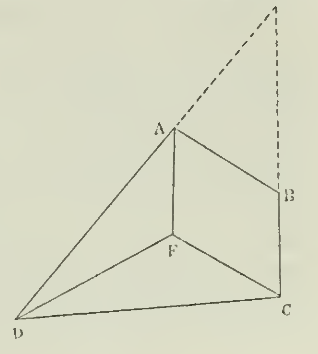
(problème peu commode à aborder directement d'une autre façon.)

11° *L'on peut calculer ou construire les trois côtés de* ABC *connaissant trois des longueurs* l, l_a, l_b, l_c, *qui ont entre elles la relation* $\frac{1}{l} = \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c}$, *et remarquer plusieurs formules entre autres* ; $a = \frac{l_b l_c}{l_b + l_c}$.

12° *Si l'on a la relation :* $ab = ac + bc$, ω *est sur* BA *au pied de la bissectrice de l'angle* ACB, ω_c *est rejeté à l'infini,* ω_a *et* ω_b *sont respectivement sur* AC et BC *aux pieds des bissectrices extérieures.*

XXXIV

Construire un quadrilatère ABCD *connaissant les quatre côtés* AB, BC, CD, DA *et l'angle que les deux côtés opposés* AD *et* BC *font entre eux.*



Par A je mène une parallèle à BC;

Par C je mène une parallèle à CAB;

Ces deux parallèles se coupent en E.

Je joins ED

Dans le triangle DAE je connais.

1° AD;

2° AE = BC comme côtés opposés du parallélogramme ABCE ;

3° L'angle compris DAE qui est l'angle que les deux côtés opposés AD et BC font entre eux.

Je puis donc le construire.

Je connais alors les trois côtés du triangle DEC; je le construis et je n'ai plus qu'à terminer le parallélogramme AECB. *(A suivre.)*

NOTE D'ALGÈBRE

La fraction rationnelle $\dfrac{ax + b}{a'x + b'}$ mérite, pour beaucoup de raisons, un chapitre spécial dans le cours d'algèbre élémentaire ; nous savons que déjà plusieurs professeurs se font un devoir d'exposer avec détail les propriétés spéciales de cette fonction simple; et nous nous proposons simplement de reproduire ici le programme de cette discussion, en insistant spécialement sur ce fait que les seules connaissances

préalablement exigées sont : la notion des grandeurs négatives, et la discussion de la fonction linéaire à une seule variable.

Cela posé, voici le programme de la discussion :

(a) Si $ab' - ba'$ n'est pas nul, l'expression rationnelle $\frac{ax + b}{a'x + b'}$ est variable avec x;

(b) En désignant par y cette expression, chaque valeur d'x produit une valeur d'y, finie ou infinie ; et, inversement, chaque valeur finie ou infinie que l'on donne à y produit une et une seule valeur d'x; il est utile de dire que x et y se correspondent *homographiquement;*

(c) La fonction y peut s'écrire sous la forme

$$K \cdot \frac{x - \alpha}{x - \alpha'},$$

ce qui montre : que la fonction a un *zéro* et un infini, que le passage par zéro est accompagné d'un changement de signe; que le passage par l'infini est aussi accompagné d'un changement de signe; que ces deux changements de signe sont en sens inverse l'un de l'autre : si l'un se fait de $+$ à $-$, l'autre se fait de $-$ à $+$;

(d) La fonction ne présente d'autre discontinuité que son passage par l'infini ; dans chacun des deux intervalles où la fonction est continue, la différence $y_2 - y_1$ garde le même signe, tant que $x_2 - x_1$ garde le même signe ; en d'autres termes, la fonction y a un seul sens de variation, pendant que x va en croissant de $- \infty$ à $+ \infty$.

Il en résulte que la fonction y prend une fois et une seule fois toute valeur positive ou négative, et peut, dans un grand nombre de questions, représenter utilement sous la forme

$$\frac{a\lambda + b}{a'\lambda + b'}$$

toute grandeur qui doit parcourir, sans omissions ni répétitions, toute l'échelle numérique, positive et négative.

(e) Enfin la relation

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$$

peut, par une division, s'écrire

$$y = \beta' + \frac{h}{x - \alpha'}$$

ou

$$(y - \beta')(x - \alpha') = h$$

d'où l'on conclut immédiatement, en coordonnées obliques ou rectangulaires, indifféremment, que les variations de la fonction y sont représentées par un tracé hyperbolique.

Nous ajouterons un seul mot : les variations de la fonction y mise sous la forme

$$\frac{a + \lambda a'}{1 + \lambda}$$

donnent un exemple heureusement choisi pour la discussion des solutions négatives, en traduisant, par les variations de λ, le déplacement continu d'un point sur une droite indéfinie.

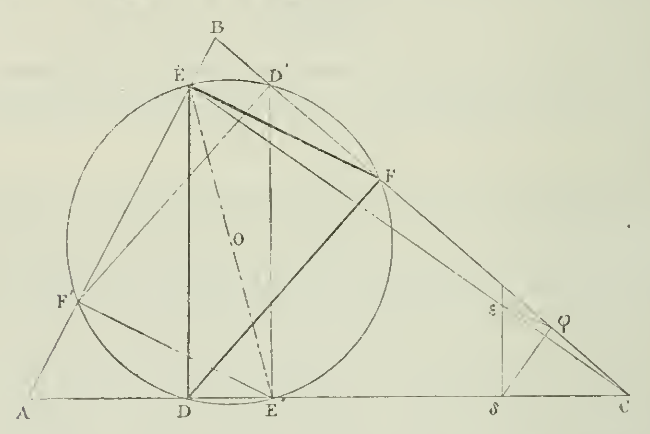
Le programme que nous venons de rédiger sera suivi de plusieurs autres sur des questions de mathématiques élémentaires ; nous avons surtout pour but de montrer comment, selon nous, ces diverses questions doivent être traitées, sans troubler l'ordre simple et logique des idées, de manière à préparer nos jeunes lecteurs à l'étude des mathématiques supérieures ; les principes et les règles de l'enseignement doivent être les mêmes partout ; les applications seules doivent changer et s'étendre de plus en plus, à mesure qu'on avance dans l'étude des sciences mathématiques. Il faut, dès l'origine, faire pénétrer dans les jeunes intelligences la conviction qu'il y a en tout des lois, des méthodes générales de recherche et de raisonnement, que les *ficelles* sont méprisables quand elles ne résultent pas d'une application *intensive* des principes. Dans les sciences mathématiques, surtout dans l'enseignement et l'étude de ces sciences, l'imagination joue un rôle utile et nécessaire, mais en subordonnant son influence à celle des méthodes générales ; ce qui suppose d'abord que ces méthodes, dites générales, ne doivent jamais comporter d'exceptions.

E. V.

QUESTION 5

Solution par M. Madiot, élève de l'Institution Sainte-Marie de Besançon.

A tout triangle ABC *on peut inscrire deux triangles ayant leurs côtés perpendiculaires à ceux de* ABC. *Ces deux triangles sont inscriptibles dans une circonférence ayant pour centre le centre des médianes antiparallèles de* ABC.



Traçons dans le triangle donné une droite $\delta\varphi$ perpendiculaire à l'un des côtés, à BC par exemple, et par les points φ et δ menons des perpendiculaires respectivement aux deux autres côtés.

Nous formons ainsi un triangle $\varepsilon\delta\varphi$ homothétique à l'un des triangles demandés, et le point C est un centre de similitude.

La droite $C\varepsilon$ rencontrant en E le côté AB, il n'y a plus qu'à mener des droites ED et EF parallèles à $\varepsilon\delta$ et à $\varepsilon\varphi$, puis à tirer DF.

La circonférence circonscrite au triangle DEF coupe en D', E', F' les côtés du triangle donné. Les angles EDE', FEF', DFD' étant droits, les points E et E', F et F', D et D' sont deux à deux diamétralement opposés et le triangle D'E'F'

a ses côtés égaux et parallèles à ceux de DEF; il a par conséquent ses côtés perpendiculaires à ceux de ABC.

On a DE′E = DFE comme angles inscrits dans un même segment.

Mais EFD = ABC, puisque ces angles ont leurs côtés perpendiculaires.

On a donc DE′E = ABC.

Les droites BC et EE′ sont donc antiparallèles par rapport à l'angle A, d'où il suit que le centre O de la circonférence étant sur le milieu de EE′ appartient à une droite antiparallèle à la médiane relative aux côtés BC par rapport à l'angle A.

Comme du reste ce point appartient de même à des antiparallèles à chacune des deux autres médianes, il se trouve à leur intersection commune.

QUESTION 43

Solution par M. Puig, élève au Lycée de Montpellier.

Trouver le maximum du produit $x^m y^n$, *sachant que les variables positives* x *et* y *sont liées par la relation*

$$x^p y^q + x^{p'} y^{q'} = K.$$

Supposons que l'on élève les quantités

$$x^p y^q, \; x^{p'} y^{q'}, \; x^m y^n,$$

respectivement aux puissances λ, λ', μ, vérifiant les conditions

$$\begin{aligned} p\lambda + p'\lambda' &= m\mu \\ q\lambda + q'\lambda' &= n\mu. \end{aligned} \qquad (1)$$

On sera alors ramené à trouver le maximum du produit

$$x^{m\mu} y^{n\mu},$$

ou

$$(x^p y^q)^\lambda \times (x^{p'} y^{q'})^{\lambda'},$$

de facteurs dont la somme est constante. On sait que, alors. on devra avoir

$$\frac{x^p y^q}{\lambda} = \frac{x^{p'} y^{q'}}{\lambda'}.$$

Or les quantités λ et λ' vérifiant les équations (1), on en tire

$$\frac{\lambda}{p'n - mq'} = \frac{\lambda'}{qm - np}.$$

Donc on aura pour la condition de maximum

$$\frac{x^p y^q}{p'n - mq'} = \frac{x^{p'} y^{q'}}{qm - np} \tag{2}$$

ou

$$\frac{x^{p-p'}}{p'n - mq'} = \frac{y'^{q-q'}}{qm - np}. \tag{3}$$

De l'équation (2) on tirera

$$\frac{x^p y^q}{p'n - mq'} = \frac{x^{p'} y^{q'}}{qm - np} = \frac{\mathrm{K}}{n(p' - p) - m(q' - q)}$$

et, par logarithmes, on en tirera x et y.

Si l'équation donnée était homogène, c'est-à-dire si l'on avait

$$p - p' = q' - q,$$

on tirerait de l'équation (5) le rapport $\frac{x}{y}$; posons

$$\frac{x}{y} = \alpha.$$

Alors on aurait

$$x = \alpha \sqrt[p+q]{\frac{\mathrm{K}}{\alpha^q + \alpha^{q'}}}; \quad y = \sqrt[p+q]{\frac{\mathrm{K}}{\alpha^q + \alpha^{q'}}}.$$

Dans le cas où l'on aurait

$$p'n - mq' = 0, \quad pn - mq = 0,$$

le rapport de x à y se présenterait sous la forme $\frac{0}{0}$; dans ce cas, il faudrait chercher le maximum d'une expression de la forme

$$(x^\beta y)^n,$$

sachant que l'on a

$$(x^\beta y)^q + (x^\beta y)^{q'} = \mathrm{K}.$$

Il y aurait pour chaque valeur du produit $x^\beta y$ que l'on pourrait tirer de cette équation, une valeur de la quantité

considérée; mais le maximum dépendrait de celui de la quantité

$$x^3y,$$

et les conditions données ne permettent pas de déterminer ce maximum.

QUESTION 72

Solution par M. PAUL BOURGAREL, à Antibes.

Résoudre le système

$$xy(x + y) = ab(a + b),$$
$$(x - y)(x + 2y)(2x + y) = (a - b)(a + 2b)(2a + b).$$

Je remarque d'abord la solution évidente

$$x = a, \quad y = b.$$

Je pose ensuite

$$x = at, \quad y = bt,$$

t étant une inconnue auxiliaire.

La première équation devient alors

$$t^3(a + b)ab = ab(a + b)$$

ou

$$t^3 - 1 = 0.$$

On remarque que la deuxième équation devient aussi $t^3 - 1 = 0$. Par conséquent, nous avons pour t les trois valeurs :

$$t = 1, \quad t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad t = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2},$$

et par suite, pour x et y les trois valeurs :

$$x = a, \quad x = a\left[-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right], \quad x = a\left[-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right]$$
$$y = b, \quad y = b\left[-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right], \quad y = b\left[-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right]$$

QUESTION 79.

Solution par M. PAUL BOURGAREL, à Antibes.

Mener dans un triangle une transversale tangente au cercle inscrit au triangle et détachant un triangle de surface donnée.

Soit ABC un triangle et O le cercle inscrit au triangle. Supposons le problème résolu. Soit MN la tangente demandée, P le point de contact et $\frac{1}{2}m^2$ la surface donnée.

Posons

$$AM = x, \ AN = y, \ BAC = \alpha.$$

Nous aurons tout d'abord

$$xy \sin \alpha = m^2. \qquad (1)$$

On a aussi

$$MN^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha.$$

Or

$$MN = MQ + NR = 2AQ - (AM + AN),$$
$$MN = 2\,(p - a) - (x + y).$$

On a donc pour résoudre la question les deux équations

$$xy \sin \alpha = m^2, \qquad (1)$$
$$[2(p - a) - (x + y)]^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha. \qquad (2)$$

Développons, et réduisons la seconde équation; il vient

$$xy(1 + \cos \alpha) - 2(p - a)(x + y) + 2(p - a)^2 = 0,$$

ce que l'on peut écrire

$$m^2 \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} - 2(p - a)(x + y) + 2(p - a)^2 = 0$$

On connaît donc xy et $x + y$.

On a

$$x + y = p - a + \frac{m^2 \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}}{2(p - a)}.$$

Ce qui peut s'écrire, en appelant r le rayon du cercle inscrit,

$$x + y = p - a + \frac{m^2}{2r}\,;$$

x et y sont donc données par l'équation

$$Z^2 - \left(p - a + \frac{m^2}{2r}\right) Z + \frac{m^2}{\sin \alpha} = 0.$$

Nota. — La même question a été résolue par MM. F. Taratte, à Évreux; Naura, à Vitry-le-François; de Kerdrel, à Brest; Bordier, à Blanzac; Aubry, à Douai; Villademoros, à Paris; Voignier, à Commercy.

QUESTION 88

Solution par M. Paul Bourgarel, à Antibes.

Étant donnée la série illimitée

7, 13, 25, 43, 67, 97, 133, 175, . . .

dont le terme général, celui qui en a n *avant lui, est*

$$x_n = 3(n^2 + n) + 7,$$

démontrer les propositions suivantes :

1. *Sur cinq termes consécutifs, pris à volonté dans la série, un terme est divisible par* 5.
2. *Sur sept termes consécutifs, deux sont divisibles par* 7.
3. *Sur treize termes consécutifs, deux sont divisibles par* 13.
4. *Aucun terme de la série n'est égal à un cube.*
5. *Une infinité de termes, tels que*

$$x_2 = 25,\ x_{37} = 4225,\ etc...$$

sont des carrés divisibles par 25.

Le terme général de la série est

$$x_n = 3(n^2 + n) + 7 = 3n(n + 1) + 7.$$

On peut donc former la série de la manière suivante:

Sur une première ligne horizontale (I), on écrit la suite naturelle des nombres entiers précédée de zéro.

Sur une seconde ligne (II), on écrit le produit de chacun des nombres de la ligne (I) par celui qui le suit.

Sur une troisième ligne, on écrit le triple de chacun des nombres de la ligne (II).

Enfin, sur une quatrième ligne, on écrit les nombres de la ligne (III), augmentés de 7 unités. La série est alors contenue dans la ligne (IV).

0,	1,	2,	3,	4,	5,	6, . . .	(I)
0,	2,	6,	12,	20,	30,	42	(II)
0,	6,	18,	36,	60,	90,	126	(III)
7,	13,	25,	43,	67,	97,	133	(IV)

1. — Sur cinq termes consécutifs, pris à volonté dans la série, un terme est divisible par 5.

En effet, considérons cinq termes consécutifs de la ligne (I); parmi ces cinq termes, il y en a un divisible par 5. Soit n ce terme. Le terme $n - 3$ de la ligne (I) a comme correspondant dans la ligne (IV), le nombre

$$3(n-3)(n-2)+7=3n(n-5)+25,$$

c'est-à-dire un multiple de 5.

2.— Sur sept termes consécutifs, deux sont divisibles par 7. En effet, considérons sept termes consécutifs de la ligne (I); parmi ces sept termes, il y en a un divisible par 7; soit n ce terme. Les termes n et $n - 1$ de la ligne (I) ont comme correspondants dans la ligne (IV) les termes

$$3n(n+1)+7$$

et

$$3(n-1)n+7$$

qui sont tous deux des multiples de 7.

3. — Sur treize termes consécutifs, deux sont divisibles par 13. En effet, considérons treize termes consécutifs de la ligne (I); parmi ces treize termes, il y en a un divisible par 13; soit n ce terme. Les termes $n - 12$ et $n - 2$ de la ligne (I) ont comme correspondants dans la ligne (IV) les termes

$$3(n-12)(n-11)+7$$

et

$$3(n-2)(n-1)+7,$$

c'est-à-dire

$$3n(n-23)+403$$

et

$$3n(n-3)+13$$

qui sont tous deux des multiples de 13.

4. — Aucun terme de la série n'est égal à un cube. Il suffit de prouver pour cela que l'équation

$$3n^2+3n+7-a^3=0 \qquad (1)$$

n'admet pas de racines entières.

Il suffit pour cela de prouver que la quantité

$$9 - 12(7 - a^3)$$

n'est pas un carré parfait. Cette quantité est égale à

$$12a^3 - 75 = 2^2 \times 3 \,.\, a^3 - 3 \times 5^2.$$

Pour que ce nombre soit un carré, il faut qu'on puisse le mettre sous la forme d'un produit de facteurs affectés d'exposants pairs. Or, le facteur 3 est à la première puissance. Ce nombre n'est donc pas carré parfait. L'équation (1) n'admet donc pas de racines entières.

5. — Une infinité de termes tels que

$$x_2 = 25,\ a_{37} = 4225, \text{ etc.}$$

sont des carrés divisibles par 25. Il suffit de prouver pour cela que l'équation

$$3n^2 + 3n + 7 - 25\,K^2 = 0 \qquad (2)$$

peut admettre des racines entières.

Considérons la quantité

$$9 - 12(7 - 25K^2)$$

et voyons si cette quantité peut être carré parfait. Cette quantité est égale à

$$12 \times 25 \,.\, K^2 - 75 = 25 \times 3(4K^2 - 1);$$

$4K^2 - 1$ peut être divisible par 3, et le quotient de $4K^2 - 1$ par 3 peut alors être carré parfait; l'expression considérée peut être carré parfait, et par suite l'équation (2) peut admettre des racines entières.

QUESTION 95

Solution, par M. A. de Kerdrel, à Kéruzaret.

De chaque sommet A, B, C *d'un triangle comme centre on décrit des cercles de rayons* ρ_1, ρ_2, ρ_3, *tels que l'on ait*

$$\frac{\rho_2 + \rho_3}{a} = \frac{\rho_1 + \rho_3}{b} = \frac{\rho_1 + \rho_3}{c}.$$

Lieu des centres radicaux de ces circonférences. (Lemoine.)

Soient ω, ω', ω'' trois points quelconques du lieu ; b, b', b'' leurs projections sur CA ; a, a', a'' leurs projections sur CB ; soient λ, λ', λ'' les trois valeurs correspondantes des rapports précédents. D'après la théorie des axes radicaux on a

$$CA = \frac{b^2 + \rho_1^2 - \rho_3^2}{2b} = \frac{b^2 + \lambda b(\rho_1 - \rho_3)}{2b}.$$

Or

$$\rho_1 - \rho_3 = (c - a)\lambda.$$

Donc

$$Ca = \frac{b + \lambda^2(c - a)}{2};$$

de même,

$$Ca' = \frac{b + \lambda'^2(c - a)}{2}, \qquad Ca'' = \frac{b + \lambda'' b(c - a)}{2}.$$

Donc

$$aa' = \frac{(\lambda^2 - \lambda'^2)(c - a)b}{2}, \qquad a'a'' = \frac{(\lambda'^2 - \lambda''^2)c(c - a)}{2}$$

et

$$\frac{aa'}{a'a''} = \frac{\lambda^2 - \lambda'^2}{\lambda'^2 - \lambda''^2},$$

valeur indépendante des côtés; elle sera donc la même, quel que soit le côté que l'on considère. Par suite, les trois points ω, ω', ω'' sont en ligne droite. Il en est de même pour des valeurs quelconques de λ; le lieu est donc une droite.

QUESTION 107

Solution par M. E. Vigarié, élève au Lycée de Toulouse.

On a deux droites rectangulaires AB *et* CD; *sur* ACB *on prend de part et d'autre du point* C *les longueurs* CA $=$ a, CB $=$ b; *on demande de mener par le point* C, *dans l'angle* BCD, *une droite* Cx *de longueur* c, *telle que si on abaisse la perpendiculaire* xy *sur* CD *on ait*



$$Ax^2 - By^2 = xy^2.$$

Je suppose le problème résolu, soit Cx la droite. Le point x se trouve d'abord sur un arc de cercle MxN décrit du point C comme centre avec la longueur c pour rayon. Les deux triangles rectangles Bcy, xyC donnent

$$By^2 = Cy^2 + CB^2,$$
$$xy^2 = Cx^2 - Cy^2.$$

Par suite

$$Ax^2 - Cy^2 - CB^2 = Cx^2 - Cy^2$$

ou bien

$$Ax^2 = c^2 + b^2$$

Ax est donc l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant c et b pour côtés; si donc je joins B et M, on aura

$$BM = Ax.$$

Le point x se trouvera donc aussi sur un arc de cercle décrit du point A comme centre avec BM pour rayon ; il se trouvera donc à l'intersection x des deux arcs de cercle et Cx sera la droite demandée.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Aubry, à Douai ; de Kerdrel, à Brest; Chapron, à Versailles; Berthelot, à Orléans.

QUESTION 108

Solution par M. Madiot, institution Sainte-Marie, à Besançon

On considère un angle droit XOY *et un cercle* Δ *inscrit dans cet angle. Par le point* O, *on mène une transversale* δ *qui rencontre* Δ *en* A *et* B; *on projette alors les points* A *et* B *sur* OX *en* A′ *et* B′ *et sur* OY *en* A″ *et* B″. *Ceci fait, sur* A′B′ *on décrit un demi-cercle* Δ′ *et sur* A″B″ *un demi-cercle* Δ″, *et par le point* O *on mène à* Δ′ *une tangente* OP *et à* Δ″ *une tangente* OQ; *enfin on rabat* OP *sur* OX *en* OP′ *et* OQ *en* OQ′ *sur* OY. *Les parallèles aux droites* OX *et* OY *menées par les points* Q′ *et* P′ *se coupent en un point* I *dont on demande le lieu, lorsque* δ *tourne autour du point* O. (G. L.)

On a, puisque A et B sont sur le cercle Δ, qui touche en E′ et E″ les lignes OX et OY

$$OA.OB = R^2.$$

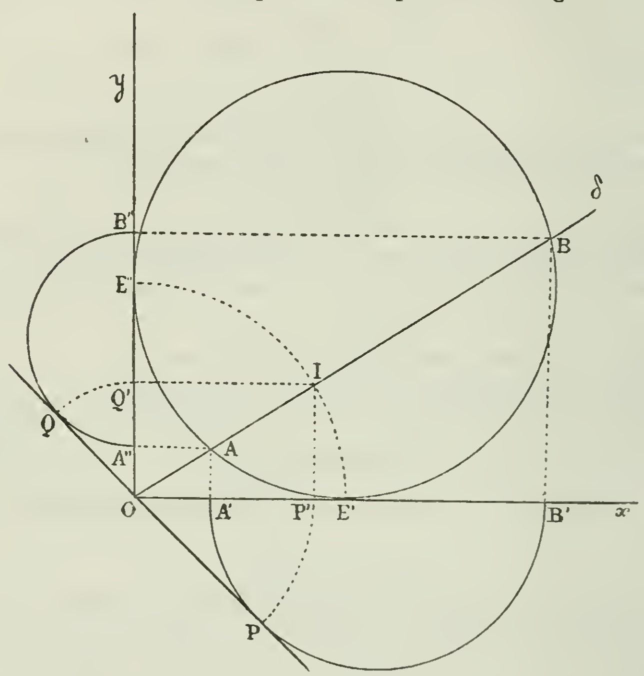
Soit α l'angle BOX; on a

$$OA' = OA \cos \alpha ; \qquad OB' = OB \cos \alpha ;$$

donc

$$OA.OA' = QP'^2 = R^2 \cos^2 \alpha ;$$

si donc par le point P′ je mène une parallèle à OY, elle rencontrera OAB en un point I′ tel que OI′ sera égal à R.



De même, on a

$$OA'' = OA \sin \alpha ; \qquad OB'' = OB \sin \alpha.$$

par suite

$$OA''.OB'' = OQ'^2 = R^2 \sin^2 \alpha ;$$

la droite menée par Q′ parallèlement à OA rencontrera donc OAB au même point I′ que précédemment; par conséquent :

Les droites Q′I, D′I se coupent toujours sur la sécante δ, en un point distant de O d'une longueur égale à R. Lorsque la droite δ tourne autour de O, le point I décrit un arc de cercle ayant O pour centre, et passant par les points E′ et E″.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. de Kerdrel, à Brest; J.-B. Perrin, à Clermont-Ferrand; Kauffman-Cognet, à Bordeaux; Chapron, à Versailles; Vigneron, Lycée Henri IV, à Paris.

QUESTION 109

Solution par M. Millot, élève au Lycée de Chaumont.

On considère une suite de termes

$$u_1, u_2, u_3, u_4 \ldots u_{2n-1}, u_{2n}$$

qui jouissent de cette propriété que si l'on considère quatre termes consécutifs dans cette série, le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens. On donne les trois premiers termes u_1, u_2, u_3, *et l'on demande de trouver la somme* S_{2n} *des* $2n$ *premiers termes. On supposera que* u_3 *est un nombre différent de* u_1.

On a, comme conséquence de l'hypothèse :

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{u_3}{u_4}, \quad \frac{u_2}{u_3} = \frac{u_4}{u_5}, \quad \frac{u_3}{u_4} = \frac{u_5}{u_6}, \ldots \quad \frac{u_{2n-3}}{u_{2n-2}} = \frac{u_{2n-1}}{u_{2n}}.$$

De ces diverses proportions on déduit

$$u_4 = u_2 \frac{u_3}{u_1}, \quad u_5 = u_3 \frac{u_4}{u_2} = u_3 \frac{u_3}{u_1}, \quad u_6 = u_4 \frac{u_3}{u_3}$$

$$= u_4 \frac{u_3}{u_1}, \ldots \quad u_{2n} = u_{2n-2} \frac{u^3}{u_1}.$$

On voit que chaque terme, à partir dn troisième, est le produit de celui qui le précède de deux rangs par le rapport constant $\frac{u_3}{u_1}$.

Or la série des termes donnés peut se diviser en deux séries:

$$u_1 \quad u_3 \quad u_5 \quad u_7 \ldots \quad u_{2n-1}$$

$$u_2 \quad u_4 \quad u_6 \quad u_8 \ldots \quad u_{2n},$$

la première contenant la suite des termes de rang impair et la seconde la suite des termes de rang pair.

Il résulte de ce qui précède que ces deux séries forment deux progressions géométriques de n termes, ayant pour raison commune $r = \frac{u_3}{u_1}$ et pour premiers termes respectifs u_1 et u_2.

Donc, en appliquant la formule connue $\frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$, on

trouve pour la somme

$$S_{2n} = \frac{u_1(r^n - 1)}{r - 1} + \frac{u_2(r^n - 1)}{r - 1} = (u_1 + u_2)\frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Remarque. — La formule trouvée peut se mettre sous la forme

$$S_{2n} = (u_1 + u_2)(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-1}).$$

On peut dire que la somme cherchée est égale au produit de la somme des deux premiers termes par la somme de toutes les puissances de r jusqu'à la $(n - 1)^{me}$ inclusivement.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Vigneron, lycée Henri IV à Paris ; Chapron, à Versailles ; Guilloz, institution de Sainte-Marie, à Besançon ; de Kerdrel, à Brest ; F. Taratte, à Evreux ; Vigarié, à Toulon ; Bourgarel, à Antibes.

QUESTION 110

Solution par M. Vigneron, élève au Lycée Henri IV, à Paris.

Soient $u_1, u_2, u_3 \ldots u_n$ *des nombres tels que l'un quelconque d'entre eux soit égal au produit des deux précédents. Démontrer que, en désignant par* P_n *le produit de ces nombres, on a*

$$P_n = u_2 P_{n-1} \cdot P_{n-2};$$

les nombres u_1 *et* u_2 *sont supposés quelconques.*

On a d'abord

$$P_3 = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = u_1 \cdot u_2 \cdot u_1 u_2;$$

donc on a bien

$$P_3 = u_2 P_1 P_2.$$

Cela posé, je suppose la formule vraie pour n ; je dis qu'elle est vraie pour $n + 1$.

On a, en effet,

$$P_{n+1} = P_n u_n u_{n-1}.$$

Or, par hypothèse, on a

$$P_n = u_2 P_{n-1} P_{n-2}.$$

Donc

$$P_{n+1} = u_2 P_{n-1}(P_{n-2} \cdot u_n \cdot u_{n-1}).$$

Or

$$P_n = P_{n-1} u_n.$$

$$P_{n-1} = P_{n-2} u_{n-1}.$$

Donc

$$P_n = P_{n-2}\, u_n u_{n-1};$$

par suite on a bien

$$P_{n+1} = u_2 P_{n-1} P_n.$$

Or la formule est vraie pour $n = 3$; elle est donc générale.

Nota. — La même question a été résolue par MM. F. Taratte, à Evreux ; de Kerdrel, à Brest ; Noël, à Bar-le-Duc ; Chapron, à Versailles ; Guilloz, institution Sainte-Marie, à Besançon.

QUESTIONS PROPOSÉES

146. — Sur les côtés d'un triangle, on construit extérieurement et intérieurement des triangles isoscèles semblables ayant un angle au sommet de 120°. Démontrer : 1° que les sommets des triangles intérieurs et ceux des triangles extérieurs forment deux triangles équilatéraux ayant pour centre commun le point de concours des médianes du triangle donné ; 2° que les cercles circonscrits à ces deux triangles constituent le lieu des centres de tous les triangles équilatéraux circonscrits au triangle donné.

Exprimer en fonction des éléments de ce dernier triangle les rayons des deux cercles ; calculer le côté et la surface du triangle équilatéral circonscrit maximum. *(J. Kœhler.)*

147. — Étant donnée la fraction

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'},$$

on forme l'équation $Ax^2 + 2Bx + C = 0$, donnant les valeurs de x pour lesquelles la fraction est maximum ou minimum. Le polynôme $B^2 - AC$ est un produit de fonctions rationnelles de a, b, c, a', b', c'. Trouver les facteurs de ce produit. *(Weill.)*

148. — On donne deux droites fixes, et un cercle, de centre O, tangent à ces deux droites. Soit AB une tangente variable de ce cercle, et qui rencontre en A et B les deux droites fixes ; soit H le point de concours des hauteurs du triangle OAB. Démontrer que le cercle des neuf points du

triangle OAB enveloppe deux cercles, et que le cercle circonscrit au triangle AHB enveloppe aussi deux cercles fixes.

(Weill.)

149. — On donne deux droites fixes et un point O. Un angle AOB, de grandeur constante, tourne autour du point O, A et B étant les points où ses côtés rencontrent respectivement les deux droites fixes. On mène OA′, perpendiculaire à OA, et rencontrant en A′ l'une des droites ; OB′, perpendiculaire à OB, et qui rencontre l'autre droite en B′ ; enfin on projette le point O sur les trois droites AB, AA′, BB′, en α, β, γ. Démontrer que le cercle circonscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$ passe par un point fixe, et touche un cercle fixe. *(Weill.)*

AVIS

Nous rappelons à nos lecteurs que les solutions qu'ils nous adressent doivent porter en tête :

Le numéro de la question;

Le nom de l'auteur de la solution, ainsi que l'établissement auquel il appartient;

L'énoncé complet de la question proposée.

De plus, s'il y a des figures, celles-ci doivent être faites avec beaucoup de soin et sur des feuilles à part.

Enfin, nous prions nos lecteurs de mettre les diverses questions sur des feuilles séparées, pour faciliter le classement des solutions, et éviter des oublis ou des erreurs.

Ces solutions sans aucun avis d'envoi, peuvent être adressées sous bande ou sous enveloppe ouverte.

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER, — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE 20, PARIS. — 12072-4.

ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE D'ANALYSE INDÉTERMINÉE

DU PREMIER ET DU SECOND DEGRÉ

Par M. **Ferrent.**

INTRODUCTION

Les questions sur les propriétés générales des nombres conduisent à la résolution, en nombres entiers, d'équations indéterminées.

Nous nous proposons d'exposer ici une méthode permettant de résoudre ces sortes d'équations, dans le cas où elles sont du premier ou du deuxième degré.

On sait que cette étude, très délicate, a fait l'objet des recherches d'un grand nombre de géomètres, parmi lesquels figurent les noms illustres de *Fermat*, *Euler*, *Lagrange*, *Legendre*, *Gauss*, *Poinsot*, *Cauchy*, *Jacobi*, etc.

Nous reprendrons dans cette étude quelques-uns des travaux de ces savants, mais en nous efforçant d'en élaguer les difficultés qui s'y rencontrent quelquefois.

D'ailleurs, nous n'aurons recours qu'aux seules connaissances de l'algèbre élémentaire, et nous introduirons dans nos démonstrations toute la clarté et toute la simplicité qui sont particulièrement imposées à cette branche des mathématiques.

On trouvera dans ce travail une théorie que nous croyons nouvelle, et que nous avons nommée la *théorie des solutions conjuguées*. Elle apporte notamment une importante simplification dans le travail nécessaire à la résolution de l'équation

$$y^2 - Mx^2 = N,$$

et elle permet de résoudre cette équation dans bien des cas où ce travail serait rendu matériellement impossible par la longueur des calculs.

L'étude de l'analyse indéterminée a été longtemps en honneur, et les plus célèbres mathématiciens, dont nous avons cité les noms, l'ont cultivée. Délaissée, au moins en apparence, pendant quelques années, elle a été l'objet de

récents travaux, qui font penser que l'attention des savants se porte de nouveau sur ce champ des mathématiques.

Les articles de MM. *Réalis*, *Catalan*, *Ed. Lucas*, *Desboves*, *Landry*, qui ont paru dans ces dernières années dans la *Nouvelle Correspondance mathématique*, ou dans les *Nouvelles Annales* ou dans les comptes rendus de l'Association française ou enfin dans les comptes rendus de l'Académie des sciences; ceux que M. *de Longchamps* a publiés dans ce Journal, à propos de l'équation de *Pell* et d'un mémoire de M. *Landry*, semblent rappeler sur cette intéressante partie des mathématiques l'attention de quelques-uns.

Le travail que nous publions ici offrira peut-être quelque intérêt, et permettra, en dehors des points nouveaux qu'il renferme, croyons-nous, d'initier les lecteurs de ce Journal à des connaissances qui ont été déjà établies, mais qui se trouvent répandues dans des ouvrages nombreux et qu'on ne se procure que difficilement.

CHAPITRE PREMIER

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ A n INCONNUES

1. — Nous ne nous arrêterons pas à la résolution de l'équation à deux inconnues

$$a_1x_1 + a_2x_2 = \text{K}, \qquad (1)$$

dans laquelle a_1, a_2 et K sont des nombres entiers.

Tous les traités élémentaires d'algèbre font connaître la méthode employée, et lorsque l'équation peut être résolue, toutes les solutions sont comprises dans les expressions

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + a_2t \\ x_2 &= \alpha_2 - a_1t \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

que l'on peut aussi écrire

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 - a_2t \\ x_2 &= \alpha_2 + a_1t \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$x_1 = \alpha_1$ et $x_2 = \alpha_2$ étant une première solution de l'équation (1); a_1 et a_2, les coefficients des inconnues dans la même équation, et t, une quantité indéterminée, à laquelle on peut donner toute valeur *entière*, positive ou négative.

Cette équation peut toujours être résolue en nombres en-

tiers, lorsque les coefficients a_1, a_2 sont premiers entre eux. Elle ne peut être résolue dans le cas contraire.

2. — L'équation à n inconnues

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = K, \qquad (4)$$

dans laquelle nous supposons les nombres entiers a_1, a_2, ... a_n et K débarrassés de tout diviseur commun, ne peut être résolue en nombres entiers, lorsque les coefficients a_1, a_2, ... a_n ont un diviseur commun.

En effet, tous les nombres entiers substitués aux inconnues donneront au premier membre une valeur divisible par ce diviseur, et cette valeur ne pourra jamais être égale à la quantité K, qui est, par hypothèse, première avec ce même diviseur.

3. — Réciproquement, lorsque l'équation (4) a ses coefficients premiers entre eux, cette équation peut toujours être résolue en nombres entiers.

Posons en effet

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = a_1x_1 + \rho U,$$

ρ étant le plus grand commun diviseur des coefficients a_2, a_3, ... a_n.

L'équation (4) deviendra

$$a_1x_1 + \rho U = K, \qquad (5)$$

a_1 et ρ étant premiers entre eux, l'équation (5) pourra toujours être résolue en nombres entiers. Soit $x_1 = \xi_1$ et $U = v$ une solution de cette équation.

Si l'équation $U = v$ peut être résolue en nombres entiers, l'équation (4) pourra également être résolue.

Or, l'équation $U = v$ a ses coefficients premiers entre eux et ne contient que $n - 1$ inconnues. Si donc une équation à $n - 1$ inconnues peut être résolue en nombres entiers, lorsque ses coefficients sont premiers entre eux, il en est de même de l'équation à n inconnues. Mais l'équation à deux inconnues peut toujours être résolue dans ce cas; il en sera donc de même de l'équation à trois inconnues. Cette dernière pouvant être résolue dans le même cas, cette propriété appartiendra également à l'équation à quatre, cinq, etc., n inconnues.

Cette démonstration donne en même temps le moyen de trouver une première solution de l'équation (4), lorsque cette équation peut être résolue.

4. — Soit l'équation à trois inconnues

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \mathrm{K}, \qquad (6)$$

dans laquelle nous supposerons a_1, a_2 et a_3 premiers entre eux.

Soit $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, $x_3 = \alpha_3$ une première solution; on aura l'égalité

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = \mathrm{K}; \qquad (7)$$

d'où l'on déduit

$$a_1(x_1 - \alpha_1) + a_2(x_2 - \alpha_2) + a_3(x_3 - \alpha_3) = 0. \quad (8)$$

Posons, pour abréger, $x_1 - \alpha_1 = \mathrm{X}_1$, $x_2 - \alpha_2 = \mathrm{X}_2$, $x_3 - \alpha_3 = \mathrm{X}_3$; il viendra

$$a_1\mathrm{X}_1 + a_2\mathrm{X}_2 + a_3\mathrm{X}_3 = 0; \qquad (9)$$

soit ρ_1 le plus grand commun diviseur de a_2 et a_3; ρ_1 devra diviser $a_1\mathrm{X}_1$, et comme il est premier avec a_1, il devra diviser X_1. Posons donc

$$\mathrm{X}_1 = \rho_1 t.$$

L'équation (9) deviendra

$$a_1 t + \frac{a_2}{\rho_1}\,\mathrm{X}_2 + \frac{a_3}{\rho_1}\,\mathrm{X}_3 = 0. \qquad (10)$$

Quelque valeur que nous donnions à t, l'équation (10) pourra toujours être résolue, puisque les coefficients $\frac{a_2}{\rho_1}$ et $\frac{a_3}{\rho_1}$ sont premiers entre eux; t n'est donc plus une inconnue, mais bien une quantité entièrement indéterminée.

Nous pouvons donc considérer l'équation (10) comme ne dépendant que de deux inconnues X_2 et X_3, et nous pourrons la résoudre à la manière de l'équation à deux inconnues.

Toutefois, une difficulté se présente, par suite de l'existence de l'indéterminée t; et il importe de trouver une première solution, quelle que soit la valeur que l'on puisse donner ultérieurement à cette indéterminée.

Nous atteindrons ce but en faisant $t = 1$ dans l'équa-

tion (10). Nous aurons ainsi l'équation

$$a_1 + \frac{a_2}{\rho_1} X_2 + \frac{a_3}{\rho_1} X_3 = 0. \qquad (11)$$

Soit $X_2 = \beta_2$, $X_3 = \beta_3$ une première solution de cette équation; $X_2 = \beta_2 t$ et $X_3 = \beta_3 t$ formeront une première solution de l'équation (10), quel que soit t, et toutes les solutions seront données par les formules (2) :

$$X_2 = \beta_2 t + \frac{a_3}{\rho_1} t_1,$$

$$X_3 = \beta_3 t - \frac{a_2}{\rho_1} t_1,$$

avec $$X_1 = \rho_1 t;$$

d'où nous déduirons

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \rho_1 t \\ x_2 &= \alpha_2 + \beta_2 t + \frac{a_3}{\rho_1} t_1 \\ x_3 &= \alpha_3 + \beta_3 t - \frac{a_2}{\rho_1} t_1 \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

et on aura, entre les constantes de ces formules, les relations

$$\left.\begin{aligned} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 &= K \\ a_1\rho_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

5. — Nous pouvons résoudre, par le même procédé, l'équation à quatre inconnues

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = K, \qquad (14)$$

dont les quatre coefficients sont supposés premiers entre eux.

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, x_3 = \alpha_3, x_4 = \alpha_4$$

étant une première solution, on aura

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4 = K. \qquad (15)$$

Retranchons (15) de (14), et posons, pour abréger,

$$x_1 - \alpha_1 = X_1, x_2 - \alpha_2 = X_2, x_3 - \alpha_3 = X_3, x_4 - \alpha_4 = X_4;$$

$$a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_2 + a_4X_4 = 0. \qquad (16)$$

Soit ρ_1 le plus grand commun diviseur de a_2, a_3, a_4; ρ_1 doit diviser a_1X_1, et, par conséquent X_1, puisque a_1 et ρ_1 sont premiers entre eux.

Nous poserons donc

$$X_1 = \rho_1 t_1$$

et l'équation devient

$$a_1 t_1 + \frac{a_2}{\rho_1} X_2 + \frac{a_3}{\rho_1} X_3 + \frac{a_4}{\rho_1} X_4 = 0. \qquad (17)$$

Les trois coefficients $\frac{a_2}{\rho_1}$, $\frac{a_3}{\rho_1}$, $\frac{a_4}{\rho_1}$ étant premiers entre eux, l'équation (17) pourra toujours être résolue pour toute valeur de t_1. Cette quantité est, par conséquent, indéterminée.

Posons $t_1 = 1$ dans cette équation, et soit

$$X_2 = \beta_2, \ X_3 = \beta_3, \ X_4 = \beta_4$$

une première solution de

$$a_1 + \frac{a_2}{\rho_1} X_2 + \frac{a_3}{\rho_1} X_3 + \frac{a_4}{\rho_1} X_4 = 0, \qquad (18)$$

de sorte que l'on ait

$$a_1 + \frac{a_2}{\rho_1}\beta_2 + \frac{a_3}{\rho_1}\beta_3 + \frac{a_4}{\rho_1}\beta_4 = 0; \qquad (19)$$

$X_2 = \beta_2 t_1$, $X_3 = \beta_3 t_1$, $X_4 = \beta_4 t_1$ sera une première solution de l'équation (17), quelle que soit la valeur de t_1 et l'on aura

$$a_1 t_1 + \frac{a_2}{\rho_1}\beta_2 t_1 + \frac{a_3}{\rho_1}\beta_3 t_1 + \frac{a_4}{\rho_1}\beta_4 t_1 = 0. \qquad (20)$$

Retranchant de (17), et posant, pour abréger,

$$X_2 - \beta_2 t_1 = Y_2, \ X_3 - \beta_3 t_1 = Y_3, \ X_4 - \beta_4 t_1 = Y_4,$$

nous aurons

$$\frac{a_2}{\rho_1} Y_2 + \frac{a_3}{\rho_1} Y_3 + \frac{a_4}{\rho_1} Y_4 = 0. \qquad (21)$$

Nous raisonnerons sur cette équation comme sur l'équation (9).

Soit ρ_2 le plus grand commun diviseur des coefficients $\frac{a_3}{\rho_1}$ et $\frac{a_4}{\rho_1}$; ρ_2 devra diviser Y_2; nous poserons donc

$$Y_2 = \rho_2 t_2;$$

d'où

$$\frac{a_2}{\rho_1} t_2 + \frac{a_3}{\rho_1\rho_2} Y_3 + \frac{a_4}{\rho_1\rho_2} Y_3 = 0; \qquad (22)$$

t_2 est entièrement indéterminé. Nous pouvons donc résoudre cette équation comme si elle ne dépendait que de deux inconnues, Y_3 et Y_4.

Posons $t_2 = 1$, et soit $Y_3 = \gamma_3$, $Y_4 = \gamma_4$ une première solution de

$$\frac{a_2}{\rho_1} + \frac{a_3}{\rho_1\rho_2} Y_3 + \frac{a_4}{\rho_1\rho_2} Y_4 = 0,$$

de sorte que l'on ait

$$\frac{a_2}{\rho_1} + \frac{a_3}{\rho_1\rho_2}\gamma_3 + \frac{a_4}{\rho_1\rho_2}\gamma_4 = 0; \qquad (23)$$

$Y_3 = \gamma_3 t_2$, $Y_4 = \gamma_4 t_2$ sera une première solution de l'équation (22), et les solutions générales seront données par les formules (2) :

$$Y_3 = \gamma_3 t_2 + \frac{a_4}{\rho_1\rho_2} t_3,$$

$$Y_4 = \gamma_4 t_2 - \frac{a_3}{\rho_1\rho_2} t_3,$$

avec $\quad Y_2 = \rho_2 t_2.$

Nous déduirons de là :

$$X_2 = \beta_2 t_1 + \rho_2 t_2,$$

$$X_3 = \beta_3 t_1 + \gamma_3 t_2 + \frac{a_4}{\rho_1\rho_2} t_3,$$

$$X_4 = \beta_4 t_1 + \gamma_4 t_2 - \frac{a_3}{\rho_1\rho_2} t_3,$$

avec $\quad X_2 = \rho_1 t_1$

et enfin

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \rho_1 t_1 \\ x_2 &= \alpha_2 + \beta_2 t_1 + \rho_2 t_2 \\ x_3 &= \alpha_3 + \beta_3 t_1 + \gamma_3 t_2 + \frac{a_4}{\rho_1\rho_2} t_3 \\ x_4 &= \alpha_4 + \beta_4 t_1 + \gamma_4 t_2 - \frac{a_3}{\rho_1\rho_2} t_3 \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

De plus, nous avons, entre les constantes, les relations

$$\left.\begin{aligned} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4 &= K \\ a_1\rho_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + a_4\beta_4 &= 0 \\ a_2\rho_2 + a_3\gamma_3 + a_4\gamma_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

6. — L'équation à cinq inconnues

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = K, \qquad (26)$$

traitée de la même manière, conduirait aux solutions suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_1 + \rho_1 t_1\\
x_2 &= \alpha_2 + \beta_2 t_1 + \rho_2 t_2\\
x_3 &= \alpha_3 + \beta_3 t_1 + \gamma_3 t_2 + \rho_3 t_3\\
x_4 &= \alpha_4 + \beta_4 t_1 + \gamma_4 t_2 + \delta_4 t_3 + \frac{a_5}{\rho_1\rho_2\rho_3}\, t_4\\
x_5 &= \alpha_5 + \beta_5 t_1 + \gamma_5 t_2 + \delta_5 t_3 - \frac{a_4}{\rho_1\rho_2\rho_3}\, t_4
\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

et les constantes auraient entre elles les quatre relations

$$\left.\begin{aligned}
a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4 + a_5\alpha_5 &= \mathrm{K}\\
a_1\rho_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + a_4\beta_4 + a_5\beta_5 &= 0\\
a_2\rho_2 + a_3\gamma_3 + a_4\gamma_4 + a_5\gamma_5 &= 0\\
a_3\rho_3 + a_4\delta_4 + a_5\delta_5 &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

7. — Soit l'équation (4) à n inconnues.

Les raisonnements qui nous ont conduit aux formules précédentes peuvent s'appliquer à toute équation du premier degré contenant un nombre quelconque d'inconnues, et la loi de formation de leurs valeurs est assez visible, pour que l'on puisse écrire immédiatement les formules suivantes, dont nous démontrerons du reste l'exactitude tout à l'heure.

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_1 + \rho_1 t_1\\
x_2 &= \alpha_2 + \beta_2 t_1 + \rho_2 t_2\\
x_3 &= \alpha_3 + \beta_3 t_1 + \gamma_3 t_2 + \rho_3 t_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_k &= \alpha_k + \beta_k t_1 + \gamma_k t_2 + \delta_k t_3 + \ldots + \rho_k t_k\\
x_{k+1} &= \alpha_{k+1} + \beta_{k+1} t_1 + \gamma_{k+1} t_2 + \delta_{k+1} t_3 + \ldots \lambda_{k+1} t_k + \rho_{k+1} t_{k+1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_{n-2} &= \alpha_{n-2} + \beta_{n-2} t_1 + \gamma_{n-2} t_2 + \delta_{n-2} t_3 + \ldots + \lambda_{n-2} t_k + \mu_{n-2} t_{k+1}\\
&\qquad + \ldots + \rho_{n-2} t_{n-2}\\
x_{n-1} &= \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} t_1 + \gamma_{n-1} t_2 + \delta_{n-1} t_3 + \ldots + \lambda_{n-1} t_k + \mu_{n-1} t_{k+1}\\
&\qquad + \ldots + \nu_{n-1} t_{n-2} + \frac{a_n}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_{n-2}}\, t_{n-1}\\
x_n &= \alpha_n + \beta_n t_1 + \gamma_n t_2 + \delta_n t_3 + \ldots + \lambda_n t_k + \mu_n t_{k+1} + \cdots\\
&\qquad + \nu_n t_{n-2} - \frac{a_{n-1}}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_{n-2}}\, t_{n-1}
\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

les constantes ayant entre elles les $n - 1$ relations suivantes

$$\left.\begin{array}{r} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \ldots + a_n\alpha_n = \mathrm{K} \\ a_1\rho_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + \ldots + a_n\beta_n = 0 \\ a_2\rho_2 + a_3\gamma_3 + \ldots + a_n\gamma_n = 0 \\ a_3\rho_3 + \ldots + a_n\delta_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-2}\rho_{n-2} + a_{n-1}v_{n-1} + a_n v_n = 0 \end{array}\right\} \quad (30)$$

Dans ces formules, ρ_1 est le plus grand commun diviseur des $n - 1$ derniers coefficients de l'équation ; ρ_2 le plus grand commun diviseur des $n - 2$ derniers coefficients, divisés au préalable par ρ_1 ; ρ_3, le plus grand commun diviseur des $n - 3$ derniers coefficients divisés d'abord par le produit $\rho_1\rho_2$, et ainsi des autres ; quant aux autres constantes, elles font partie de premières solutions d'équations successives, d'où proviennent les relations (30).

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 97.)

XXXV

Étant donnés une droite CD *et deux points* A *et* B, *trouver sur* CD *un point* X, *tel que, si l'on joint* AX *et* BX, *la droite* CD *soit l'une des bissectrices de l'angle* AXB.

Ce problème est l'un des plus connus des éléments, comme problème du jeu de billard, de la réflexion d'un rayon lumineux, etc. ; nous n'en parlons que pour indiquer la construction *graphique* suivante qui, surtout si l'on ne se sert que de la règle et de l'équerre, est beaucoup plus simple que la construction classiquement connue.

J'abaisse de A et de B les perpendiculaires Aa, Bb sur CD, a et b étant les pieds de ces perpendiculaires sur CD. Je

joins aB, bA. Ces droites se coupent en x; si de x j'abaisse une perpendiculaire sur CD, le pied de cette perpendiculaire est le point X cherché.

Une construction analogue est applicable pour diviser une droite ab en parties proportionnelles à des longueurs données. Par a et par b je mène deux parallèles quelconques sur lesquelles je prends, à partir de a et de b, des longueurs égales aux longueurs données (ou proportionnelles à celles-ci). Soient A et B les extrémités de ces droites, je joins Ab, Ba, soit x leur intersection. Si par x je mène une parallèle à Aa qui coupe ab en X, le point X est le point de division cherché.

XXXVI

On donne un triangle ABC : *on mène les trois hauteurs* AA′, BB′, CC′, *on projette* B′ *et* C′ *en* B'_a, C'_a *sur* BC *et* A′ *en* A'_c *sur* AB *et en* A'_b *sur* AC. *Soit* J *le point où* B′C′ *coupe* AA′ ;

Démontrer : 1° *Que les quatre droites* $C'B'_a$, $B'C'_a$, AA′, $A'_bA'_c$ *se coupent en un même point* O *pour lequel on a* :

$$OJ = OA' ;$$

2° *Que si l'on projetait* C′ *en* C'_b *sur* AC, *et* B′ *en* B'_c *sur* AB *on aurait*

$$A'_bA'_c = B'_aB'_c = C'_bC'_a.$$

Soit H le point de concours des hauteurs.

Les deux quadrilatères homothétiques HB′AC′, $A'A'_bAA'_c$ montrent que B′C′ et $A'_bA'_c$ sont parallèles; par suite, si l'on appelle γ le point où $A'_bA'_c$ coupe B′A′, l'angle $\gamma A'_bA'$ sera égal à l'angle C′B′H (puisque leurs côtés sont parallèles et de même sens), c'est-à-dire à $90° - B$; mais les angles alternes internes $\gamma A'A'_b$ et HB′A′ sont égaux ; et comme l'on a

$$\text{angle } HB'A' = HB'C' = 90° - B$$

les deux angles $\gamma A'_bA'$ et $\gamma A'A'_b$ sont égaux, ce qui, puisque le triangle $A'A'_bB'$ est rectangle, prouve que γ est le milieu de A′B′, ou que $A'_bA'_c$, coupe JA′ en son milieu.

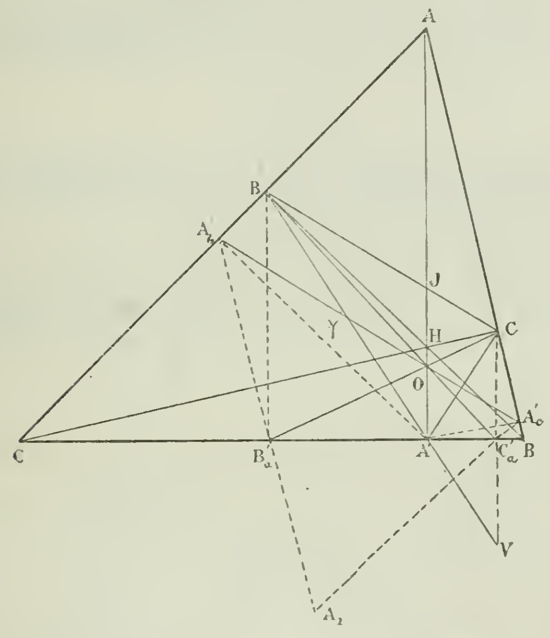
Nous savons déjà par le problème XXXV que $C'B'_a$ et $B'C'_a$ se coupent sur AA′, puisque l'on a

$$\text{angle } C'A'B = \text{angle } B'A'C ;$$

il suffira de démontrer que ce point est au milieu de A′J ou

que l'une de ces droites, $B'C'_a$ par exemple, coupe JA' en son milieu.

Remarquons que si l'on prolonge $B'A'$ et $C'C'_a$ jusqu'à leur rencontre en V, on a $C'C'_a = C'_aV$; par suite que $B'C'_a$ est la médiane partant de B' du triangle $VB'C'$, et coupe évidemment



$A'J$ en son milieu. 1° et 2° sont donc démontrés. Ce qui précède montre aussi que les trois droites $A'_bA'_c, B'_aB'_c, C'_aC'_b$ se coupent deux à deux aux milieux du triangle $A'B'C'$.

Dans le quadrilatère inscriptible $A'A'_bAA'_c$ on a

$$A'A \times A'_bA'_c = AA'_b \times A'A'_c + AA'_c \times A'A'_b$$

ou

$$h_a \times A'_bA'_c = h_a \sin C \times h_a \cos B + h_a \sin B \times h_a \cos C$$

ou $$A'_bA'_c = h_a \times \sin A = \frac{2S}{a} \times \frac{a}{2R} = \frac{S}{R}.$$

3° est donc démontré, puisque pour $B'_aB_c, C'_aC'_b$ on eût trouvé respectivement $h_b \sin B$, $h_c \sin C$, c'est-à-dire aussi $\frac{S}{R}$.

En projetant la figure sur un plan quelconque, on peut déduire de ce qui précède un théorème ayant rapport non plus aux hauteurs, mais à trois droites concourantes quelconques.

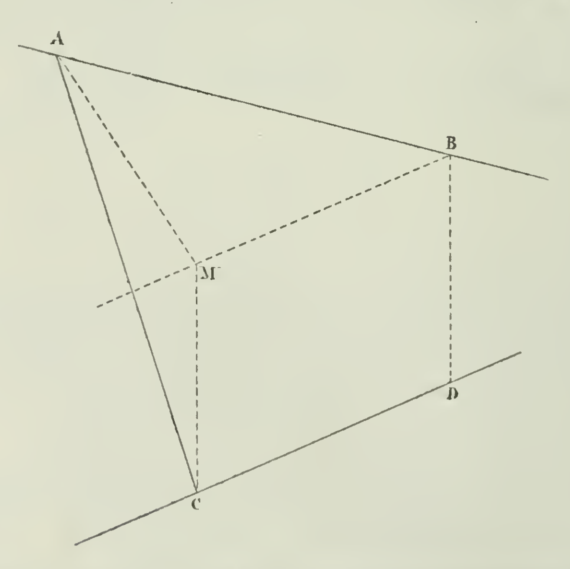
Si nous appelons A_1 le point où se coupent $A'_bB'_a$, $A'_cC'_a$; B_1, C_1 les points analogues par rapport aux autres côtés, nous engageons le lecteur à chercher le problème suivant susceptible d'une solution fort simple : *construire* ABC *connaissant* A_1, B_1, C_1.

XXXVII

Entre deux lignes données AB, CD *non situées dans le même plan, mener une ligne* AC *perpendiculaire à l'une d'elles (à* AB *en* A, *par exemple) et de longueur donnée.*

Soit BD la perpendiculaire commune à ces deux droites.

Supposons le problème résolu et par B menons BM parallèle à DC, puis par C une parallèle à BD qui coupe en M la pa-



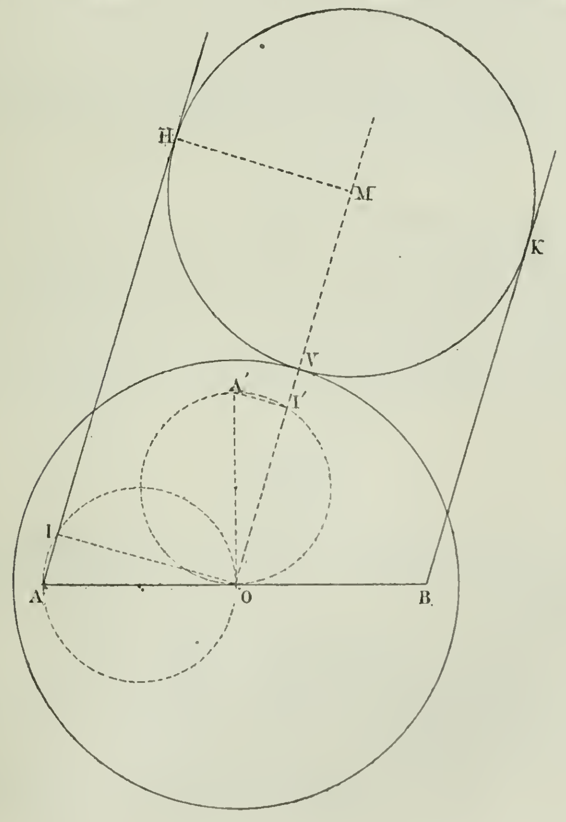
rallèle à CD menée par B et qui est évidemment perpendiculaire au plan MBA CAM; d'après cela, dans le triangle rectangle en M je connais CM = BD et CA, je puis donc le construire.

Mais CM étant perpendiculaire au plan MBA, CA perpendiculaire en A sur BA, droite de ce plan, la réciproque du théorème des trois perpendiculaires montre que MA est perpendiculaire sur AB ; dans le triangle rectangle ABM je connais donc AM et l'angle opposé, je puis donc le construire et par suite déterminer le point A, etc.

Nous engageons les élèves à faire par les procédés de la géométrie descriptive l'épure de cette solution.

XXXVIII

Lieu des centres M *des circonférences tangentes à une circonférence fixe de centre* O, *et à deux parallèles* AH, BK, *variables*



mais passant par deux points fixes A *et* B *situés sur un diamètre à égale distance du centre* O.

De O j'abaisse une perpendiculaire OI sur AH; le lieu de I est la circonférence décrite sur AO comme diamètre. Sur la droite OM, qui contient en V le point de contact des deux circonférences O et M, je prends $OI' = OI = MH$; il est évident que si, perpendiculairement à AB, je prends $OA' = OA$, le lieu de I' sera la circonférence décrite sur OA' comme diamètre, puisque le lieu de I' n'est autre que le lieu de I qui a tourné d'un quart de cercle autour de O de gauche à droite.

On a donc

$$I'M = I'V + VM = I'V + I'O = \text{constante}.$$

Pour avoir le lieu du point M, je mènerai donc par O toutes les cordes OI' du cercle fixe OA'I', et je les prolongerai de I'M égale au rayon du cercle primitif donné; le lieu ainsi obtenu est la courbe bien connue sous le nom de *limaçon de Pascal.*

XXXIX

Soit ABC *un triangle,* M *le milieu de la base* BC; *on sait que la somme des carrés des deux côtés qui comprennent la droite* AM *est égale à deux fois le carré de cette droite plus la somme des carrés des segments que le point* M *détermine sur la base* BC. *La réciproque est-elle vraie: c'est-à-dire si un point* M *pris sur* BC *jouit de cette propriété, est-il forcément le milieu de* BC?

Soit
$$AM = x,$$
$$CM = y,$$
$$BM = z.$$

Soit α le pied de la hauteur abaissée de A sur BC; l'un des deux triangles AMC, AMB est obtusangle. Supposons que ce soit AMC; on a

$$b^2 = y^2 + x^2 + 2yM\alpha,$$
$$c^2 = z^2 + x^2 - 2zM\alpha,$$

d'où
$$zb^2 + yc^2 = a(x^2 + yz): \qquad (1)$$

mais par hypothèse on a

$$b^2 + c^2 = 2x^2 + y^2 + z^2 \qquad (2)$$

et
$$y + z = a; \qquad (3)$$

éliminant x entre (1) et (2), puis z au moyen de (3), on a

$$4ay^2 + 2y(c^2 - b^2 - 2a^2) + a(b^2 + a^2 - c^2) = 0;$$

d'où l'on tire

$$y' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a},$$

$$y'' = \frac{a}{2}.$$

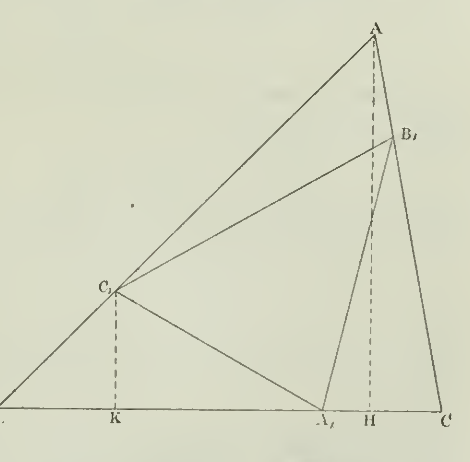
La réciproque n'est donc pas vraie et le point M peut être soit le milieu de BC, soit le pied de la hauteur.

(A suivre.)

CONCOURS GÉNÉRAL DE PHILOSOPHIE

Solution par M. P. Lamaire, élève au Lycée Charlemagne(*).

Étant donné un triangle ABC, *et un nombre positif* m, *plus petit que l'unité, on prend sur le côté* AB *un point* C_1, *tel que* AC_1 *soit égal à* m.AB; *de même on prend sur* AC *un point* B_1, *tel que* CB_1 *soit égal à* m.AC; *et sur* BC *un point* A_1 *tel que* BA_1 *soit égal à* m.BC : — 1° *Trouver l'aire du triangle* $A_1B_1C_1$; 2° *on considère une suite indéfinie de triangles* $A_1B_1C_1$; $A_2B_2C_2, \ldots$ A_pB_pC , *dont chacun se déduit du précédent, comme le triangle* $A_1B_1C_1$ *se déduit de* ABC ; *trouver la limite de la somme des aires de ces triangles quand le nombre entier* p *augmente indéfiniment;* 3° *étudier les variations de la limite précédente quand le nombre* m *varie de* o *à*



(*) Cette copie a eu le second prix au concours.

I : *4° déterminer les positions des points de rencontre des médianes de chacun des triangles* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, . . . $B_pA_pC_p$.

1° L'aire du triangle $A_1B_1C_1$ peut être considérée comme équivalente à l'aire du triangle donné diminuée des petits triangles AC_1B_1, BC_1A_1, CA_1B_1. Évaluons l'un de ces triangles, BC_1A_1 par exemple.

L'aire de ce triangle a pour expression

$$\frac{BA_1 \times C_1K}{2}.$$

Mais

$$BA_1 = m \,.\, BC$$

et dans les triangles semblables BC_1K, BAH, on a la proportion

$$\frac{C_1K}{AH} = \frac{BC_1}{BA} = 1 - m;$$

d'où

$$C_1K = AH(1 - m).$$

L'aire du triangle est donc

$$\frac{m \,.\, BC \,.\, AH \,.\, (1 - m)}{2}$$

ou en remarquant que $\frac{BC \,.\, AH}{2}$ n'est autre chose que la surface S du triangle

$$Sm(1 - m).$$

On verrait facilement d'ailleurs que l'aire de chacun des deux autres petits triangles a la même expression.

La surface du triangle $A_1B_1C_1$ sera donc

$$S - 3Sm(1 - m) = S(3m^2 - 3m + 1).$$

2° Telle est la surface du triangle $A_1B_1C_1$.

Elle se déduit du triangle précédent en multipliant par le trinôme $3m^2 - 3m + 1$. De même, si on considère un second triangle $A_2B_2C_2$ formé avec $A_1B_1C_1$ comme celui-ci a été formé avec ABC, la surface de ce nouveau triangle sera

$$S(3m^2 - 3m + 1)^2.$$

De même les triangles $A_3B_3C_3$. $A_4B_4C_4$ ... auront pour surface

$$S(3m^2 - 3m + 1)^3$$
$$S(3m^2 - 3m + 1)^4$$

En général, le triangle $A_pB_pC_p$ aura pour surface

$$S(3m^2 - 3m + 1)^p.$$

Les aires de tous ces triangles forment, en y comprenant le premier, une progression géométrique décroissante dont le premier terme est S et la raison $3m^2 - 3m + 1$.

A la limite la somme de ces aires sera

$$\frac{S}{1 - (3m^2 - 3m + 1)} = \frac{S}{3m(1 - m)}.$$

3° Voyons ce que devient cette expression, si m varie entre 0 et 1. Elle variera évidemment en raison inverse de son dénominateur $3m(1 - m)$, puisque son numérateur est un nombre constant.

Si $m = 0$, ce dénominateur s'annule et l'expression devient égale à $\frac{S}{0} = \infty$. C'est qu'alors les points C_1, A_1, B_1 se confondant avec les sommets du triangle donné, tous les triangles successifs sont égaux à ce dernier, et comme leur nombre est infini, la somme de leurs surfaces est infinie.

Si m croît, le produit $m(1 - m) = m - m^2$ varie de la même manière que m, puisque m est compris entre 0 et 1. Donc si m croît, $m(1 - m)$ croît et l'expression $\frac{S}{3m(1 - m)}$ décroît. D'ailleurs elle ne décroît pas au delà de toute limite, car pour $m = 1$, elle reprend la forme $\frac{S}{0} = \infty$. Alors les sommets C_1, A_1, B_1 se confondent avec les sommets B, C, A du triangle donné.

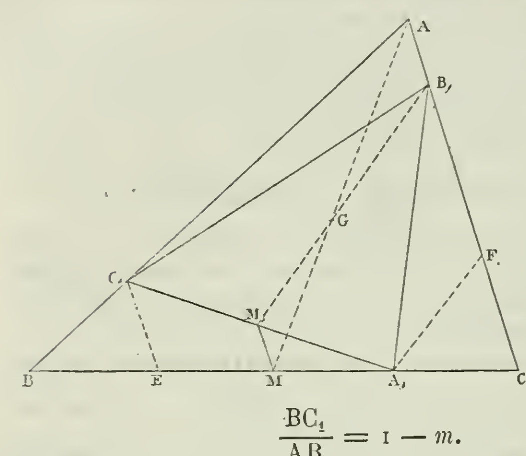
L'expression a donc dû passer par un minimum. Or le produit $m(1 - m)$ est un produit de deux facteurs dont la somme est constante et égale à 1. Il atteint donc son maximum pour $m = 1 - m = \frac{1}{2}$.

Alors la limite considérée est minima et égale à

$$\frac{S}{\frac{3}{4}} = \frac{4S}{3}.$$

4° Reprenons les triangles ABC, $B_1C_1A_1$, et menons par les sommets A et B_1 les médianes AM et B_1M_1. Ces lignes

se coupent en un certain point G. Par les sommets C_1 et A_1 du second triangle, menons des parallèles aux côtés opposés du premier, C_1E et A_1F. Les triangles C_1BE et FA_1C étant semblables à ABC, on a :



$$\frac{FA_1}{AB} = \frac{CA_1}{CB} = 1 - m,$$

$$\frac{BC_1}{AB} = 1 - m.$$

D'où

$$\frac{BC_1}{AB} = \frac{FA_1}{AB}$$

et par suite

$$BC_1 = FA_1.$$

Les triangles considérés sont donc égaux et

$$BE = A_1C.$$

Donc le point M est le milieu de EA_1.

La ligne MM_1 est parallèle à C_1E et par suite à AC. D'ailleurs

$$MM_1 = \frac{C_1E}{2}$$

et comme

$$\frac{C_1E}{AC} = \frac{BC_1}{BA} = 1 - m,$$

$$MM_1 = \frac{AC(1 - m)}{2}.$$

De plus les triangles semblables donnent la proportion

$$\frac{M_1M}{AB_1} = \frac{GM}{GA} = \frac{GM_1}{GB_1}$$

et comme

$$AB_1 = AC(1 - m),$$

$$\frac{M_1M}{AB_1} = \frac{1}{2} = \frac{GM}{GA} = \frac{GM_1}{GB_1}.$$

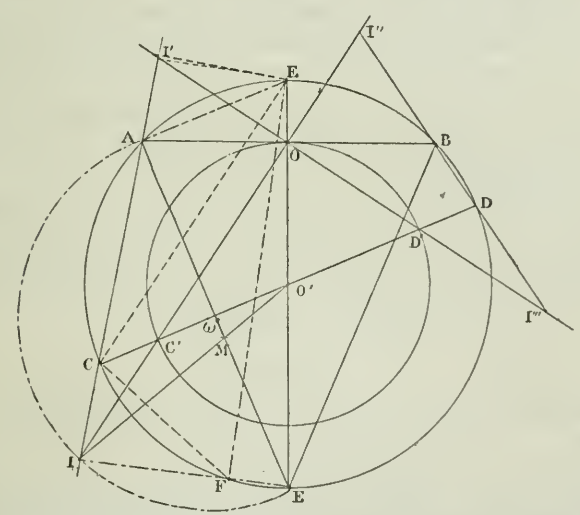
Le point G est donc au tiers de la ligne MA et de la ligne M_1B_1 c'est-à-dire que les médianes des deux triangles concourent au même point. Il en sera donc de même pour les triangles successifs $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ ...

Nota. — Une autre solution nous a été adressée par M. Vigarié, à Toulouse.

QUESTION 112.

Solution par M. L. Madiot, élève à l'Institution Sainte-Marie de Besançon.

On considère deux cercles concentriques Δ *et* Δ', *ayant pour centre commun* O'. *On mène une tangente* AB *à* Δ', *rencontrant* Δ *en* A *et* B, *et touchant* Δ' *en* O. *Un diamètre rencontre* Δ *en* C *et* D, *et* Δ' *en* C' *et* D'. *On mène* OC' *et* OD'; *ces lignes rencon-*



trent AC *aux points* I *et* I', *et* BD *en* I'', I''' : — 1° *chacun des points* I, I', I'', I''' *décrit un cercle quand* CD *tourne autour de* O'; — 2° *le milieu de* AC *coïncide avec le milieu de* II'; — 3° *les triangles* IOI', I''OI''' *sont équivalents*; — 4° *le maximum de la surface de ce triangle a lieu quand* CD *est parallèle à* AB; —

5° *les points* I, I′, I″, I‴ *sont sur un cercle concentrique à* Δ. *Ce cercle est maximum quand* CD *est parallèle à* AB.

1° Menons le diamètre EE′ passant par le point O, et joignons E′C. Cette droite est évidemment parallèle à O′C.

Tirons la corde AE; les deux angles AIO et AEE′ égaux à un même troisième ACE′ sont égaux entre eux; d'où l'on voit que le point I décrit la circonférence circonscrite au triangle rectangle AOE.

On reconnaît de même que chacun des points I, I′, I″, I‴ se trouve sur la circonférence circonscrite à chacun des triangles AOE′, E′OB, BOE.

2° La droite IE coupant en F le cercle Δ, joignons E′F; la figure IFE′I′ est un rectangle, et l'on a IF = I′E′.

Mais les cordes CF, AE′ qui sous-tendent des arcs compris entre parallèles sont égales, et les triangles rectangles égaux AI′E′, CIF nous donnent CI = AI′.

On voit donc que les milieux de AC et de II′ coïncident.

La même propriété se démontre pour BD et I″I‴.

3° Les deux angles AIO, OI‴B respectivement égaux à AEO, et à OEB, sont égaux entre eux, car l'égalité des deux derniers est évidente.

Les points I, I′, I″, I‴ sont donc sur une même circonférence.

Supposons que les triangles IOI′, I″OI‴ soient équivalents, on aurait

$$OI.\ OI' = OI''.\ OI''';$$

mais on a déjà

$$OI.\ OI'' = OI'.\ OI''':$$

or ces deux équations ne sont vraies simultanément que quand

$$OI = OI''' \text{ et } OI'' = OI'.$$

Du reste, quand cette condition est remplie, la droite OO′ est bissectrice de C′OD′ et CD est parallèle à AB.

4° La droite II′ toujours égale à E′F n'est jamais supérieure à EE′; de plus dans le triangle IOI′ la hauteur relative à II′ est au plus égale à AO.

Le triangle IOI′ a donc pour valeur maxima la surface

EAE′, et n'atteint ce maximum que quand CD est parallèle à EE′.

Quand cette condition est remplie, on a

$$ACO' = OO'D = OBI''.$$

Or l'égalité des deux derniers angles ne peut exister que quand l'arc BD est nul, c'est-à-dire quand CD passe par le point B. Le triangle IOI′ est donc maximum quand CD passe par le point B.

5° Nous avons vu que les points I, I′, I″, I‴ sont sur une même circonférence, et nous avons démontré que les milieux de II′ et de I″I‴ coïncident respectivement avec les milieux de AC et de BD.

D'après cela, le centre du cercle I, I′, I″, I‴, se trouvant à l'intersection des perpendiculaires élevées sur les milieux de AC et de BD, coïncide avec le centre de Δ.

Ce cercle est maximum quand le point I est sur le rayon perpendiculaire au diamètre AE, car alors il enveloppe les cercles décrits par chacun des points I, I′, I″, I‴.

Quand l'angle AMO′ est droit, le point M est le centre des cercles I, et l'on a

$$IAE = \frac{1}{2} IME = 45^\circ$$

et comme IOE = IAE, IOE = 45, et CD est parallèle à AB.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Paris (avril 1884).

Calculer la surface du polygone régulier de 24 côtés inscrit dans un cercle de rayon égal à l'unité.

— Trouver graphiquement l'angle de deux droites dont on connaît les projections, et qui se coupent sur la ligne de terre.

— Calculer la base et la hauteur d'un triangle isoscèle, connaissant les volumes V et V′ engendrés par le triangle

tournant successivement autour de sa base et autour d'un des deux autres côtés.

— Trouver tous les arcs x qui satisfont à l'équation

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1.$$

— Le triangle équilatéral ABC, dont le côté AB a pour longueur a, tourne autour de l'axe Ax, mené dans son plan par le sommet A perpendiculairement au côté AB. Exprimer, au moyen de a, le volume engendré par la rotation de ce triangle autour de Ax.

— On considère un levier coudé AOB, mobile autour du point O, dans lequel la longueur OA est double de OB. La branche OB est horizontale, et l'angle AOB est de 150°. Quel doit être le rapport des deux poids P et Q, suspendus aux extrémités A et B, pour que le levier soit en équilibre?

— Les angles d'un hexagone sont égaux; les longueurs de ses côtés sont alternativement a et b. Exprimer, au moyen de a et de b, le volume décrit par la rotation de l'hexagone autour de l'un des côtés dont la longueur est a.

— Calculer les solutions des équations simultanées

$$x^2 - y^2 = 5\,; \quad xy = 6.$$

— Étant donné $\operatorname{tg} a = \frac{4}{3}$, trouver

$$\sin a,\ \cos a,\ \sin 2a,\ \cos 2a,\ \operatorname{cotg} 2a.$$

Poitiers.

Étant donné un cône de révolution à deux nappes, et deux sections parallèles AB, A'B', dont la distance CC' soit égale à une quantité donnée h, on déplace les plans parallèles en leur conservant une direction fixe et la même distance. 1° Trouver l'expression du volume ainsi formé; 2° étudier les variations de la fonction.

Lille.

Deux montagnes ayant l'une 1200 mètres d'altitude et l'autre 2000 mètres, sont dans deux îles voisines, et la distance de leurs sommets est de 36 kilomètres. Or, du sommet de l'une on voit l'autre émerger juste au-dessus de l'hori-

zon. Quel est d'après cela le rayon de la terre supposé sphérique ?

Toulouse.

On donne un triangle isoscèle ABO, rectangle en B. Du sommet O comme centre, on décrit un cercle passant par le point B. On mène du point A une sécante ACD sur laquelle on abaisse du point O la perpendiculaire OF, et l'on mène les droites BC, BD. On représente par a le côté AB, et par x l'angle DAB.

1° Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à

$$\frac{1}{2} a \,.\, \mathrm{CD} \sin x.$$

2° Calculer en fonction des quantités a et x les longueurs AF, AC, AD, CD, et l'aire du triangle BCD.

3° Déterminer l'angle x de telle façon que cette aire soit maxima.

Besançon.

Connaissant le volume $\frac{\pi a^3}{3}$, et la surface totale πb^2, d'un cône droit SAB, déterminer le rayon de base R et la hauteur h. Condition de possibilité. Quelle relation faut-il supposer entre les données a et b pour que le triangle SAB, obtenu en coupant le cône par un plan passant par l'axe, soit équilatéral ?

— Discuter les valeurs des deux trinômes

$$\mathrm{A} = x^2 - 5x + 4$$
$$\mathrm{B} = x^2 - 8x + 15$$

et de leur rapport lorsque x varie, par valeurs réelles, de $-\infty$ à $+\infty$.

Marseille.

Sur la circonférence d'un cercle de 3 mètres de rayon, on prend un arc ABC, égal au dixième de la circonférence. On demande d'évaluer, en centimètres carrés, l'aire du segment compris entre l'arc ABC et la corde AC. Déduire de cette aire celle que l'on obtiendrait si le cercle avait 6 mètres de rayon.

Nancy.

On donne un plan PαP′, et une droite $(ab, a'b')$ qui rencontre le plan en (m, m'); mener par ce point (m, m') une droite perpendiculaire à $(ab, a'b')$ et situé dans le plan PαP′.

QUESTIONS PROPOSÉES

150. — Un angle constant tourne autour d'un point fixe A, pris sur un cercle, et les côtés rencontrent le cercle en B et C. Soient M, N, P les pieds des hauteurs du triangle ABC. Démontrer que deux des côtés du triangle MNP sont tangents à des cercles fixes, et que le troisième se déplace parallèlement à lui-même. *(Weill.)*

151. — Les extrémités A et B d'une droite AB, de longueur constante, glissent sur deux droites fixes OA, OB. Trouver le lieu du centre du cercle des neuf points du triangle OAB. *(Weill.)*

152. — Démontrer l'identité

$$x^{4n+2} + y^{4n+2} = [x^{2n+1} - 2x^{2n-1}y^2 + 2x^{2n-3}y^4 - \dots \pm 2xy^{2n}]^2 + [y^{2n+1} - 2y^{2n-1}x^2 + 2y^{2n-3}x^4 - \dots \pm 2yx^{2n}]^2$$

(E. Catalan.)

153. — Un angle constant BAC tourne autour de son sommet fixe A; trouver la position de l'angle pour laquelle il intercepte sur un cercle donné dans son plan une corde de longueur connue.

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER, — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE 20, PARIS. — 15034-4.

CONCOURS DE L'ÉCOLE SAINT-CYR EN 1884

Composition française (Durée *deux heures et demie*).

La nationalité française. — Elle date de loin. — Contemplons avec un religieux respect les vieux âges où elle s'est formée. — Ne soyons pas des fils ingrats. — Pour persévérer dans la grandeur, un peuple a besoin d'une tradition. — L'unité nationale avait été formée avant 1789; que n'ont pas fait pour elle François Ier, Henri IV, Louis XIII, Louis XIV! — Honorer le passé de la France, c'est augmenter l'amour pour la patrie commune, et préparer des citoyens dignes de continuer sa gloire séculaire.

Thème allemand (Durée *deux heures*).

Lorsque Cambyse, pour surprendre les Éthiopiens, leur envoya des ambassadeurs et des présents, tels que les Perses les donnaient, de la pourpre, des bracelets d'or et des parfums, ils se moquèrent de ses présents, où ils ne voyaient rien d'utile à la vie, aussi bien que de ses ambassadeurs, qu'ils prirent pour ce qu'ils étaient, c'est-à-dire pour des espions. Mais leur roi voulut aussi faire un présent à sa mode au roi de Perse, et prenant en main un arc qu'un Perse eût à peine soutenu, loin de le pouvoir tirer, il le banda en présence des ambassadeurs, et leur dit : « Voici le conseil que le roi des Éthiopiens donne au roi de Perse : quand les Perses se pourront servir aussi aisément que je viens de faire d'un arc de cette grandeur et de cette force, qu'ils viennent attaquer les Éthiopiens, et qu'ils amènent plus de troupes que n'en a Cambyse. »

Mathématiques (durée *trois heures*).

1. — On donne un angle aigu ZOX et un point A sur OX ; d'un point M pris sur OX, entre O et A, on abaisse la perpendiculaire MP sur OZ et l'on considère la longueur y

donnée par la formule $y = \sqrt{OM \times MA + 2MP^2}$; on demande comment y varie quand le point M se déplace sur OX de O jusqu'à A. — Courbe figurative.

2. — Dans un triangle isoscèle ABC, on connaît la base a, la bissectrice β de l'angle à la base B; calculer l'angle $\frac{B}{2}$. Discuter; rendre calculable par logarithmes la formule obtenue.

3. — Connaissant dans un triangle ABC le côté a et les angles B et C, calculer la hauteur abaissée sur le côté a. Données numériques : $a = 13908,5$, $B = 56^\circ\ 15'\ 47'',5$. $C = 39^\circ\ 16'\ 52''$.

Géométrie descriptive (durée *deux heures et demie*).

On donne, dans le plan vertical de projection, un cercle tangent à XY, dont le rayon égale 31 millimètres ; le pentagone régulier inscrit dans ce cercle, et dont un sommet A est sur XY, est la base d'un prisme droit. Un cône droit dont le sommet est situé dans le plan de profil du point A à 84 millimètres au-dessus du plan horizontal, et à 69 millimètres en avant du plan vertical, a pour base, sur le plan horizontal, un cercle dont le rayon est de 60 millimètres. On demande l'intersection du cône et du prisme. On indiquera le tracé des constructions effectuées pour trouver un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point.

Dans la mise à l'encre, on représentera la portion du prisme qui est contenue dans le cône.

Solution des compositions de mathématiques.

1. — *On donne un angle aigu* ZOX *et un point* A *sur* OX. *D'un point* M *pris sur* OX, *entre* O *et* A, *on abaisse la perpendiculaire* MP *sur* OZ, *et l'on considère la longueur* y *donnée par la formule*

$$y = \sqrt{OM \times MA + 2MP^2};$$

on demande comment y *varie quand le point* M *se déplace sur* OX *de* O *jusqu'à* A. — *Courbe figurative.*

Soient α l'angle ZOX; d la distance OA; x la distance OM; on a

$$OM = x;\ MA = (d - x);\ MP = x \sin \alpha.$$

Donc on a pour la fonction considérée

$$y = \sqrt{x(d - x) + 2x^2 \sin^2 \alpha}$$

ou

$$y = \sqrt{dx - x^2 \cos 2\alpha}$$

Pour étudier cette fonction, nous allons élever les deux membres au carré; nous aurons l'équation

$$x^2 \cos 2\alpha - dx + y^2 = 0.$$

Les seules valeurs que puisse prendre la fonction y^2 sont celles qui donnent pour x des valeurs réelles, ce qui nous donne la condition

$$d^2 - 4y^2 \cos 2\alpha \geq 0.$$

A chaque valeur de y satisfaisant à cette condition correspondent deux valeurs réelles pour x; pour qu'elles conviennent au problème, il faut qu'elles soient positives, et plus petites que d. Nous allons distinguer plusieurs cas :

En premier lieu, l'angle 2α est supérieur à 90°, ou α supérieur à 45°. Alors les racines sont de signes contraires. Il en résulte que l'on ne doit prendre que la racine positive. Donc, à chaque valeur de y correspondra une seule valeur de x. Il est facile de voir, dans ce cas, que, inversement, à chaque valeur de x comprise entre O et d correspondra une valeur réelle pour y; car, en appelant α' le complément de α, l'expression devient

$$y = \sqrt{x^2 \cos 2\alpha' + dx};$$

on suppose que l'on prend pour y seulement la valeur absolue du radical.

Cela posé, il est aisé de trouver la variation de la fonction. En effet, si nous élevons au carré, la fonction peut se mettre sous la forme

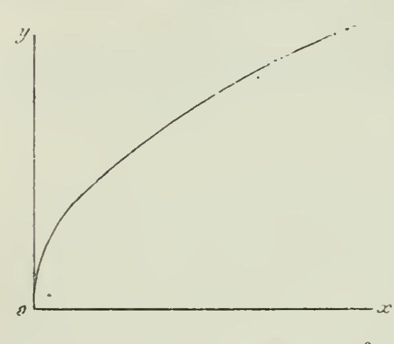
$$y^2 = \cos 2\alpha'\left(x + \frac{d}{2 \cos 2\alpha'}\right)^2 - \frac{d^2}{4 \cos 2\alpha'},$$

et on voit facilement que, x croissant de o à d, y va toujours en croissant. Si l'on cherche à construire dans ce cas la courbe figurative, on voit que son ordonnée va toujours en croissant depuis zéro jusqu'à une valeur particulière, qu'il

serait facile de calculer; il est important de chercher vers quelle limite tend le rapport $\frac{y}{x}$ pour $x = 0$: or, la fraction peut se mettre sous la forme

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{d}{x} - \cos 2\alpha;$$

donc le rapport $\frac{y}{x}$ tend vers ∞ quand x tend vers zéro. On en déduit que la courbe présente la forme indiquée par la figure ci-contre.



En second lieu, l'angle α est égal à 45°; alors

$$\cos 2\alpha = 0,$$

et la fonction devient

$$y = \sqrt{dx};$$

cette fonction va également toujours en croissant avec x; et comme le rapport $\frac{y^2}{x^2}$ est égal à $\frac{d}{x}$, il va encore en augmentant lorsque x tend vers zéro. La courbe présente encore une forme analogue à celle de la précédente; du reste, dans ce cas, l'expression prenant la forme

$$y^2 = dx,$$

onvoit que la courbe est un arc de parabole compté à partir de son sommet.

En troisième lieu l'angle α est inférieur à 45°. Dans ce cas, l'équation a ses deux racines de même signe. Nous ne pouvons donner à y^2 que des valeurs inférieures à

$$\frac{d^2}{4 \cos 2\alpha}.$$

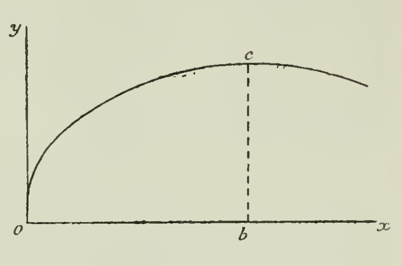
Donc le maximum correspond à la valeur

$$y^2 = \frac{d^2}{4 \cos 2\alpha},$$

qui donne la valeur

$$x = \frac{d}{2 \cos 2\alpha}.$$

Si $\cos 2\alpha < \frac{1}{2}$, c'est-à-dire si l'on a $2\alpha > 60°$, cette valeur de x est supérieure à d. Il en résulte que la fonction ne passe pas par un maximum pour une valeur de x répondant aux conditions du problème; si au contraire $2\alpha < 60°$, il y a un maximum de y pour une valeur de x contenue dans les limites de l'énoncé. La courbe présente alors la forme (2). Le point b correspond à la valeur de x qui donne le maximum; la valeur correspondante de y est bc.



2. — *Dans un triangle isoscèle* ABC, *on connaît la base* a, *la bissectrice* β *de l'angle à la base* B *; calculer l'angle* $\frac{B}{2}$. *Discuter ; rendre calculable par logarithmes la formule obtenue.*

Dans le triangle formé par la base, la bissectrice et le segment du côté adjacent à la base, on a, puisque deux angles ont pour valeurs respectives B et $\frac{B}{2}$:

$$\frac{\sin B}{\sin \frac{3B}{2}} = \frac{\beta}{a}.$$

En remplaçant $\sin B$ et $\sin \frac{3B}{2}$ par leur valeur en $\sin \frac{B}{2}$ et $\cos \frac{B}{2}$, on a l'équation

$$\frac{2 \cos \frac{B}{2}}{3 - 4 \sin^2 \frac{B}{2}} = \frac{\beta}{a}.$$

Ou, en exprimant tout en fonction du cosinus :

$$4 \beta \cos^2 \frac{B}{2} - 2a \cos \frac{B}{2} - \beta = 0.$$

Cette équation a deux racines de signes contraires.

La valeur positive seule est acceptable, parce que l'angle $\frac{B}{2}$ est nécessairement aigu; il est même inférieur à 45°; donc il faut, pour que le problème admette une solution, que, si l'on substitue à la place de $\cos\frac{B}{2}$ la valeur $\frac{\sqrt{2}}{2}$, on trouve un résultat négatif.

Cette substitution donne

$$\beta - a\sqrt{2} < 0.$$

D'autre part, le cosinus devant avoir une valeur inférieure à 1, on aura, en remplaçant le cosinus par 1, une valeur positive, ce qui donne

$$3\beta - 2a > 0.$$

Ainsi, puisque les quantités a et β sont positives, on a les conditions suivantes

$$2\beta^2 < 4a^2 < 9\beta^2.$$

On peut rendre cette formule calculable par logarithmes très facilement, en posant

$$2\cos\frac{B}{2} = z.$$

L'équation devient

$$\beta z^2 - az - \beta = 0.$$

Si on la compare à l'équation qui donne $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ en fonction de $\operatorname{tg}\varphi$, savoir

$$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\frac{2\varphi}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \operatorname{tg}\varphi = 0.$$

on voit que si l'on pose

$$\frac{\beta}{\operatorname{tg}\varphi} = -\frac{a}{2},$$

ou

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2\beta}{a},$$

on prendra la valeur positive de $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, et on en tirera par

logarithmes la valeur du cosinus de l'angle $\frac{B}{2}$; on aura par suite la valeur de $\frac{B}{2}$.

3. — *Connaissant dans un triangle* ABC *le côté* a *et les angles* B *et* C, *calculer la hauteur abaissée sur le côté* a. *Données numériques :*

$$a = 13908,5;$$
$$B = 56°15'47'',5$$
$$C = 39°16'52''.$$

On a

$$h = b \sin C;$$

or

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A};$$

donc

$$h = \frac{a \sin B \sin C}{\sin A}.$$

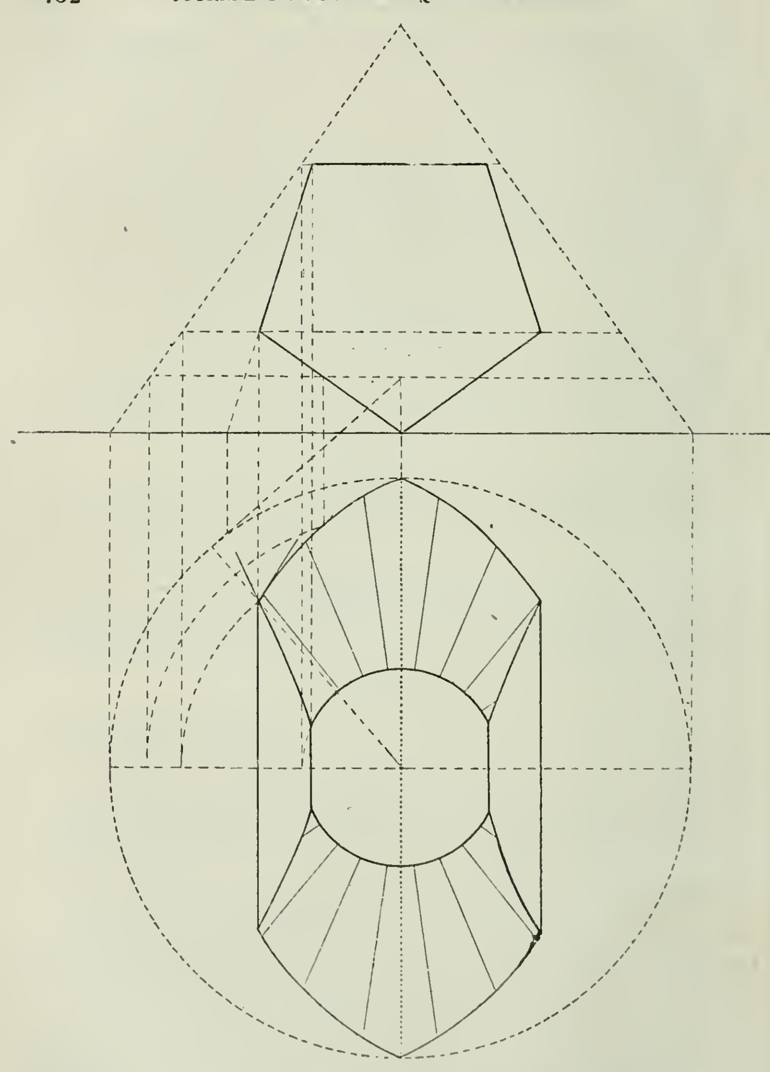
En remplaçant les quantités données par leurs valeurs, on trouve

$$h = 7357.3.$$

Solution de la composition de géométrie descriptive.

L'intersection comprend des arcs de courbe symétriques deux à deux par rapport au méridien de profil, et au méridien de front du cône.

Il n'y a pas lieu de nous arrêter à trouver un point quelconque et la tangente en ce point ; ce qui était plus important était de déterminer les tangentes aux arcs de courbe aux points où l'on passe d'une courbe à une autre. Cette détermination, utile pour trouver la variation de direction des courbes en ces points, ne présente du reste pas plus de difficulté que pour un point quelconque ; on cherchera la trace horizontale du plan tangent en ce point, et les intersections de cette trace avec les traces horizontales des deux faces passant par le point considéré, donneront des points des tan-



gentes, points qu'il suffira de joindre au point donné pour avoir les deux tangentes. Voici, réduite de deux tiers environ, l'épure que l'on devait trouver.

CONCOURS DE L'ÉCOLE NAVALE EN 1884

Arithmétique et algèbre.

1. — Déterminer combien il y a de nombres moindres que 60, et premiers avec lui.

Donner et démontrer la formule permettant de résoudre cette question d'une manière générale.

2. — Un industriel a emprunté, le 1er janvier 1880, une somme de 33640 francs, dont il s'est acquitté en deux paiements, égaux chacun à 19948 fr. 10 c. Le premier de ces paiements a été effectué le 1er janvier 1882, et le second, le 1er janvier 1884. On demande à quel taux exact l'emprunt a été fait, sachant que, pour ces sommes, on a tenu compte des intérêts composés.

Géométrie.

1. — Démontrer que le rapport d'une circonférence à son diamètre est un nombre constant. Quelles sont les différentes méthodes que l'on peut employer pour calculer ce nombre? — Principes sur lesquels repose la méthode des isopérimètres.

2. — On a deux circonférences concentriques A et B, elles sont partagées en un même nombre n de parties égales, soient A_1, A_2, A_3 ... A_n, les points de division de la première; B_1, B_2, B_3 ... B_n, les points de division de la seconde. On joint A_1B_1, A_2B_2, ... A_nB_n. Soient C_1 le point de rencontre de A_1B_1 et de A_2B_2; C_2 le point de rencontre de A_2B_2 et A_3B_3, etc. Démontrer que le polygone $C_1C_2C_3$ ... C_n est régulier. Chercher comment varie la surface du polygone quand on fait tourner la circonférence B autour de son centre, la circonférence A étant fixe, et les points de division restant les mêmes; maximum et minimum.

Géométrie descriptive.

Tracer les projections d'un tétraèdre SABC satisfaisant aux conditions suivantes. On donne les projections (a, a') de A ($a\alpha = 0{,}040$; $a'\alpha = 0{,}060$). Le plan prolongé de la base ABC fait un angle de 40° avec la partie postérieure du plan horizontal, et passe par un point donné ω de xy ($\alpha\omega = 0{,}110$). Le sommet B est dans le plan horizontal, à l'intersection de la perpendiculaire abaissée de A sur la trace horizontale du plan prolongé de ABC. L'arête SC est perpendiculaire au plan de la base ABC, et son prolongement coupe xy en un point donné γ ($\alpha\gamma = 0{,}040$). La longueur de l'arête SC est égale à 0,070, et S est supposé au-dessus du plan de la base.

Composition en narration.

Funérailles de Louis IX à l'abbaye de Saint-Denis.

La Basilique, non encore achevée, avait reçu, depuis quelques années seulement, les sépulcres des rois, dispersés jusqu'alors de divers côtés. Avec le cercueil de Louis IX, rapporté de Tunisie par son fils Philippe, elle reçut ceux de cinq princes ou princesses de la famille royale, morts d'accidents ou de maladies pendant le retour des croisés à travers l'Italie. On dira quelles furent, pendant la cérémonie funèbre, les impressions de la foule accourue des campagnes et des villes voisines, pour rendre un dernier honneur au saint roi.

Les chevaliers et les clercs déploraient l'issue malheureuse d'une croisade dont ils s'étaient promis de tout autres résultats.

Quelques-uns se demandaient si le doigt de Dieu n'était pas là, si tant de calamités n'étaient pas la condamnation définitive de ces lointaines expéditions.

Composition de thème anglais.

Nous avons levé l'ancre à trois heures du matin. Un vent maniable nous a laissés approcher de la pointe du continent

qui avance dans la mer d'Athènes. Mais là, une nouvelle tempête nous a assaillis plus violente encore que la veille; nous avons été en un instant séparés des deux bâtiments qui naviguaient de conserve avec nous. La mer est devenue énorme, nous roulons d'un abîme dans l'autre, les vergues trempant dans la vague et l'écume jaillissant sur le pont. Le capitaine s'obstine à doubler le cap; après plusieurs heures de manœuvres impuissantes, il réussit; nous voilà en pleine mer, le vent est si fort que le brick dérive considérablement.

ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE D'ANALYSE INDÉTERMINÉE

DU PREMIER ET DU SECOND DEGRÉ

Par M. **Ferrent.**

(*Suite*, voir p. 121.)

---

8. — Avant de démontrer l'exactitude des formules (29), nous allons faire à leur sujet quelques remarques.

D'abord, les constantes qui entrent dans les formules (29) peuvent toujours être déterminées, lorsqu'on suppose que l'équation proposée peut être résolue.

Ces constantes sont en effet, ou des plus grands communs diviseurs, qui peuvent toujours être déterminés, ou des premières solutions d'équations successives pouvant toujours être résolues : car la première, qui est la proposée, peut être résolue par hypothèse, et toutes les autres ont pour coefficients des nombres entiers qui ont été d'abord divisés par leur plus grand commun diviseur.

9. — Considérons l'équation proposée (4) et les n formules (29) comme $n + 1$ équations entre $n + n - 1$ ou $2n - 1$ inconnues, savoir, les n inconnues $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, et les $n - 1$ indéterminées $t_1, t_2, t_3, \ldots t_{n-1}$.

L'équation proposée peut être obtenue par l'élimination des indéterminées des formules (29).

En effet, si nous ajoutons membre à membre toutes les formules (29), après avoir multiplié la première par a_1, la deuxième par a_2, et ainsi des autres, on voit que toutes les indéterminées disparaissent à cause des relations (30), et on retombe sur l'équation proposée.

10. — Il résulte de là que l'une quelconque des formules (29) peut être obtenue par une élimination entre la proposée et les $n - 1$ autres formules.

En effet, si de l'équation proposée on retranche la somme des formules (29), moins l'une d'elles, chacune de ces formules ayant été multipliée au préalable par les mêmes nombres indiqués au numéro précédent, la différence sera la formule omise, multipliée par un nombre qui ne change pas sa valeur comme équation.

11. — Si, ayant donné aux inconnues de l'équation proposée, x_1, x_2, ... x_n, des valeurs satisfaisant à cette équation, nous portons ces valeurs dans les premiers membres des formules (29), dans le but d'assigner les valeurs des indéterminées qui y correspondent, nous aurons n équations pour déterminer les $n - 1$ inconnues t_1, t_2, ... t_{n-1}. Pour que cette détermination soit possible, il est indispensable que l'une de ces équations soit la conséquence des autres.

Or, il résulte des remarques précédentes que cette circonstance se présente. En effet, puisque l'une quelconque des formules est la différence entre la proposée et la somme des autres formules, multipliées respectivement par certains nombres, et que, dans le cas présent, la proposée est réduite à l'égalité de deux nombres, une formule quelconque, dans laquelle on aura substitué au premier membre la valeur qui lui convient, sera la différence entre l'égalité et la somme des autres formules, multipliées comme il a été dit, et dans lesquelles on aurait remplacé les premiers membres par leurs valeurs ; c'est-à-dire qu'une formule quelconque résultera de $n - 1$ autres, et pourra être supprimée dans la recherche de la valeur des indéterminées.

12. — Il est, du reste, facile de s'assurer, par la forme des formules (29), que les valeurs des quantités t_1, t_2,... t_{n-1}, qui correspondent à une solution de la proposée, ne tombent jamais dans aucun cas d'exception, c'est-à-dire qu'elles ne sont jamais ni infinies, ni indéterminées.

En effet, la première ne contient que la quantité t_1, affectée du coefficient ρ_1, qui ne peut être nul; la deuxième, en y remplaçant t_1 par la valeur qui vient d'être trouvée, ne contient que la quantité t_2, multipliée par un coefficient semblable; chacune des autres formules donnera ainsi la valeur d'une nouvelle quantité, laquelle valeur ne sera ni infinie ni indéterminée, jusqu'à la $n - 1^e$ qui contiendra la seule quantité t_{n-1}, multipliée par le coefficient $\dfrac{a_n}{\rho_1\rho_2 \cdots \rho_{n-2}}$, qui ne peut être nul. Quant à la dernière formule, la substitution des valeurs trouvées la réduira à une identité, et il sera inutile d'y avoir égard.

13. — Nous pouvons maintenant démontrer l'exactitude des formules (29).

A cet effet, nous devons faire voir :

1° Que toutes les valeurs que ces formules donneront aux inconnues x_1, x_2, ... x_n, satisfont à la proposée ;

2° Que toutes les valeurs qui satisfont à la proposée sont données par ces formules.

Pour cette seconde partie de la démonstration, il suffira de faire voir que les valeurs des indéterminées (que nous savons déjà être assignables), qui correspondent à une solution quelconque, sont entières; car il résultera de là que les valeurs entières ainsi trouvées étant données aux indéterminées reproduiront bien cette solution.

14. — La première partie de la démonstration est une conséquence des remarques précédentes.

En effet, l'équation proposée résultant de l'élimination des indéterminées entre les n formules (29), tous les nombres qui, substitués aux $2n - 1$ inconnues des formules, satisfont à celles-ci, satisfont aussi à la proposée; or, les nombres

substitués aux indéterminées et les valeurs qui en résultent pour les inconnues de la proposée satisfont à toutes les formules; les valeurs trouvées pour les inconnues satisferont donc aussi à la proposée.

15. — La seconde partie de la démonstration consiste à faire voir que, si l'on donne aux inconnues de la proposée des valeurs quelconques qui la résolvent, les valeurs correspondantes des indéterminées seront entières.

Prenons d'abord la première formule

$$x_1 = \alpha_1 + \rho_1 t_1 \qquad (31)$$

Considérons les lettres $x_1, x_2, \ldots x_n$, comme représentant, non plus des inconnues, mais des nombres qui satisfont à la proposée, et retranchons de l'égalité (4) la première des relations (30) :

$$a_1(x_1 - \alpha_1) + a_2(x_2 - \alpha_2) + \ldots + a_n(x_n - \alpha_n) = 0. \qquad (32)$$

ρ_1, on se le rappelle, est le plus grand commun diviseur des nombres a_2, a_3, ... a_n ; ρ_1 divise donc tous les termes de (32), sauf le premier; ρ_1 doit donc diviser ce premier terme, $a_1(x_1 - \alpha_1)$, et, comme il est, par hypothèse, premier avec α_1, ρ_1 divise $x_1 - \alpha_1$. Donc la valeur de t, tirée de l'équation (31), sera entière.

Prenons maintenant la deuxième formule

$$x_2 = \alpha_2 + \beta_2 t_1 + \rho_2 t_2. \qquad (33)$$

Multiplions chaque membre par a_2 :

$$a_2 x_2 = a_2\alpha_2 + a_2\beta_2 t_1 + a_2\rho_2 t_2. \qquad (34)$$

Ajoutons la première des formules (29), multipliée par a_1 :

$$a_1(x_1 - \alpha_1) + a_2(x_2 - \alpha_2) - (a_1\rho_1 + a_2\beta_2)t_1 = a_2\rho_2 t_2. \qquad (35)$$

Les deux premiers termes de l'équation (35) peuvent être transformés au moyen de la relation (32); et le coefficient de t_1, au moyen de la deuxième des relations (30). On obtient ainsi, en divisant en outre par ρ_1 :

$$-\frac{a_3}{\rho_1}(x_3 - \alpha_3) - \frac{a_4}{\rho_1}(x_4 - \alpha_4) - \ldots - \frac{a_n}{\rho_1}(x_n - \alpha_n)$$
$$+\left(\frac{a_3}{\rho_1}\beta_3 + \frac{a_4}{\rho_1}\beta_4 + \ldots + \frac{a_n}{\rho_1}\beta_n\right)t_1 = \frac{a_2}{{}_1\rho}\rho_2 t_2; \qquad (36)$$

divisons également (34) par ρ_1 :

$$\frac{a_2}{\rho_1} x_2 - \frac{a_2}{\rho_1} \alpha_2 - \frac{a_2}{\rho_1} \beta_2 t_1 = \frac{a_2}{\rho_1} \rho_2 t_2. \qquad (37)$$

Les deux équations (36) et (37), qui ne contiennent que des termes entiers, donnent l'expression de $\frac{a_2}{\rho_1} \rho_2 t_2$ sous deux formes différentes.

Tous les coefficients des termes du premier membre de (36) sont divisibles par ρ_2, qui est le plus grand commun diviseur des $n - 2$ derniers coefficients de la proposée, divisés au préalable par ρ_1; tous les termes du premier membre de (37) sont divisibles par $\frac{a_2}{\rho_1}$.

La valeur unique du second membre est donc divisible à la fois par ρ_2 et $\frac{a_2}{\rho_1}$. Mais ρ_2 et $\frac{a_2}{\rho_1}$ sont premiers entre eux : car, s'ils avaient un diviseur commun, ce diviseur diviserait les $n - 1$ derniers coefficients de la proposée, divisés d'abord par ρ_1. Or, ceci est impossible, puisque ρ_1 est le plus grand commun diviseur de ces $n - 1$ coefficients. Cette valeur unique du second membre est donc divisible par le produit $\frac{a_2}{\rho_1} \rho_2$ et t_2 est entier.

Maintenant que nous avons prouvé que les valeurs de t_1 et t_2 sont entières, supposons que nous ayons reconnu qu'il en est de même pour les valeurs des autres indéterminées t_3, t_4, etc., jusques et y compris t_k, et démontrons que l'indéterminée suivante, t_{k+1}, aura aussi une valeur entière.

Par un raisonnement connu, cette démonstration suffira pour faire voir que toutes les indéterminées auront des valeurs entières.

La valeur de t_{k+1} sera donnée par la $k + 1^e$ des formules (29) :

$$x_{k+1} = \alpha_{k+1} + \beta_{k+1} t_1 + \gamma_{k+1} t_2 + \cdots + \lambda_{k+1} t_k + \rho_{k+1} t_{k+1}. \quad (38)$$

Transposons tous les termes du second membre, sauf le dernier. multiplions par a_{k+1}, et divisons par le produit de $\rho_1\rho_2 \ldots \rho_k$, que nous représenterons par π, pour abréger :

$$\frac{a_{k+1}}{\pi}\left[(x_{k+1}-\alpha_{k+1})-\beta_{k+1}t_1-\gamma_{k+1}t_2-\dots-\lambda_{k+1}t_k\right]$$
$$=\frac{a_{k+1}}{\pi}\rho_{k+1}t_{k+1}. \qquad (39)$$

La sommes des $k+1$ premières formules (29), multipliées respectivement, savoir : la première, par a_1; la deuxième, par a_2, etc., et enfin, la $k+1^e$, par a_{k+1}, nous donnera

$$\left.\begin{array}{l} a_1(x_1-\alpha_1)+a_2(x_2-\alpha_2)+\dots+a_{k+1}(x_{k+1}-\alpha_{k+1}) \\ \quad -(a_1\rho_2+a_2\beta_2+a_3\beta_3+\dots+a_{k+1}\beta_{k+1})t_1 \\ \quad -(a_2\rho_2+a_3\gamma_3+a_4\gamma_4+\dots+a_{k+1}\gamma_{k+1})t_2 \\ \quad -(a_3\rho_3+a_4\delta_4+a_5\delta_5+\dots+a_{k+1}\delta_{k+1})t_3 \\ -\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -(a_k\rho_k+a_{k+1}\lambda_{k+1})t_k=a_{k+1}\rho_{k+1}t_{k+1}. \end{array}\right\} \quad (40)$$

Au moyen des égalités (30) et (32), cette expression peut être transformée de la manière suivante, en divisant de plus chaque terme par π.

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{a_{k+2}}{\pi}(x_{k+2}-\alpha_{k+2})-\frac{a_{k+3}}{\pi}(x_{k+3}-\alpha_{k+3})- \\ \qquad\qquad \dots-\frac{a_n}{\pi}(x_n-\alpha_n) \\ +\left(\frac{a_{k+2}}{\pi}\beta_{k+2}+\frac{a_{k+3}}{\pi}\beta_{k+3}+\dots+\frac{a_n}{\pi}\beta_n\right)t_1 \\ +\left(\frac{a_{k+2}}{\pi}\gamma_{k+2}+\frac{a_{k+3}}{\pi}\gamma_{k+3}+\dots+\frac{a_n}{\pi}\gamma_n\right)t_2 \\ +\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ +\left(\frac{a_{k+2}}{\pi}\lambda_{k+2}+\frac{a_{k+3}}{\pi}\lambda_{k+3}+\dots+\frac{a_n}{\pi}\lambda_n\right)t_k \\ \qquad\qquad =\frac{a_{k+1}}{\pi}\rho_{k+1}t_{k+1} \end{array}\right\} \quad (41)$$

Les équations (39) et (41) donnent l'expression de $\frac{a_{k+1}}{\pi}\rho_{k+1}t_{k+1}$ sous deux formes différentes.

La première de ces expressions est évidemment divisible par $\frac{a_{k+1}}{\pi}$; la seconde, par ρ_{k+1}. Ces deux nombres étant premiers entre eux, la valeur de $\frac{a_{k+1}}{\pi}\rho_{k+1}t_{k+1}$ sera divisible

par le produit $\frac{a_{k+1}}{\pi}\rho_{k+1}$; la valeur de t_{k+1} sera donc entière.

Les formules (29) satisfont donc à la question.

16. — Des principes exposés dans le présent chapitre nous conclurons la règle suivante pour former les valeurs générales des inconnues de l'équation (4):

Nous chercherons d'abord une première solution de cette équation. Soit $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, . . . $x_n = \alpha_n$ cette première solution. Chacun des nombres α_1, α_2, . . . α_n sera le premier terme de l'expression des valeurs de l'inconnue à laquelle il correspond.

Puis, nous supprimerons, dans l'équation (4), le terme tout connu K, et la lettre x_1, et nous diviserons tous les coefficients des inconnues restantes par leur plus grand commun diviseur ρ_1. Nous aurons ainsi l'équation

$$a_1 + \frac{a_2}{\rho_1}x_2 + \frac{a_3}{\rho_1}x_3 + \dots + \frac{a_n}{\rho_1}x = 0. \qquad (42)$$

Si $x_2 = \beta_2$, $x_3 = \beta_3$, ... $x_n = \beta_n$ est une première solution de cette équation, le second terme des valeurs des inconnues sera formé de l'indéterminée t_1 multipliée par l'un des nombres ρ_1, β_2, β_3 ... β_n.

Supprimons, dans l'équation (42), le terme tout connu a_1; effaçons la lettre x_2, et divisons les coefficients des inconnues restantes par leur plus grand commun diviseur ρ_2; l'équation deviendra

$$\frac{a_2}{\rho_1} + \frac{a_3}{\rho_1\rho_2}x_3 + \frac{a_4}{\rho_1\rho_2}x_4 + \dots + \frac{a_n}{\rho_1\rho_2}x_n = 0. \quad (43)$$

Le troisième terme de la valeur des inconnues sera formé, sauf pour x_1 dont l'expression est complète, de l'indéterminée t_2, multipliée, savoir : pour x_2, par ρ_2; et, pour les autres inconnues, par les nombres γ_3, γ_4, ... γ_n, qui forment une solution quelconque de l'équation (43).

On continuera ainsi jusqu'à ce que l'on soit arrivé à l'équation à deux inconnues

$$\frac{a_{n-2}}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_{n-2}}x_{n-1} + \frac{a_n}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_{n-2}} = 0. \quad (44)$$

Si $x_{n-1} = v_{n-1}$, et $x_n = v_n$ forment une première solu-

tion de cette équation, le $n - 1^e$ terme des trois dernières inconnues x_{n-2}, x_{n-1}, x_n sera formé de l'indéterminée t_{n-2}. multipliée par l'un des nombres ρ_{n-2}, v_{n-1}, v_n; et le dernier terme des deux dernières inconnues, x_{n-1}, x_n, de l'indéterminée t_{n-1} multipliée par les coefficients de l'équation (44), savoir, pour l'inconnue x_{n-1}, par le coefficient de x_n pris avec son signe, et pour l'inconnue x_n, par le coefficient de x_{n-1} pris en signe contraire, chacun de ces cofficients étant divisé par leur plus grand commun diviseur.

(A suivre.)

QUESTION 111

Solution par M. Madiot, élève à l'Institution Sainte-Marie de Besançon.

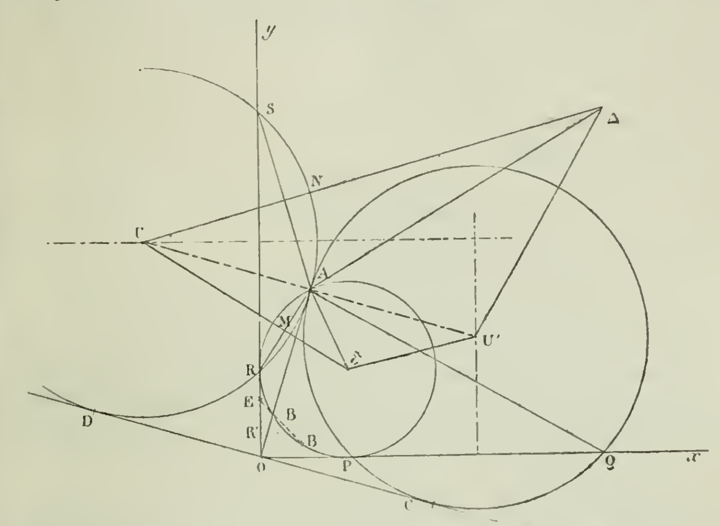
On considère un angle droit xOy, *et un point* A, *dans l'intérieur de cet angle; par le point* A *passent deux cercles* Δ *et* δ *tangents aux droites* Ox *et* Oy; *soient* P *et* Q *leurs points de contact avec* Ox; R *et* S *leurs points de contact avec* Oy. — *1° Démontrer que les cercles* APQ, ARS *sont tangents au point* A; — *2° démontrer qu'ils sont égaux; — 3° reconnaître que ces cercles sont vus du point* O, *l'un et l'autre sous un angle droit; — 4° la droite* OA *rencontre* δ *en un point* B *différent de* A; *par* B *passent deux cercles inscrits dans l'angle* yOx, *savoir* δ *et une autre circonférence* δ'. *Démontrer que* δ *est moyen géométrique entre* δ' *et* Δ; — *5° du cercle* Δ *on peut déduire par la construction citée plus haut une infinité de cercles* Δ_1, Δ_2... *inscrits dans l'angle* yOx *et dont les rayons, d'après la remarque 4 sont en progression géométrique. A ces cercles* Δ_1, Δ_2... *correspondent des cercles tels que* APQ *définis tout à l'heure. On obtient ainsi une infinité de cercles* U_1, U_2... *et l'on propose de démontrer que les rayons de ces cercles sont aussi les termes d'une progression géométrique.*

1° On sait que le produit des distances du centre de similitude de deux circonférences, δ et Δ, à deux points antihomologues, est constant. Cette proposition étant vraie dans

le cas où deux de ces points se confondent, on a la relation

$$\overline{OA}^2 = OR.OS = OP.OQ$$

qui suffit pour établir que les circonférences APQ, ARS sont tangentes au point A à la droite OA.



2° Construisons le quadrilatère UδU'Δ, U et U' étant les centres des circonférences ARS et APQ ; menons la ligne des centres UU' qui, d'après ce qui a été démontré, passera au point A; puis enfin tirons Aδ et AΔ.

La droite Uδ passant par le milieu de l'arc ARM, les angles UδA et SRA ont même mesure et sont égaux.

De même la droite UΔ passe par le milieu de l'arc SNA et l'on a encore angle SRA = angle AUΔ.

Par suite

$$U\delta A = AU\Delta$$

On démontre de même l'égalité

$$\text{angle } \delta UA = (\text{angle } RSA) = \text{angle } U\delta A$$

et l'on reconnaît que les triangles UAδ et UAΔ sont semblables; ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{UA}{A\delta} = \frac{A\Delta}{UA}$$

ou

$$\overline{UA}^2 = A\delta \cdot A\Delta$$

Mais $A\delta$ et $A\Delta$ sont respectivement les rayons r_1 et r_2 des cercles δ et Δ; on a donc

$$\overline{UA}^2 = r_1 \cdot r_2$$

La similitude des triangles $AU'\Delta$ et $AU'\delta$ que l'on démontre comme plus haut, nous donne

$$\overline{U'A}^2 = A\delta . A\Delta = r_1 . r_2$$

On voit donc que $UA = U'A$.

3° Dans l'égalité

$$\overline{OA}^2 = OR.OS$$

OR et OS sont respectivement égales à δR et à ΔS, c'est-à-dire à r_1 et r_2; on a donc encore

$$\overline{OA}^2 = r_1 \cdot r_2.$$

et l'on voit ainsi que

$$UA = U'A = OA.$$

Menons aux cercles U et U' les tangentes OD et OC; l'égalité précédente nous montre que les figures OAUD, OAU'C sont des carrés, et que par suite les angles AOD et AOC sont droits.

4° Appelons r le rayon du cercle δ' et R' son point de contact avec Oy. En vertu du théorème énoncé plus haut, on a

$$\overline{OB}^2 = OR \cdot OR' = r \cdot r_1$$

et

$$\overline{OA}^2 = OR \cdot OS = r_1 \cdot r_2$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre, il nous vient

$$\overline{OA}^2 \cdot \overline{OB}^2 = r \cdot r_1^2 \cdot r_2$$

et comme

$$OA \cdot OB = \overline{OR}^2 = r_1^2$$

$$r_1^2 = r \cdot r_2$$

5° La droite OA prolongée rencontre Δ en un second point. Par ce point passent deux cercles inscrits dans l'angle yOx, savoir Δ et un second cercle Δ_1. Ce second cercle est à son tour rencontré par OA en un point par lequel passe un nouveau cercle inscrit dans l'angle yOx, et ainsi de

suite. Les rayons de ces cercles sont en progression géométrique.

Appelons $\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3 \dots$ les rayons des cercles tels que APQ correspondants à cette suite de cercles $\delta', \delta, \Delta, \Delta_1, \Delta_2 \dots$ dont nous avons représenté le rayon par $r, r_1, r_2 \dots$

Nous savons que

$$\rho^2 = (\overline{U'A}^2) = r_1 r_2.$$

On a de même

$$\rho_1^2 = r_2 \cdot r_3$$

et

$$\rho_2^2 = r_3 \cdot r_4.$$

On déduit de là

$$(\rho_1^2)^2 = (r_2 \cdot r_3)^2 = r_1\, r_2\, r_3\, r_4$$

ou

$$r_2 \cdot r_3 = r_1 \cdot r_4$$

Cette dernière équation étant satisfaite, puisque r_1, r_2, r_3, r_4 sont en progression géométrique, la précédente l'est aussi et nous montre qu'un rayon quelconque ρ_1 est moyen géométrique entre celui qui précède ρ et celui qui suit ρ_2 ; la série $\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3 \dots$ est donc une progression géométrique.

Nota. — La même question a été résolue par M. Chapron, à Versailles.

QUESTION 113

Solution par M. J.-B. Perrin, maître répétiteur au petit Lycée de Clermont-Ferrand.

On considère un cercle, et un point P *dans son plan. Soit* Δ *une droite partant de* P, *et rencontrant* C *aux points* A *et* B; *on mène les tangentes à* C *en ces points et l'on prend le point* Q *symétrique de* P *par rapport au milieu de* AB. *Démontrer que* O *étant le centre de* C, *la perpendiculaire élevée à la droite* OQ *au point* Q *est partagée par ce point et les tangentes citées plus haut en deux parties égales.*

Soient D et E les points où la perpendiculaire au point Q à OQ est rencontrée par les tangentes. Je joins OD et OE.

En vertu du quadrilatère inscriptible OBQE

$$QOE = EBQ\,;$$

En vertu du quadrilatère inscriptible OADQ

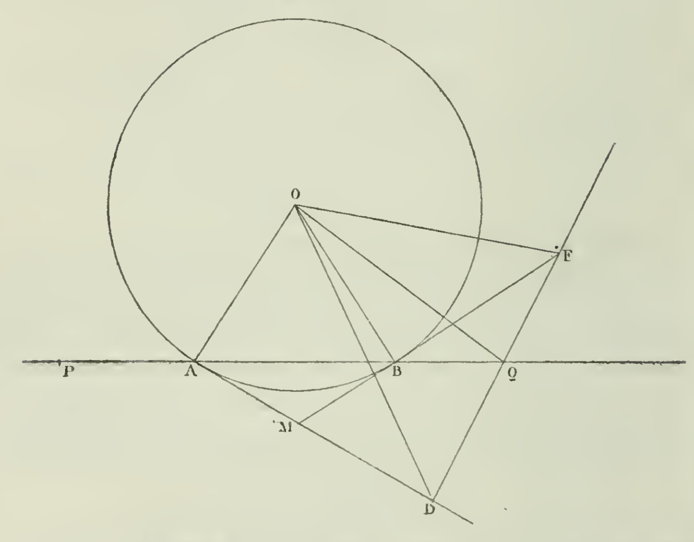
$$DOQ = QAD\,;$$

or

$$QAD = ABM = EBQ,$$

donc

$$QOE = DOQ,$$



et le triangle DOE est isoscèle puisque la hauteur est bissectrice de l'angle au sommet; donc

$$QE = DQ \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. F. Taratte, à Évreux ; de Kerdrel, à Brest ; Madiot, Vuillier, à Besançon ; Kauffmann, à Bordeaux ; Colmaire, à Sedan.

QUESTIONS PROPOSÉES

154. — Étant donné un triangle rectangle, ABC, mener une droite antiparallèle à l'hypoténuse BC, de manière

que la partie DE comprise entre les côtés de l'angle droit soit égale à la somme des perpendiculaires abaissées des points D et E sur l'hypoténuse.

155. — Par un point P, pris sur un côté AB d'un triangle ABC, mener une droite telle que la partie PD comprise entre les côtés AB et AC soit égale à la somme des perpendiculaires abaissées de P et de D sur BC.

156. — Un triangle ABC est tel que l'on puisse, par le point A, mener une sécante AD, faisant avec AB l'angle BAD, tiers de l'angle BAC, en même temps que le point D détermine sur BC un segment BD, tiers du côté BC. Démontrer que les côtés sont liés par la relation

$$a^2b^2 = (b^2 - c^2)(b^2 + 8c^2).$$

157. — On donne un triangle ABC, et une droite qui coupe

BC en α,
AC en β,
BA en γ,

soit O un point du plan, et A′, B′, C′ les points où OA, OB, OC coupent respectivement BC, AC, AB ; soient

c_1 le point où $A'\beta$ coupe AB,
a_1 — $B'\gamma$ — BC.
b_1 — $C'\alpha$ — CA;

démontrer que les trois droites Aa_1, Bb_1, Cc_1 sont concourantes.

(E. Lemoine.)

158. — Soit ABC un triangle: 1° trouver un hexagone circonscrit au cercle inscrit au triangle, sachant que sur chaque côté de ABC sont deux sommets consécutifs de l'hexagone et que les diagonales joignant les sommets opposés sont perpendiculaires chacune à la bissectrice de l'angle des côtés du triangle sur lesquels se trouvent les extrémités de cette diagonale; 2° la surface de cet hexagone est

$$\frac{r}{p}(2cb + 2ac + 2ab - a^2 - b^2 - c^2),$$

r, p, a, b, c, étant respectivement le rayon du cercle inscrit, le demi-périmètre, et les côtés du triangle ABC ; 3° si l'on prend un point quelconque sur l'une des diagonales joignant

les sommets opposés de cet hexagone, la somme ou la différence des distances de ce point aux deux côtés du triangle auxquels se termine la diagonale est égale au diamètre du cercle inscrit ; 4° traiter les mêmes questions pour les cercles ex-inscrits. *(E. Lemoine.)*

ERRATUM

Des erreurs d'impression ont rendu inintelligible l'exercice 137. L'énoncé de cette question doit être rétabli ainsi qu'il suit :

137. — On considère deux droites rectangulaires ox, oy et une droite Δ parallèle à ox. Par o on mène une transversale mobile Δ' qui rencontre Δ en A; de o comme centre avec oA pour rayon, on décrit un cercle qui rencontre ox en B; par B on mène une parallèle à oy et cette parallèle rencontre Δ' en M. Démontrer que si l'on projette M sur oy en B′ et o en I sur BB′, le lieu du point I est une circonférence.

G. L.

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 17348-4.

ETUDE ÉLÉMENTAIRE D'ANALYSE INDÉTERMINÉE

DU PREMIER ET DU SECOND DEGRÉ

Par M. **Ferrent.**

(*Suite,* voir p. 155.)

CHAPITRE II

OBSERVATIONS SUR LES RÉSULTATS DU CHAPITRE PRÉCÉDENT

17. — Parmi les formules qui ont été données pour la résolution de l'équation à trois inconnues, nous remarquons les formules suivantes mentionnées par M. J. Bertrand dans son *Traité élémentaire d'algèbre* (1850, n° 216) :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + a_2\theta + a_3\varphi \\ x_2 &= \alpha_2 - a_1\theta + a_3\psi \\ x_3 &= \alpha_3 - a_1\varphi - a_2\psi \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

dans lesquelles les lettres α_1, α_2, α_3 représentent une première solution ; a_1, a_2, a_3, les coefficients des inconnues dans la proposée, et θ, φ, ψ, trois indéterminées.

Ces formules, qui donnent, il est vrai, toutes les solutions de l'équation proposée, ont cependant un grand défaut. En effet, si l'on connaît une solution de la proposée, et que l'on cherche les valeurs correspondantes des indéterminées θ, φ, ψ, on a trois équations entre trois inconnues; mais ces trois équations se réduisent à deux, parce que l'une d'elles est la conséquence des deux autres, de sorte que les trois inconnues restent indéterminées et peuvent recevoir une infinité de valeurs. Il suit de là qu'on peut donner, dans les formules (45), une infinité de valeurs différentes aux indéterminées θ, φ, ψ et trouver toujours la même solution de l'équation.

Ce vice provient de ce que le champ de l'indétermination est trop ouvert par la présence de trois indéterminées; nous

avons vu en effet que la question peut être résolue au moyen de deux indéterminées seulement.

Le même calcul pratiqué sur les formules (12) nous conduirait, comme nous l'avons démontré, à trois équations, qui se réduisent à deux entre les deux inconnues t et t', lesquelles ont toujours une seule valeur entière.

Par conséquent, deux valeurs différentes de t et t' ne peuvent pas reproduire deux fois une même valeur des inconnues x_1 et x_2.

18. — Nous pouvons résoudre d'une manière un peu différente l'équation à trois inconnues.

Les trois coefficients de cette équation sont supposés premiers entre eux, quand on les considère trois à trois ; mais ils peuvent avoir des diviseurs communs, si on les considère deux à deux. Soit π_1 le plus grand commun diviseur de a_2 et a_3 ; π_2, celui de a_1 et a_3, et π_3, celui de a_1 et a_2.

Les trois nombres π_1, π_2, π_3 sont premiers entre eux deux à deux, car si deux d'entre eux avaient un diviseur commun, ce diviseur diviserait les trois coefficients a_1, a_2, a_3.

Il résulte de là que a_1, qui est divisible par π_2 et π_3, est aussi divisible par le produit $\pi_2\pi_3$; a_2 par le produit $\pi_1\pi_3$, et a_3, par le produit $\pi_1\pi_2$.

Nous pouvons donc poser

$$a_1 = \pi_2\pi_3 b_1, \quad a_2 = \pi_1\pi_3 b_2, \quad a_3 = \pi_1\pi_2 b_3 ;$$

et b_1, b_2, b_3 seront premiers entre eux deux à deux ; car, si b_1 et b_2, par exemple, avaient un diviseur commun, ce diviseur diviserait le quotient de a_1 et a_2 par leur plus grand commun diviseur, π_3, ce qui est impossible.

L'équation (6) devient

$$\pi_2\pi_3 b_1 x_1 + \pi_1\pi_3 b_2 x_2 + \pi_1\pi_2 b_3 x_3 = \mathrm{K} ; \qquad (46)$$

soit α_1, α_2, α_3 une première solution ; on a

$$\pi_2\pi_3 b_1 \alpha_1 + \pi_1\pi_3 b_2 \alpha_2 + \pi_1\pi_3 b_3 a_3 = \mathrm{K}. \qquad (47)$$

La soustraction donne, en remplaçant

$x_1 - \alpha_1$ par X_1,

$x_2 - \alpha_2$ par X_2

et $x_3 - \alpha_3$ par X_3 :

$$\pi_2\pi_3 b_1 \mathrm{X}_1 + \pi_1\pi_3 b_2 \mathrm{X}_2 + \pi_1\pi_2 b_3 \mathrm{X}_3 = 0. \qquad (48)$$

Nous voyons immédiatement que

X_1 doit être divisible par π_1,
X_2 — — π_2,
X_3 — — π_3.

Posons donc $X_1 = \pi_1 Y_1$; $X_2 = \pi_2 Y_2$; $X_3 = \pi_3 Y_3$.

L'équation devient

$$b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + b_3 Y_3 = 0. \qquad (49)$$

Les coefficients étant premiers entre eux deux à deux, l'une quelconque des inconnues est arbitraire. Prenons, par exemple, $Y_1 = t$, et soit $Y_2 = \eta_2$ et $Y_3 = \eta_3$ une première solution de

$$b_1 + b_2 Y_2 + b_3 Y_3 = 0. \qquad (50)$$

de sorte que l'on ait

$$b_1 + b_2\eta_2 + b_3\eta_3 = 0, \qquad (51)$$

$\eta_2 t$ et $\eta_3 t$ formeront une première solution de

$$b_1 t + b_2 Y_2 + b_3 Y_3 = 0, \qquad (52)$$

et la solution générale sera, d'après les formules (2) :

$$Y_1 = t,$$
$$Y_2 = \eta_2 t + b_3 t_1,$$
$$Y_3 = \eta_3 t - b_2 t_1.$$

d'où :

$$X_1 = \pi_1 t,$$
$$X_2 = \pi_2\eta_2 t + \pi_2 b_3 t_1,$$
$$X_3 = \pi_3\eta_3 t - \pi_3 b_2 t_1.$$

et enfin

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \pi_1 t, \\ x_2 &= \alpha_2 + \pi_2\eta_2 t + \pi_2 b_3 t_1 \\ x_3 &= \alpha_3 + \pi_3\eta_3 t - \pi_3 b_2 t_1 \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

19. — Autre manière de résoudre l'équation à quatre inconnues.

Reprenons l'équation (14), et arrivons à l'équation (16):

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 = 0 \qquad (54)$$

soit π le plus grand commun diviseur de a_1 et a_2 ;
et π_1 — — de a_3 et a_4.

Nous pouvons poser

$$\left.\begin{aligned} a_1 X_1 + a_2 X_2 &= \pi Y_1 \\ \text{et} \quad a_3 X_3 + a_4 X_4 &= \pi_1 Y_2 \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

et l'on aura

$$\pi Y_1 + \pi_1 Y_2 = 0 \qquad (56)$$

d'où l'on tire, d'après les formules (2), π et π_1 étant premiers entre eux :

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = \pi_1 t \\ Y_2 = -\pi t \end{array}\right\} \qquad (57)$$

Les équations (55) deviennent :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a_1}{\pi}X_1 + \frac{a_2}{\pi}X_2 = \pi_1 t \\ \frac{a_3}{\pi_1}X_3 + \frac{a_4}{\pi_1}X_4 = -\pi t \end{array}\right\} \qquad (58)$$

ξ_1, ξ_2, d'une part, ξ_3, ξ_4 d'autre part, étant des premières solutions de chacune des équations

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a_1}{\pi}X_1 + \frac{a_2}{\pi}X_2 = \pi_1 \\ \frac{a_3}{\pi_1}X_3 + \frac{a_4}{\pi_1}X_4 = -\pi \end{array}\right\} \qquad (59)$$

$\xi_1 t$, $\xi_2 t$, $\xi_3 t$, $\xi_4 t$ formeront une première solution de chacune des équations (58), et les solutions générales seront :

$$X_1 = \xi_1 t + \frac{a_2}{\pi}t_1,$$

$$X_2 = \xi_2 t - \frac{a_1}{\pi}t_1,$$

$$X_3 = \xi_3 t + \frac{a_4}{\pi_1}t_2,$$

$$X_4 = \xi_4 t - \frac{a_3}{\pi_1}t_2;$$

d'où nous déduirons

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \alpha_1 + \xi_1 t + \frac{a_2}{\pi}t_1 \\ x_2 = \alpha_2 + \xi_2 t - \frac{a_1}{\pi}t_1 \\ x_3 = \alpha_3 + \xi_3 t + \frac{a_4}{\pi_1}t_2 \\ x_4 = \alpha_4 + \xi_4 t - \frac{a_3}{\pi_1}t_2. \end{array}\right\} \qquad (60)$$

On peut remarquer que les formules (60) ne contiennent ensemble que 12 termes, tandis que les formules (24) en contiennent 13 pour l'expression des valeurs des inconnues.

Lorsque le nombre des inconnues augmente, il est possible, par un moyen semblable à celui que nous venons d'indiquer, d'obtenir des solutions de formes très variées ; mais les formules (29) ont l'avantage de s'appliquer à un nombre quelconque d'inconnues.

20. — Résolution immédiate d'une équation à n inconnues dont deux coefficients sont premiers entre eux.

Soit l'équation

$$ax + by + cz + du + \dots + K = 0 \qquad (61)$$

dans laquelle les coefficients a et b sont premiers entre eux. Posons

$$cz + du + \dots + K = U;$$

d'où

$$ax + by + U = 0. \qquad (62)$$

Soit $x = \xi$, $y = \eta$ une première solution de

$$ax + by + 1 = 0,$$

ξU et ηU formeront une première solution de (62), et les solutions générales seront d'après les formules (2)

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi U + bt \\ y &= \eta U - at \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

lesquelles dépendent toujours de $n - 1$ indéterminées. La même méthode pourrait être appliquée au cas où trois ou quatre inconnues n'auraient aucun diviseur commun à leurs trois ou quatre coefficients.

21. — Les formules générales donnent les valeurs des n inconnues au moyen de $n - 1$ indéterminées.

On ne peut exprimer ces valeurs au moyen d'un nombre inférieur d'indéterminées.

En effet, si, dans l'équation générale (4), le coefficient d'une inconnue, x_1, est l'unité, toute valeur donnée aux autres inconnues satisfera à la question. Les autres inconnues sont donc entièrement indéterminées ; x_1 dépend de ces $n - 1$ quantités et ne peut être exprimé dans toute sa généralité avec un nombre inférieur d'indéterminées.

Les formules générales pouvant se prêter à tous les cas particuliers, il n'est pas possible de trouver des formules dépendant d'un nombre moindre d'indéterminées, et, comme

nous avons vu qu'un plus grand nombre n'est pas nécessaire, nous sommes certains qu'une équation du premier degré à n inconnues peut toujours être résolue au moyen de $n - 1$ indéterminées, lorsque ses coefficients sont premiers entre eux, et que ces $n - 1$ indéterminées sont indispensables.

22. — En examinant les formules (29), nous pouvons faire à leur sujet les remarques suivantes :

1° Dans ces formules, les coefficients d'une même indéterminée sont premiers entre eux.

Prenons en effet les coefficients de t_1, savoir, les quantités $\rho_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_n$. Ces coefficients se trouvent réunis dans la deuxième des relations (30), qui peut être mise sous la forme

$$a_1 + \frac{a_2}{\rho_1}\beta_2 + \frac{a_3}{\rho_1}\beta_3 + \ldots + \frac{a_n}{\rho_1}\beta_n = 0, \qquad (64)$$

les quantités $\frac{a_2}{\rho_1}, \frac{a_3}{\rho_1}, \ldots \frac{a_n}{\rho_1}$ représentant des nombres entiers.

Si $\rho_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_n$ avaient un diviseur commun, ce diviseur devrait aussi diviser a_1, à cause de l'égalité (64) ; divisant a_1 et ρ_1, il diviserait tous les coefficients de la proposée ; or ceux-ci sont premiers entre eux.

Ces coefficients de t_2 sont réunis dans la troisième des relations (30), que nous pouvons mettre sous la forme

$$\frac{a_2}{\rho_1} + \frac{a_3}{\rho_1\rho_2}\gamma_3 + \frac{a_4}{\rho_1\rho_2}\gamma_4 + \cdots + \frac{a_n}{\rho_1\rho_2}\gamma_n = 0 \quad (65)$$

si $\rho_2, \gamma_3, \gamma_4, \ldots \gamma_n$ avaient un diviseur commun, ce diviseur diviserait aussi $\frac{a_2}{\rho_1}$; or, divisant $\frac{a_2}{\rho_1}$ et ρ_2, il diviserait $\frac{a_2}{\rho_1}$, $\frac{a_3}{\rho_1}$, $\frac{a_4}{\rho_1}$, $\ldots$ $\frac{a_n}{\rho_1}$, puisque ρ_2 est le plus grand commun diviseur de tous ces quotients moins le premier; mais ces quantités sont premières entre elles, puisqu'elles sont les quotients de diverses quantités par leur plus grand commun diviseur ρ_1. Donc les coefficients de l'indéterminée t_2 sont premiers entre eux.

Nous ne nous arrêtons pas à faire la démonstration sur les coefficients de t_k. Elle ne présente aucune difficulté.

23. — 2° Les coefficients des diverses indéterminées qui entrent dans l'expression d'une même inconnue x_k ont pour plus grand commun diviseur le plus grand commun diviseur de tous les coefficients de la proposée, sauf le coefficient a_k.

Les indéterminées qui entrent dans l'expression de x_k, dans les formules (29), ont pour coefficients les nombres $\beta_k, \gamma_k, \delta_k, \ldots \rho_k$.

Soit π le plus grand commun diviseur de tous les coefficients de la proposée, sauf le coefficient a_k.

La seconde des égalités (30) contient le terme $a_k\beta_k$, et comme tous les autres termes de cette égalité sont divisibles par π, $a_k\beta_k$ est divisible par ce nombre ; mais a_k est premier avec π, sans quoi tous les coefficients de la proposée auraient un diviseur commun. Donc β_k est divisible par π.

La troisième des relations (30) ferait voir de même que γ_k est divisible par π ; et on démontrerait d'une manière analogue que les autres quantités $\delta_k, \ldots \rho_k$ sont aussi divisibles par π.

De plus, π sera le plus grand commun diviseur de β_k, γ_k, $\delta_k, \ldots \rho_k$.

En effet, soit, s'il est possible, le produit $\pi\pi_1$ le plus grand commun diviseur de ces nombres.

Parmi les égalités (30), nous avons celle-ci :

$$a_{k-1}\rho_{k-1} + a_k i_k + a_{k+1}i_{k+1} + \ldots + a_n i_n = 0, \quad (66)$$

ou

$$\frac{a_{k-1}}{\rho_1\rho_2 \cdots \rho_{k-2}} + \frac{a_k}{\rho_1\rho_2 \cdots \rho_{k-1}} i_k + \frac{a_{k+1}}{\rho_1\rho_2 \cdots \rho_{k-1}} i_{k+1} + \ldots$$
$$+ \frac{a_n}{\rho_1\rho_2 \cdots \rho_{k-1}} i_n = 0, \quad (67)$$

ρ_k étant le plus grand commun diviseur des coefficients $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_n$, divisés d'abord par le produit $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{k-1}$, et étant divisibles par $\pi\pi_1$, toutes les quantités $\frac{a_{k+1}}{\rho_1\rho_2 \cdots \rho_{k-1}}$, $\ldots$ $\frac{a_n}{\rho_1\rho_2 \cdots \rho_{k-1}}$ sont divisibles par $\pi\pi_1$, et, par conséquent

aussi les nombres a_{k+1}, a_{k+2}, ... a_n; i_k est aussi divisible par $\pi\pi_1$ par hypothèse. Donc $\pi\pi_1$ divise aussi $\dfrac{a_{k-1}}{\rho_1\rho_2 \cdots {}_{k-2}}$ et, par conséquent, a_{k-1}.

L'égalité précédente nous donnerait de même

$$a_{k-2}\rho_{k-2} + a_{k-1}\theta_{k-1} + a_k\theta_k + a_{k+1}\theta_{k+1} + \ldots + a_n\theta_{n=0} \quad (68)$$

ou

$$\frac{a_{k-2}}{\rho_1\rho_2 \cdots \rho_{k-3}} + \frac{a_{k-1}}{\rho_1\rho_2 \cdots \rho_{k-2}}\theta_{k-1} + \frac{a_k}{\rho_1\rho_2 \cdots \rho_{k-2}}\theta_k + \ldots$$
$$+ \frac{a_n}{\rho_1\rho_2 \cdots \rho_{k-2}}\theta_n = 0. \quad (69)$$

Tous les termes de (69) sont divisibles par $\pi\pi_1$, sauf le premier; donc $\pi\pi_1$ divise $\dfrac{a_{k-2}}{\rho_1\rho_2 \cdots \rho_{k-3}}$, et, par suite, a_{k-2}.

En continuant ce raisonnement, on arrivera à cette conclusion, que tous les coefficients de l'équation proposée, sauf le coefficient a_k, sont divisibles par $\pi\pi_1$. Or, cette conclusion est absurde, puisque, par hypothèse, π est le plus grand commun diviseur de ces coefficients. On ne peut donc supposer que π, qui divise tous les coefficients des diverses indéterminées qui figurent dans l'expression de K_4, ne soit par le plus grand commun diviseur de ces coefficients.

24. — Il paraît singulier que les inconnues, qui ont toutes, dans l'équation générale, un rôle identique, soient exprimées, dans les formules (29), par des valeurs dont l'une dépend d'une seule arbitraire; une autre de deux, une troisième de trois, etc.; ce qui semblerait indiquer qu'elles n'ont pas toutes le même degré d'indétermination.

Il n'en est pas ainsi, comme nous allons le faire voir.

Prenons, pour plus de simplicité, les formules (12) :

$$x_1 = \alpha_1 + \rho_1 t,$$
$$x_2 = \alpha_2 + \beta_2 t + \frac{a_3}{\rho_1} t_1,$$
$$x_3 = \alpha_3 + \beta_3 t - \frac{a_2}{\rho_1} t_1.$$

Si nous donnons à t ou à x_1 une valeur numérique, les expressions x_2 et x_3 dépendront de la seule arbitraire t_1, et

les valeurs de chacune de ces inconnues formeront une progression par différence.

Il en serait de même, si nous donnions à x_2 une valeur numérique choisie, bien entendu, parmi celles qui satisfont à l'équation; t et t' pourraient être exprimés au moyen d'une indéterminée θ, et les valeurs de x_1 et x_3, exprimées en θ, seraient également les termes d'une progression par différence.

Le même raisonnement s'appliquerait aux formules (29).

La singularité signalée n'atteint, par suite, que la forme de ces valeurs, et laisse intact le degré d'indétermination nécessaire. Elle ne peut, par conséquent, être considérée que comme un avantage sous le rapport de la simplicité.

Les formules (2) donnent lieu à une remarque analogue. En effet, dans ces formules, l'inconnue x_1 a, pour le coefficient de l'indéterminée, le coefficient de l'autre inconnue, x_2, dans l'équation, *pris avec son signe*, tandis que l'inconnue x_2 a, pour coefficient de l'indéterminée, le coefficient de x_1, dans l'équation, *pris en signe contraire.*

Ces deux inconnues, qui ont le même rôle dans l'équation, ne paraissent pas traitées de la même manière, et, dans leur nature, on ne trouve aucune raison pour expliquer cette différence. Mais cette difficulté n'est qu'apparente, car nous pouvons mettre à volonté l'une ou l'autre des deux inconnues dans l'un ou l'autre cas.

25. — Il est bien évident, du reste, que, dans les formules (29), la singularité peut affecter telles inconnues que l'on veut, c'est-à-dire que l'on peut choisir à volonté l'inconnue dont l'expression dépendra d'une seule arbitraire, de deux, ou de trois, etc.

On peut même transformer les formules (29) en d'autres dans lesquelles une inconnue quelconque, x_k, par exemple, serait exprimée au moyen d'une seule indéterminée θ.

Il suffirait de poser l'équation

$$\alpha_k + \beta_k t_1 + \gamma_k t_2 + \delta_k t_3 + \dots + \rho_k t_k = \alpha_k + \pi\theta. \quad (70)$$

Le terme tout connu est le même dans les deux membres, puisque c'est la première valeur de la même inconnue;

π est le plus grand commun diviseur de tous les coefficients de l'équation, sauf celui de l'inconnue x_k; π est aussi le plus grand commun diviseur des coefficients du premier membre de (70), d'après le n° 23.

En supprimant le terme commun x_k et divisant les deux membres par π, nous aurons

$$mt_1 + nt_2 + \ldots + rt_k = \theta,$$

équation qui peut toujours être résolue en nombres entiers, soit que l'on donne les valeurs de t_1, t_2, ... t_k, puisque le coefficient de θ est l'unité; soit que l'on donne la valeur de θ, puisque les coefficients m, n, ... r sont premiers entre eux.

Il résulte de là que les valeurs de chaque inconnue forment une progression par différence, dont la raison est le plus grand commun diviseur des coefficients de toutes les autres dans la proposée.

Les valeurs des n inconnues forment donc n progressions par différence, et ces n progressions ont chacune leur différence. Ces n différences sont premières entre elles, si on les considère deux à deux; car un diviseur commun à deux de ces différences diviserait tous les coefficients de la proposée.

(A suivre.)

QUESTION 100

Solution par M. Charles Derigny, élève au Lycée Louis-le-Grand.

On donne un triangle équilatéral ABC *et une parallèle* DE *à la base. Soit* M *un point de cette parallèle; les droites qui joignent ce point aux trois sommets déterminent six segments sur les côtés. Déterminer la position du point* M *de façon que le produit de trois segments non consécutifs ait une valeur donnée.*

MISE EN ÉQUATIONS DU PROBLÈME

Soit AB $= a$, DE $= b$; et appelons x la distance du point M au milieu de DE.

$OM = x$.

Nous voulons avoir :

$$BA' \times CB' \times AC' = K^3.$$

Calculons BA', CB' et AC' en fonction des données.

Les deux triangles semblables ABA' et ADM nous donnent la relation

$$\frac{BA'}{DM} = \frac{BA}{DA}, \quad BA' = DM \times \frac{BA}{DA}.$$

Donc

$$BA' = \left(x + \frac{b}{2}\right)\frac{a}{b} \quad (1).$$

Calculons B'C. Pour cela par le point B' menons B'F parallèle à BC; on a

$$BF = CB'.$$

Les deux triangles semblables BDM et BB'F nous donnent la relation :

$$\frac{BF}{BD} = \frac{B'F}{DM}$$

ou, en remplaçant par les valeurs,

$$\frac{B'C}{a - b} = \frac{a - B'C}{\frac{b}{2} + x} = \frac{a}{a + x - \frac{b}{2}}.$$

Donc

$$B'C = \frac{a(a - b)}{a + x - \frac{b}{2}}. \qquad (2)$$

Calculons enfin AC'.

$AC' = a - BC'$.

Les deux triangles DC'M et BCC' nous donnent

$$\frac{BC'}{BC' - BD} = \frac{BC}{DM} \qquad \frac{BC'}{BC' - a + b} = \frac{a}{x + \frac{b}{2}}$$

$$\frac{BC'}{b - a} = \frac{a}{x + \frac{b}{2} - a}.$$

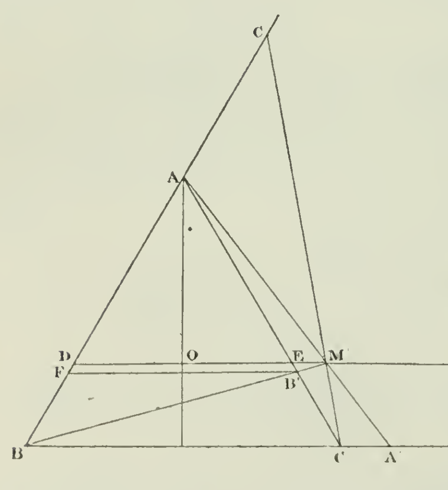
Donc

$$AC' = a - \frac{a(b-a)}{x + \frac{b}{2} - a} = \frac{a\left(x - \frac{b}{2}\right)}{x + \frac{b}{2} - a}. \qquad (3)$$

Ce qui donne l'équation du problème :

$$\frac{a}{b}\left(x + \frac{b}{2}\right) \times \frac{a(a-b)}{a + x - \frac{b}{2}} \times \frac{a\left(x - \frac{b}{2}\right)}{x + \frac{b}{2} - a} = K^3. \ (4)$$

Considérons les différentes positions que peut occuper le point M.



Supposons le en M'; et calculons encore BA', CB', AC'. Soit OM $= y$.

Les 2 triangles ABA' et ADM' nous donnent :

$$\frac{BA'}{DM'} = \frac{BA}{DA}.$$

$$BA' = \left(y + \frac{b}{2}\right) \times \frac{a}{b} \qquad (1')$$

Donc rien de changé pour cette ligne.

Calculons CB'; en menant B'F parallèle à BC, les deux triangles BB'F et BM'D nous donnent

$$\frac{BF}{BD} = \frac{FB'}{DM'}$$

ou

$$\frac{B'C}{a-b} = \frac{a - B'C}{y + \frac{b}{2}}.$$

Il n'y a donc encore rien de changé.

Considérons enfin la valeur de AC'.

$AC' = BC' - a.$

Or les deux triangles semblables C'BC et C'DM' nous donnent

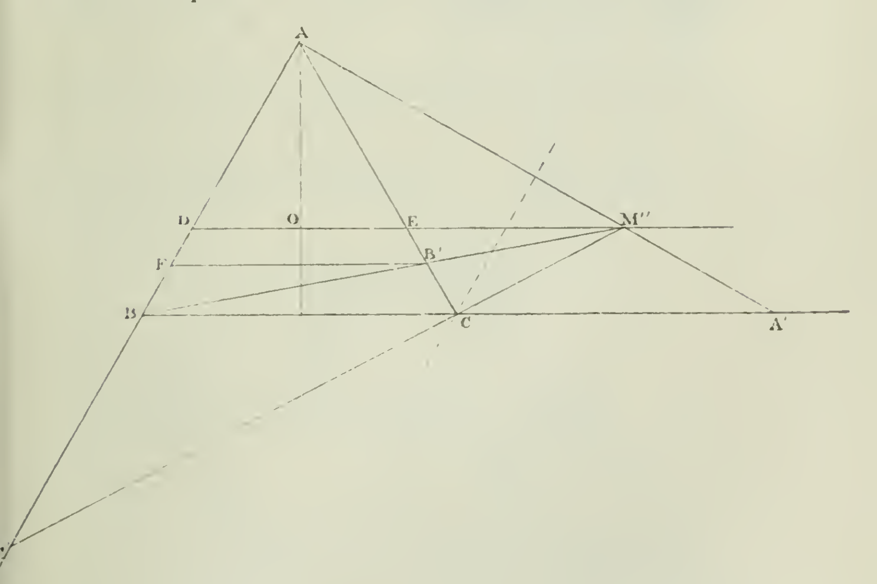
$$\frac{BC'}{CD'} = \frac{BC}{DM'} \qquad \frac{BC'}{BC' - BD} = \frac{BC}{DM'}$$

$$\frac{BC'}{BC' - a + b} = \frac{a}{y + \frac{b}{2}} \quad \frac{BC'}{b - a} = \frac{a}{y + \frac{b}{2} - a}.$$

Donc

$$AC' = \frac{a(b-a)}{y + \frac{b}{2} - a} - a = \frac{a\left(\frac{b}{2} - y\right)}{y + \frac{b}{2} - a}.$$

On voit que la valeur de AC' diffère par le signe de



celle précédemment trouvée; nous avons donc une équation nouvelle.

Mais en remarquant ce qui précède, on peut poser $BA'.\ CB'.\ AC' = -K^3$ et l'on aura la même équation (4) dans laquelle on aura changé K^3 en $-K^3$.

Considérons le cas où le point M est plus éloigné à droite au delà de la parallèle à AB menée par le point C, en M″ par exemple et calculons de nouveau les lignes.

Soit $OM'' = z$.

On voit directement que pour BA′ il n'y aura rien de nouveau en considérant les deux triangles ABA′ et AM″D.

Considérons la valeur de CB′, en menant toujours par le point B′ une parallèle B′F à BC.

Les deux triangles B′BF et BDM″ nous donnent la relation

$$\frac{BF}{BD} = \frac{FB'}{DM''}, \qquad \frac{CB'}{a-b} = \frac{a - CB'}{z + \frac{b}{2}}.$$

Donc, rien de changé.

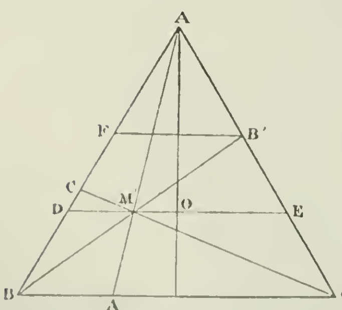
Enfin considérons AC′.

$AC' = a + C'B$.

Les deux triangles C′CB et C′M″D nous donnent la relation

$$\frac{C'B}{C'D} = \frac{BC}{DM''}, \qquad \frac{C'B}{C'B + a - b} = \frac{a}{z + \frac{b}{2}}$$

$$\frac{BC'}{a-b} = \frac{a}{z + \frac{b}{2} - a}.$$



Donc

$$AC' = a + \frac{a(a-b)}{z + \frac{b}{2} - a} = \frac{a\left(z - \frac{b}{2}\right)}{z + \frac{b}{2} - a}.$$

Ce qui est la même valeur que pour le premier cas.

Considérons maintenant les différentes positions que le

point M peut occuper à gauche du point O, supposons-le compris entre O et D

Soit $OM_1 = x_1$.

Les deux triangles ABA′ et ADM_1 donnent la relation

$$\frac{BA'}{DM_1} = \frac{BA}{DA}$$

$$BA' = \left(\frac{b}{2} - x_1\right)\frac{a}{b}. \qquad (1)$$

Par B′ menons B′F parallèle à BC; on a

$$\frac{BF}{BD} = \frac{FB'}{DM'}, \qquad \frac{BC}{a-b} = \frac{a - B'C}{\frac{b}{2} - x_1} = \frac{a}{a - \frac{b}{2} - x_1}$$

$$B'C = \frac{a(a - b}{a - \frac{b}{2} - x_1}. \qquad (2)$$

Enfin on calculerait de même AC′.

Il est facile de voir que nous aurions l'équation (4) dans laquelle on aurait changé x en $-x$.

Par conséquent, nous saurons interpréter les solutions négatives de l'équation 4.

Considérons le point M plus à gauche en M_2 et soit $OM_2 = x_2$.

On a $$BA' = \left(-\frac{b}{2} + x_2\right)\frac{a}{b}.$$

Calculons CB′.

Par le point B menons une parallèle à BC jusqu'à sa rencontre avec AB prolongée en F.

BF = B′C.

Les deux triangles BB'F et BDM_2 nous donnent

$$\frac{BF}{BD} = \frac{B'F}{M_2D}$$

Or

$$B'F = B'A = B'C - A.$$

Donc

$$\frac{B'C}{a-b} = \frac{B'C - a}{-\frac{b}{2} + x_2} = \frac{a}{a - \frac{b}{2} - x_2}$$

$$B'C = \frac{a(a-b)}{a - \frac{b}{2} - x_2}.$$

Enfin calculons AC'.

$AC' = a - BC'$.

Les deux triangles M_2DC' et BCC' nous donnent

$$\frac{BC'}{C'D} = \frac{BC}{M_2D}$$

$$\frac{BC'}{BD - BC'} = \frac{BC}{M_2D}$$

$$\frac{BC'}{a - b - BC'} = \frac{a}{-\frac{b}{2} + x_2}, \qquad \frac{BC'}{a-b} = \frac{a}{-\frac{b}{2} + x_2 + a}.$$

Donc

$$AC' = a - \frac{a(a-b)}{-\frac{b}{2} + x_2 + a} = \frac{a\left(x_2 + \frac{b}{2}\right)}{a + x_2 - \frac{b}{2}},$$

qu'on peut écrire

$$\frac{a\left(-x_2 - \frac{b}{2}\right)}{\frac{b}{2} - x_2 - a}.$$

On voit donc que si l'on change x en $-x$, AC' et B'C reprennent les mêmes valeurs que dans le premier cas; mais BA' est de signe contraire.

Il suffira de changer K^3 en $-K^3$, et nous pourrons accepter les solutions négatives de l'équation ainsi formée.

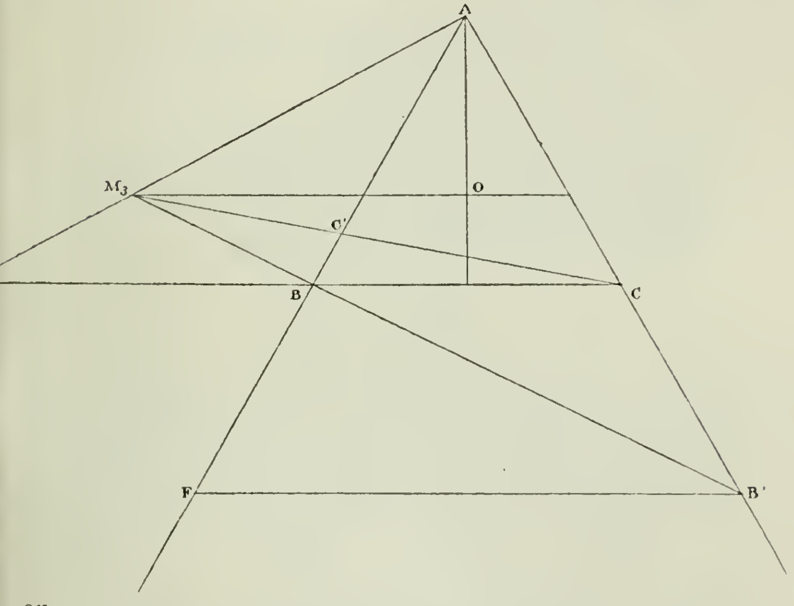
Il ne nous reste plus qu'un cas à considérer, celui où le point M serait plus à gauche, en M_3.

Soit $OM_3 = x_3$.

$$BA' = \left(-\frac{b}{2} + x_3\right)\frac{a}{b}.$$

Les deux triangles BB'F et M_3BD donnent

$$\frac{BF}{BD} = \frac{B'F}{M_3D}$$



ou

$$\frac{CB'}{a-b} = \frac{a+CB'}{-\frac{b}{2}+x_3} = \frac{a}{\frac{b}{2}-a+x_3},$$

$$CB' = \frac{a(a-b)}{\frac{b}{2}-a+x_3}.$$

Enfin les deux triangles $C'M_3D$ et BCC' nous donnent

$$\frac{BC'}{C'D} = \frac{BC}{M_3D}$$

$$\frac{BC'}{BD - BC'} = \frac{BC}{M_3D}$$

$$\frac{BC'}{a - b - BC'} = \frac{a}{x_3 - \frac{b}{2}}$$

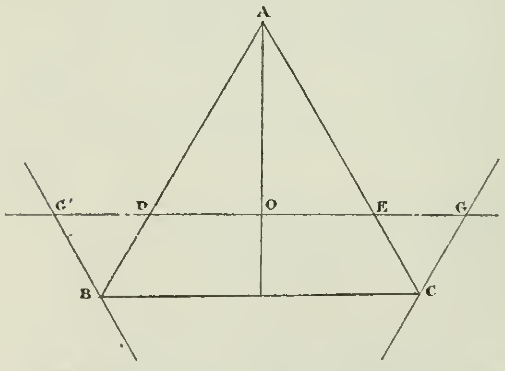
$$\frac{BC'}{a - b} = \frac{a}{x_3 - \frac{b}{2} + a}.$$

Donc

$$AC' = a - \frac{a(a-b)}{x_3 - \frac{b}{2} + a} = \frac{a\left(x_3 + \frac{b}{2}\right)}{x_3 - \frac{b}{2} + a}.$$

Si l'on change x en $-x$, on trouvera l'équation (4) ; car BA' et CB' ayant tous deux changé de signe, le produit aura le même signe.

Ainsi, en résumé, soit CG parallèle à AB, BG_1 à AC.



Si M est entre O et E, ou à droite de G : solutions positives de l'équation (4).

Si M est entre O et D, ou à gauche de G_1 : solutions négatives de l'équation (4).

Si M est entre E et G, solutions positives de l'équation où on change K^3 en $-K^3$; solutions négatives de cette même équation, si le point M est entre D et G_1.

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION (4)

$$\frac{a}{b}\left(x + \frac{b}{2}\right) \times \frac{a(a-b)}{a + x - \frac{b}{2}} \times \frac{a\left(x - \frac{b}{2}\right)}{x - \frac{b}{2} - a} = K^3.$$

Posons $K^3 = ma^3$, le facteur a^3 disparaît, et il reste

$$\frac{\left(x+\frac{b}{2}\right)\left(a-b\right)\left(x-\frac{b}{2}\right)}{b\left(a+x-\frac{b}{2}\right)\left(x+\frac{b}{2}-a\right)} = m.$$

Cette équation, réduite, devient

$$4x^2(b - a + mb) - (b - a)(b^2 - 4mab) - mb^3 = 0.$$

d'où

$$x = \pm \sqrt{\frac{(b-a)(b^2-4mab)+mb^3}{4(b-a+mb)}}.$$

(*A suivre.*)

CONCOURS DE L'ÉCOLE FORESTIÈRE EN 1884

Mathématiques.

1. — Étant données deux droites non situées dans le même plan, déterminer le lieu géométrique des milieux de toutes les droites qui joignent un point de la première droite à un point de la seconde. — Indiquer la marche à suivre pour représenter ce lieu à l'aide des procédés de la géométrie descriptive.

2. — Trouver, par la suppression des facteurs communs, c'est-à-dire sans employer le procédé de la division directe, le quotient de l'expression

$$\frac{a^9 - ax^8 + a^8x - a^9}{a^5 - ax^4 + a^4x - x^5 + \sqrt{2}(a^4x - a^2x^3 + a^3x^2 - ax^4)}.$$

3. — L'escompte d'un billet de 2,460 francs est 67 fr. 65 c. Si l'échéance était rapprochée de 55 jours et le taux augmenté de 1,5 0/0, l'escompte resterait le même. — Trouver le taux et l'échéance.

Trigonométrie.

1. — On donne, dans un quadrilatère inscriptible ABCD :

$$B = 87°38'47'',$$
$$a = 713^m,68576,$$
$$b = 557,34875,$$
$$d - c = 50,35500;$$

calculer d, c, A, R et S.

2. — Variations de

$$\frac{(1 + \sin x)^2}{\sin x(1 - \sin x)}.$$

3. — Un paratonnerre AB, d'une longueur égale à $8^m,264$, est placé sur un édifice de hauteur AE. En s'arrêtant à $82^m,656$ du pied de l'édifice, et à une hauteur de $15^m,467$ au-dessus du sol, on a vu le paratonnerre sous un angle de $4°27'54'',27$, On demande de calculer la hauteur de la pointe B du paratonnerre au-dessus du sol.

CONCOURS GÉNÉRAL

Mathématiques élémentaires.

On donne un cercle O, et sur ce cercle deux points A, A'. On considère tous les couples de deux cercles C, C', tangents entre eux et tangents au cercle O, le premier en A, le second en A'.

1. Trouver le lieu du point de contact des cercles C, C' ; puis, prenant un point sur ce lieu, reconnaître d'après la position de ce point sur le lieu, le mode de contact des cercles C et C' qui correspondent à ce point, et le mode de contact de chacun d'eux avec le cercle O.

2. Trouver le lieu du point de concours des tangentes communes extérieures aux cercles C et C' d'un même couple.

3. A un point N du lieu précédent correspondent deux couples de cercles C et C'. Soit M le contact des cercles de l'un de ces couples, et soit M' le point de contact des cercles de l'autre couple. On considère le triangle NMM'.

Trouver le lieu du centre du cercle inscrit dans ce triangle; le lieu du centre du cercle circonscrit; le lieu du point de concours des hauteurs. Vérifiez que tout point commun à deux de ces trois lieux appartient à l'autre.

4. Soit R le rayon du cercle O, et θ l'angle des rayons de ce cercle terminés en A et A'.

Calculer les rayons d'un couple de cercles C et C' tels que le rapport de la somme des aires de ces cercles à l'aire du cercle O, soit égal à un nombre donné m. — Discuter le problème dans le cas particulier où θ est droit, et reconnaître, pour chaque solution, selon la valeur de m, le mode de contact des cercles C et C', et le mode de contact de chacun d'eux avec le cercle O.

Philosophie.

Étant donné un triangle ABC, et une droite L non située dans le plan du triangle, on joint aux points B et C un point quelconque D de la droite L, de façon à former un quadrilatère DBAC, dont les côtés ne sont pas nécessairement dans un même plan.

1. Démontrer que le quadrilatère qui a pour sommets les points milieux des côtés du quadrilatère DBAC est un parallélogramme.

2. Étudier les variations de la surface de ce parallélogramme quand le point D se déplace sur la droite.

3. Trouver la position que le point D doit occuper sur la droite L pour que le parallélogramme soit un losange ou un rectangle.

4. Examiner si ce parallélogramme peut devenir un carré.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PARIS

Un corps pesant tombe, sans vitesse initiale, du sommet d'une tour. Trouver la hauteur de la tour et la durée de la chute, sachant que; dans la dernière seconde, le corps a parcouru la moitié de la hauteur totale.

— Trouver l'angle des diagonales d'un cube.

— Dans une parabole, le sommet est A, et la directrice DD'. Du point A, on mène la perpendiculaire $AB = a$ sur la directrice. Par le pied B de cette perpendiculaire, on mène une droite BMM' faisant avec AB un angle α, et rencontrant la parabole en M et M'. Calculer, au moyen des données, les longueurs $BM = r$, $BM' = r'$. Discussion.

— Dans un triangle rectangle ABC, une droite BI détermine sur le côté AC deux segments AI et IC. On connaît $IC = l$, $CBI = \alpha$, $IBA = \beta$. Calculer le segment AI par une formule logarithmique.

— Aux trois sommets A, B, C d'un triangle, on applique des forces respectivement dirigées suivant AB, BC, CA et proportionnelles à ces côtés ; chercher si ces forces se font équilibre. S'il n'y a pas équilibre, les ramener à deux forces dont l'une passe par le point A.

— Dans un tronc de cône, on connaît le rayon R de la grande base, la hauteur h, et l'on sait que l'apothème est la somme des deux rayons. Déterminer la surface totale et le volume.

— Calculer le segment d'un cercle compris entre deux cordes parallèles, l'une étant le côté du carré inscrit, et l'autre égale au rayon.

— Trouver le volume engendré par un triangle équilatéral tournant autour d'un axe passant par un sommet et perpendiculaire à l'un des côtés aboutissant à ce sommet. Le côté du triangle équilatéral est égal à a.

— La longueur AB d'un plan incliné est 60 mètres; la hauteur AC est 30 mètres. Combien de temps un mobile pesant mettra-t-il à parcourir la longueur AB.

— Résoudre le problème d'équations simultanées

$$\sin x + \sin y = \sin \alpha$$
$$\cos x + \cos y = 1 + \cos \alpha.$$

— Étant donnés les trois côtés a, b, c d'un triangle, mener une sécante DE parallèle au côté a, de façon que le trapèze BCED ainsi formé ait un périmètre donné $2l$.

— Résoudre l'équation

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$$

— Étant donnés la surface S d'un parallélogramme et les volumes V et V′ qu'il engendre en tournant successivement autour de ses deux côtés, calculer les grandeurs x et y de ces côtés, et le sinus de l'angle φ qu'ils forment entre eux. Voir comment peut varier S lorsque V et V′ restent fixes.

— Étant données les longueurs a et b de deux cordes parallèles, et leur distance d, calculer le rayon du cercle.

— On donne, dans un triangle, la base a, l'angle opposé A, et la somme k^2 des carrés des deux autres côtés b et c. On demande de calculer b, c, et $\sin \frac{B - C}{2}$. En supposant donnés a et A, déterminer entre quelles limites peut varier k^2 pour que le problème soit possible.

QUESTIONS PROPOSÉES

159. — Construire un triangle, connaissant l'angle A, la somme $b + c$ des côtés qui comprennent cet angle, et un point I du côté qui lui est opposé.

160. — Soit N un nombre impair, égal à la somme de deux carrés, et composé de n facteurs premiers, égaux ou inégaux. Le carré de N est :

1° La somme de deux carrés (propriété évidente et connue);

2° La somme de trois carrés ;
3° La somme de quatre carrés ;
. . . .
4° La somme de $(n + 1)$ carrés. *(E. Catalan.)*

161. — Couper un triangle par une droite de manière que les deux parties de ce triangle soient entre elles dans un rapport donné, et qu'elles aient leur centre de gravité sur une même perpendiculaire à la sécante. On résoudra ce problème : 1° lorsque les deux côtés du triangle sont égaux, et en particulier quand le triangle est équilatéral ; 2° quand le triangle est quelconque. *(Conc. gén. 1833.)*

162. — Une droite AD représente, en grandeur et en situation, la bissectrice d'un triangle ABC ; on suppose en outre que le rapport de AB à AC conserve une valeur constante, et l'on demande le lieu décrit par le point B et par le point C. On trouvera que ce lieu est constitué par deux droites perpendiculaires à AB, et la partagent harmoniquement. Déduire de cette remarque des applications diverses. Exemple : Construire un triangle connaissant : 1° la bissectrice ; 2° le rapport des deux côtés qui la comprennent ; 3° une troisième condition qui peut être tantôt une hauteur, tantôt une médiane, etc. *(G. L.)*

163. — Inscrire dans un triangle ABC trois rectangles, reposant chacun sur un côté, et tels que leurs diagonales soient égales et passent par un même point.

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 19878-4.

ETUDE ÉLÉMENTAIRE D'ANALYSE INDÉTERMINÉE

DU PREMIER ET DU SECOND DEGRÉ

Par M. **Ferrent.**

(*Suite*, voir p. 169.)

---

26. — Nous avons déjà remarqué (n° 19) que les formules de résolution d'une équation indéterminée peuvent être présentées sous des formes très diverses.

Nous avons signalé les deux formes suivantes pour l'équation à deux inconnues :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 \pm a_2 t \\ x_2 &= \alpha_2 \mp a_1 t \end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

Pour l'équation à trois inconnues, nous avons trouvé les formules (12), dans lesquelles nous pouvons changer d'abord les signes de tous les termes qui contiennent l'indéterminée t; ceux des termes qui contiennent l'indéterminée t_1; enfin, nous pouvons faire ces deux changements simultanément.

Nous aurons ainsi quatre formes.

Mais nous pourrions aussi écrire des formules analogues, dans lesquelles l'inconnue x_2 ou x_3 ne dépendrait que d'une seule indéterminée, comme il arrive à l'inconnue x_1 dans les formules (12).

Ces deux nouvelles formes, susceptibles également des changements signalés ci-dessus, nous donneraient en tout douze formes.

Dans l'équation à quatre inconnues, les formules peuvent être écrites d'un bien plus grand nombre de manières : car outre les changements analogues à ceux que nous venons de citer, et qui donneraient 96 manières, nous avons encore la forme (60), et celles qui peuvent en dériver.

27. — Il est naturel de se demander dès lors si les constantes des formules (71), qui donnent l'expression des valeurs des inconnues de l'équation à deux inconnues, ne

peuvent prendre aucune valeur en dehors des deux valeurs qui figurent dans ces formules.

A cet effet, posons

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + Mt \\ x_2 &= \alpha_2 + Nt \end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

α_1, α_2, M et N étant quatre inconnues.

Pour que les formules (72) puissent remplir l'objet proposé, elles doivent satisfaire à deux conditions :

1° Les valeurs qu'elles donneront aux inconnues, x_1 et x_2 devront toutes satisfaire à l'équation (1) ;

2° Toute valeur de x_1 et x_2 satisfaisant à la proposée devra être donnée par ces formules, ce qui sera vérifié, si la valeur correspondante de t est entière.

Portons les expressions (72) dans l'équation (1) :

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + (a_1M + a_2N)\, t = K.$$

Cette équation devant être satisfaite pour toute valeur de t, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 &= K \\ \text{et} \qquad a_1M + a_2N &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (73)$$

Retranchons de l'équation (1) la première des équations (73) :

$$a_1\,(x_1 - \alpha_1) + a_2\,(x_2 - \alpha_2) = 0. \qquad (74)$$

La première des équations (73) fait voir que α_1 et α_2 ne peuvent être qu'une première solution de la proposée.

La seconde des équations (73) et l'équation (74) peuvent être résolues, chacune en particulier, au moyen des formules (2), car nous savons que ces formules donnent toutes les solutions.

On obtient ainsi

$$\left.\begin{aligned} M &= a_2\theta, & x_1 - \alpha_1 &= a_2\varphi \\ N &= -a_1\theta, & x_2 - \alpha_2 &= -a_1\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (75)$$

L'une des équations (72), résolue par rapport à t, donne

$$t = \frac{x_1 - \alpha_1}{M} = \frac{\varphi}{\theta}.$$

La seconde des équations (72) conduirait au même résultat.

La seconde condition exige que t soit entier ; or, φ, qui est l'indéterminée des inconnues de la proposée, doit pouvoir prendre toute valeur entière, et notamment la valeur 1. Le

quotient $\frac{\varphi}{\theta}$ devant rester entier pour toutes les valeurs de φ, θ ne peut avoir d'autres valeurs que celles-ci :

$$\theta = \pm 1.$$

Par suite,

$$M = \pm a_2, \qquad N = \mp a.$$

Nous obtenons ainsi les deux résultats connus (71), et nous voyons qu'il ne peut en exister d'autres.

28. — Nous pouvons résoudre une question analogue au sujet de l'équation à trois inconnues. Nous pouvons chercher s'il n'existerait pas des formules donnant d'une manière semblable les valeurs des trois inconnues, dont l'expression serait ainsi exempte de la singularité citée au n° 24.

L'équation proposée étant

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = K, \tag{76}$$

les expressions cherchées seront de la forme

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + Mt + Nt_1 \\ x_2 &= \alpha_2 + M_1t + N_1t_1 \\ x_3 &= \alpha_3 + M_2t + N_2t_1 \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

contenant neuf inconnues α_1, α_2, α_3, M, M_1, M_2, N, N_1, N_2.

Portons ces expressions dans l'équation (76) ; t et t_1 devant rester indéterminées, il viendra :

$$\left.\begin{aligned} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 &= K \\ a_1M + a_2M_1 + a_3M_2 &= 0 \\ a_1N + a_2N_1 + a_3N_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Retranchons de (76) la première des équations (78) :

$$a_1(x_1 - \alpha_1) + a_2(x_2 - \alpha_2) + a_3(x_3 - \alpha_3) = 0. \tag{79}$$

La première des équations (78) fait voir que les quantités α_1 α_2 α_3 ne peuvent être qu'une première solution de la proposée.

Résolvons les deux dernières équations (78) et l'équation (79) au moyen des formules (12) :

$$\left.\begin{aligned} M &= \rho\theta \\ M_1 &= m\theta + \frac{a_3}{\rho}\theta_1 \\ M_2 &= n\theta - \frac{a_2}{\rho}\theta_1 \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

$$\left.\begin{aligned} N &= \rho\varphi \\ N_1 &= m\varphi + \frac{a_3}{\rho}\,\varphi_1 \\ N_2 &= n\varphi - \frac{a_2}{\rho}\,\varphi_1 \end{aligned}\right\} \quad (81)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - \alpha_1 &= \rho\sigma \\ x_2 - \alpha_2 &= m\sigma + \frac{a_3}{\rho}\,\sigma_1 \\ x_3 - \alpha_3 &= n\sigma - \frac{a_2}{\rho}\,\sigma_1 \end{aligned}\right\} \quad (82)$$

Les équations (77) nous donnent d'ailleurs, pour valeur de t et t_1 :

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{N_1(x_1 - \alpha_1) - N(x_2 - \alpha_2)}{MN_1 - NM_1} \\ t_1 &= \frac{M(x_2 - \alpha_2) - M_1(x_1 - \alpha_1)}{MN_1 - NM_1} \end{aligned}\right\} \quad (83)$$

Portons dans ces expressions les valeurs (80), (81) et (82); il vient :

$$t = \frac{\sigma\varphi_1 - \varphi\sigma_1}{\theta\varphi_1 - \varphi\theta_1}, \quad t_1 = \frac{\theta\sigma_1 - \sigma\theta_1}{\theta\varphi_1 - \varphi\theta_1}, \qquad (84)$$

σ et σ_1 étant les indéterminées de la résolution générale de l'équation (79) ou (76), peuvent prendre toute valeur entière, et notamment les valeurs o et 1. Il résulte de là que les quatre fractions

$$\frac{\varphi}{\theta\varphi_1 - \varphi\theta_1}, \quad \frac{\varphi_1}{\theta\varphi_1 - \varphi\theta_1}, \quad \frac{\theta}{\theta\varphi' - \varphi\theta'}, \quad \frac{\theta_1}{\theta\varphi_1 - \varphi\theta_1}$$

doivent se réduire à des nombres entiers.

Le produit des deux moyennes, diminué du produit des extrêmes, doit donc aussi être un nombre entier. Or, la différence de ces deux produits se réduit à

$$\frac{1}{\theta\varphi_1 - \varphi\theta_1}.$$

Nous aurons donc

$$\theta\varphi_1 - \varphi\theta_1 = \pm 1. \qquad (85)$$

Cette condition, qui est nécessaire, est aussi suffisante : car elle rend évidemment entières les valeurs de t et de t_1 (84).

L'équation (85), qui est du second degré à quatre inconnues, peut être résolue comme une équation du premier degré à deux inconnues, en considérant chacun des produits $\theta\varphi_1$ et $\varphi\theta_1$ comme une inconnue.

Nous aurons ainsi :

$$\theta\varphi_1 = \omega \pm 1,$$
$$\varphi\theta_1 = \omega;$$

d'où nous déduirons

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{\omega}{\theta_1} \\ \varphi_1 &= \frac{\omega \pm 1}{\theta} \end{aligned}\right\} \quad (86)$$

Ces résultats, portés dans les expressions (80) et (81), nous donneront les valeurs des coefficients, et les valeurs des inconnues seront :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \rho\theta t + \rho\left(\frac{\omega}{\theta_1}\right) t_1 \\ x_2 &= \alpha_2 + \left(m\theta + \frac{a_3}{\rho}\theta_1\right) t + \left[m\left(\frac{\omega}{\theta_1}\right) + \frac{a_3}{\rho}\left(\frac{\omega \pm 1}{\theta}\right) t_1\right] \\ x_3 &= \alpha_3 + \left(n\theta - \frac{a_2}{\rho}\theta_1\right) t + \left[n\left(\frac{\omega}{\theta_1}\right) - \frac{a_2}{\rho}\left(\frac{\omega \pm 1}{\theta}\right) t_1\right] \end{aligned}\right\} \quad (87)$$

et les quantités ω, θ, θ_1, sont entièrement arbitraires, sous la condition que les quotients $\frac{\omega}{\theta_1}$ et $\frac{\omega \pm 1}{\theta}$ soient des nombres entiers. Pour chaque valeur de ces trois indéterminées, les expressions (87) donnent toutes les solutions de la proposée.

On devra d'abord choisir la valeur de ω, puis opter entre les deux signes du terme ± 1 ; et enfin choisir θ_1 parmi les diviseurs de ω, et θ parmi ceux de $\omega \pm 1$.

On retrouverait les formules (12) en posant dans les formules (87) :

$$\theta t + \frac{\omega}{\theta_1} t_1 = u$$
$$\theta_1 t + \frac{\omega \pm 1}{\theta} t_1 = v.$$

Pour chaque valeur entière de t et t_1, on trouverait une valeur entière de u et v ; de plus, à chaque valeur entière

de u et v correspondra une valeur entière de t et t_1 : car en résolvant ces deux équations relativement à t et t_1, les valeurs de ces deux quantités se présenteront sous une forme fractionnaire dont le dénominateur commun sera

$$\theta\frac{\omega\pm 1}{\theta} - \theta_1\frac{\omega}{\theta_1} = \pm 1.$$

29. — Nous trouvons dans les *Disquisitiones arithmeticæ*, de Gauss, le problème suivant, qui est fort connu:

Une fraction étant donnée $\frac{p}{q}$, dont le dénominateur q peut être décomposé en deux facteurs premiers entre eux, a et b, remplacer la fraction $\frac{p}{q}$ par la somme de deux fractions dont les dénominateurs soient les nombres a et b.

Nous ne résoudrons pas cette question ainsi posée, parce qu'elle est trop simple; nous la remplacerons par la suivante:

On donne une fraction $\frac{p}{q}$, dont le dénominateur q peut être décomposé en n facteurs a_1, a_2, ... a_n ; remplacer la fraction donnée par la somme de n fractions dont les dénominateurs soient les nombres a_1, a_2, ... a_n.

En appelant x_1, x_2, ... x_n les numérateurs cherchés, l'équation sera

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} + \ldots + \frac{x_n}{a_n} = \frac{p}{q}$$

ou

$$\frac{q}{a_1}x_1 + \frac{q}{a_2}x_2 + \frac{q}{a_3}x_3 + \ldots + \frac{q}{a_n}x_n = p. \quad (88)$$

La fraction donnée $\frac{p}{q}$ étant supposée irréductible, il n'existe aucun facteur commun entre la quantité p et les coefficients des inconnues, qui sont tous des nombres entiers.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (88) puisse être résolue est donc que les coefficients des inconnues n'aient aucun diviseur commun.

Or, il est facile de voir que, si deux quelconques des facteurs a_1, a_2, ... a_n, ont un diviseur commun, ce diviseur divisera tous les coefficients; il est donc nécessaire que tous ces facteurs soient premiers entre eux deux à deux.

Réciproquement, si les facteurs sont premiers entre eux deux à deux, les coefficients des inconnues de l'équation (88) n'ont aucun diviseur commun.

En effet, si ces coefficients avaient un diviseur commun, ils seraient divisibles par un nombre premier, ν, et ce nombre ν étant premier absolu devrait diviser l'un des facteurs des coefficients. Mais le même facteur ne figurant pas dans tous les coefficients, il faudrait donc que ν en divisât au moins deux, ce qui est contraire à l'hypothèse.

30. — Si la fraction proposée était $\frac{p}{a^n b^{n'}}$, a et b étant premiers entre eux, il n'y aurait qu'une manière de décomposer cette fraction, de sorte que les dénominateurs soient premiers entre eux, savoir:

$$\frac{x}{a^n} + \frac{y}{b^{n'}} = \frac{p}{a^n b^{n'}}.$$

Mais si le dénominateur donné $a^n b^{n'}$, au lieu d'être le produit des dénominateurs, doit être leur plus petit multiple, on peut poser

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{a^2} + \ldots + \frac{x_n}{a^n} + \frac{y_1}{b} + \frac{y_2}{b^2} + \ldots + \frac{y_{n'}}{b^{n'}} = \frac{p}{a^n b^{n'}} \quad (89)$$

ou

$$a^{n-1}b^{n'}x_1 + a^{n-2}b^{n'}x_2 + \ldots + b^{n'}x_n$$
$$+ a^n b^{n'-1}y_1 + a^n b^{n'-2}y_2 + \ldots + a^n y_{n'} = p. \quad (90)$$

1° Il n'existe aucun diviseur commun entre les quantités connues de l'équation; 2° les coefficients des inconnues sont premiers entre eux, car les deux nombres a^n et $b^{n'}$, qui sont deux de ces coefficients, sont premiers entre eux.

Les deux coefficients a^n et $b^{n'}$ étant premiers entre eux, l'équation (90) pourra être résolue comme une équation à deux inconnues, conformément aux observations contenues dans le n° 20.

Les deux inconnues x_n, $y_{n'}$ seront seules assujetties à certaines conditions ; les autres seront entièrement arbitraires.

Une remarque semblable pourrait être faite au sujet de la décomposition de la fraction $\frac{p}{a^n b^{n'} c^{n''}}$ en fractions simples, a, b et c étant premiers entre eux deux à deux.

L'équation résultante pourrait être résolue comme une équation à trois inconnues, d'après le nº 20; et les inconnues seront entièrement arbitraires à l'exception des numérateurs des trois fractions dont les dénominateurs sont a^n, $b^{n'}$ et $c^{n''}$.

Nous aurions pu aussi comprendre, parmi les fractions qui figurent dans le premier membre de (89), des fractions de la forme $\frac{z}{a^{\nu} b^{\nu'}}$, ν et ν' étant respectivement inférieurs à n et n'. Les numérateurs inconnus de ces fractions resteraient aussi entièrement arbitraires.

31. — Les problèmes que nous avons résolus aux nos 29 et 30 comportent une infinité de solutions, dans les cas que nous avons indiqués, où le problème peut être résolu.

Mais il faut alors entendre par somme de fractions la somme algébrique; c'est-à-dire que les inconnues peuvent prendre des valeurs positives ou négatives.

Si l'on demandait de décomposer une fraction en plusieurs autres dont la proposée soit la somme arithmétique, le nombre des solutions serait toujours limité, et quelquefois même il n'en existerait aucune dans le cas où la résolution algébrique est possible.

Cela résulte de ce que les premiers membres des équations (88) et (89) n'ont que des termes positifs, et que, dans ce cas, le nombre des solutions positives est toujours limité et quelquefois même nul.

Nous reviendrons plus loin sur cette partie de la question.

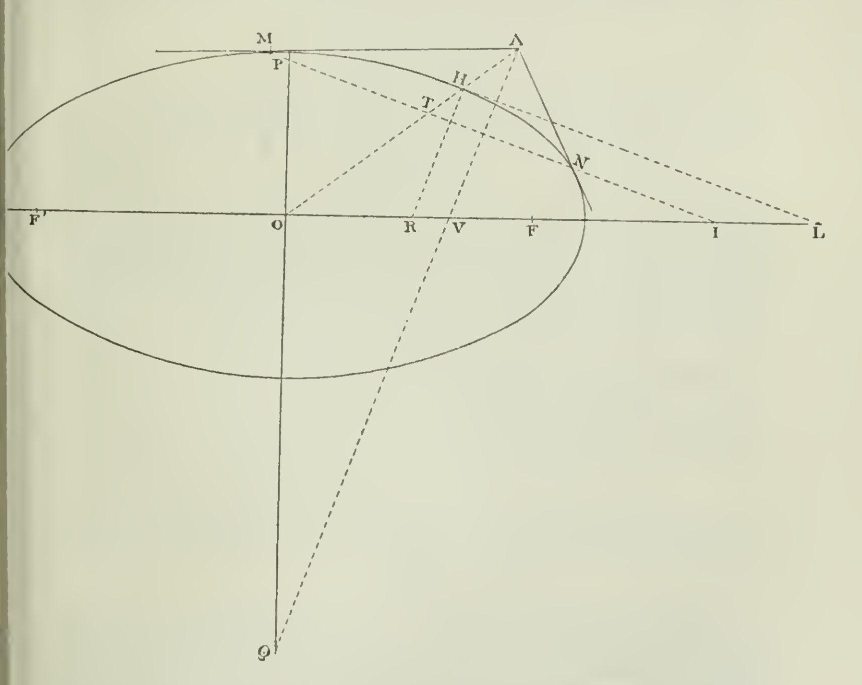
(A suivre.)

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

XL

Par un point A *on mène à une ellipse les deux tangentes* AM *et* AN *(*M *et* N *étant les points de contact);* MN *coupe le petit axe en* P *et la perpendiculaire abaissée de* A *sur* MN *coupe ce petit axe en* Q. *Démontrer que la circonférence décrite sur* PQ *comme diamètre passe par les foyers.*



Si F est l'un des foyers, il est évident qu'il suffit de démontrer la relation $FO^2 = OP.OQ$, O étant le centre de l'ellipse.

Joignons OA qui coupe MN en T et la courbe en H; la

tangente en H qui est parallèle à MN coupe l'axe focal en L; soit I le point où MN coupe l'axe, V le point où AQ coupe l'axe; par H menons une parallèle à AQ qui coupe l'axe en R (c'est la normale en H).

Les deux triangles semblables OVQ, POI donnent

$$OP.OQ = OI.OV. \qquad (1)$$

Les deux triangles semblables OHR, OVA donnent

$$\frac{OR}{OV} = \frac{OH}{OA}. \qquad (2)$$

Les deux triangles semblables OHL, OTI donnent

$$\frac{OI}{OL} = \frac{OT}{OH}; \qquad (3)$$

mais comme l'on a

$$OH^2 = OT.OA$$

ou

$$\frac{OH}{OA} = \frac{OT}{OH},$$

les deux seconds membres de (2) et (3) étant égaux, on a

$$\frac{OR}{OV} = \frac{OI}{OL}; \qquad (4)$$

mais dans le triangle HFF', R et L sont les pieds sur la base F'F de la bissectrice intérieure et de la bissectrice extérieure de l'angle F'HF, et sont par suite conjugués harmoniques par rapport à F et F'; on a donc

$$OR.OL = OF^2;$$

l'égalité (4) donne alors

$$OI.OV = OF^2,$$

c'est-à-dire d'après (1)

$$OP.OQ = OF^2;$$

C. Q. F. D.

Une démonstration absolument analogue s'appliquerait à l'hyperbole.

XLI

Une chaîne articulée $CD_1D_2 \ldots D_{2n-1}B$ *est formée de* $2n$ *longueurs égales* $CD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = \ldots = D_{2n-1}B = 1$, *elle est étendue sur le sol repliée de façon que les sommets* C, D_2, $D_4 \ldots D_{2n-2}$, B *soient en ligne droite ainsi que les sommets* D_1, $D_3 \ldots D_{2n-1}$.

On sait de plus qu'elle ne revient pas sur elle-même (ce qui implique que les angles D_1CD_2 *et* D_{2n-1} B D_{2n-2} *sont aigus); on demande de calculer la distance* CB = a, *connaissant* l *et les angles*

$$D_1CD_2 = C$$
$$D_{2n-1}\,B\,D_{2n-2} = B.$$

Appelons x l'angle $D_3D_1D_2$.

On voit facilement que la chaîne forme 2_{n-1} triangles isoscèles CD_1D_2, $D_1D_2D_3$ ... $D_{2n-2}\,D_{2n-1}\,B$, et que les angles au sommet de ces triangles sont en progression arithmétique.
$180 - 2C$, $180 - 2x$, $180 - 4x + 2C$ ...
$180 - 2(2n-2)\,x + 2(2n-3)\,C$ et que la raison est : $2C - 2x$.

Mais $D_{2n-1}\,B\,D_{2n-2} = B = 90 - \dfrac{BD_{2n-1}\,D_{2n-2}}{2}$.

On a donc l'équation

$$B = 90 - 90 + 2(n-1)x - (2n-3)C,$$

d'où

$$x = \frac{B + (2n-3)C}{2(n-1)},$$

les angles CD_1D_2, $D_1D_2D_3$ ... $D_{2n-2}\,D_{2n-1}\,B$ sont donc

$$(180 - 2C),\ \left(180 - 2C + \frac{C-B}{n-1}\right),\ \left(180 - 2C + 2\,\frac{C-B}{n-1}\right)$$
$$\ldots \left[180 - 2C + (2n-2)\,\frac{C-B}{n-1}\right],$$

mais on a

$$CB = 2\Sigma l \cos\left(90 - \frac{D_{2p}\ D_{2p+1}\ D_{2p+2}}{2}\right)$$

ou

$$\frac{a}{2l} = \cos C + \cos\left(C - \frac{C-B}{n-1}\right) + \cos\left(C - 2\frac{C-B}{n-1}\right) + \ldots \cos\left(C - (n-1)\frac{C-B}{n-1}\right),$$

et, par la formule qui donne la somme des cosinus d'arcs en progression arithmétique,

$$\frac{a}{2l} = \frac{\sin\frac{n}{2(n-1)}(B-C)\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{1}{2(n-1)}(B-C)}.$$

Remarque. — Si n est de la forme $2^p + 1$, le problème est résoluble par la règle et le compas; nous engageons les élèves à traiter directement le cas de $p = 0$ et de $p = 1$ et, si nous appelons A le point d'intersection du premier chaînon CD_1 avec le dernier BD_{2n-1}, à construire le triangle ABC connaissant $n = 2$, l la longueur commune des chaînons, $BC = a$ et la somme $AB + AC = K$, en discutant le problème.

XLII

D'un point A *on mène à une parabole de foyer* F *les deux tangentes, en appelant* B *et* C *les points de contact;*

D'un point P *pris sur la droite* CB *je mène les deux tangentes qu'on peut mener de ce point à la parabole.*

L'une coupe AB *en* R *et* AC *en* Q;

L'autre coupe AB *en* R' *et* AC *en* Q'.

Démontrer que l'on a

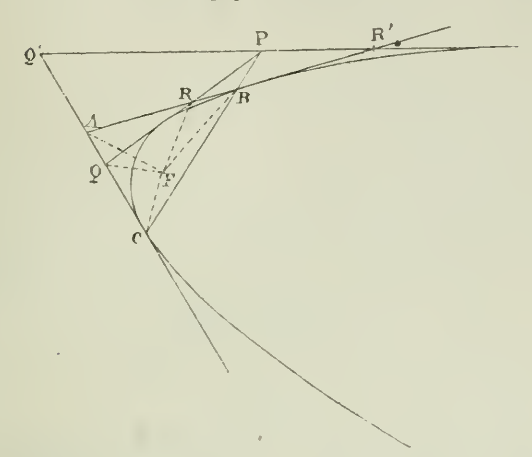
$$\frac{AQ}{AC} = \frac{BR}{BA} \quad et \quad \frac{AQ'}{AC} = \frac{BR'}{BA}.$$

Joignons les points B, R, A, Q, C au point F.

D'après les propriétés connues de la parabole, les deux triangles BFA et FAC sont semblables, ainsi que BFR et FAQ.

Donc dans les deux triangles semblables BFA, FAC, R èt Q étant des points homologues, on a

$$\frac{AQ}{AC} = \frac{BR}{BA}$$



On démontrerait de même que $\frac{AQ'}{AC} = \frac{BR'}{BA}$. C. Q. F. D.

(A suivre.)

QUESTION 100

Solution par Ch. Derigny, élève au Lycée Louis-le-Grand.

(*Suite*, voir p. 178.)

DISCUSSION

Pour qu'une racine convienne au problème, il faut d'abord qu'elle soit réelle; il faut donc que la quantité sous le radical soit positive.

Comme c'est une fraction, il faut que ses deux termes soient de même signe.

Nous pouvons considérer les deux termes comme des

polynômes du premier degré en m; et alors il faudra donner à m des valeurs extérieures aux racines de ces deux polynômes.

La racine du numérateur est $\dfrac{b(a-b)}{(2a-b)^2}$

Celle du dénominateur est $\dfrac{a-b}{b}$.

Or dans notre problème nous avons supposé $a > b$.

Donc $2a - b > b$.

Par conséquent la racine m' du numérateur est plus petite que celle du dénominateur m''.

Il faut donc, pour que le problème soit possible, que l'on ait

$$m < \frac{b(a-b)}{(2a-b)^2},$$

ou

$$m > \frac{a-b}{b}.$$

Mais pour qu'une racine convienne au problème, il ne suffit pas qu'elle soit réelle; elle peut être positive ou négative; mais elle doit remplir une autre condition, il faut qu'elle soit plus petite que $\dfrac{b}{2}$, ou plus grande que $a - \dfrac{b}{2}$, en valeur absolue.

Ainsi

$$x < \frac{b}{2} \quad \text{ou}\, x > a - \frac{b}{2}.$$

Substituons ces deux valeurs dans le premier membre de l'équation (5); avec $\dfrac{b}{2}$ on aura

$$b^2(b - a + mb) - (b - a)(b^2 - 4mab)mb^3.$$

Effectuons les calculs : $b^2(b-a)$ disparaît, ainsi que mb^3, et il reste

$$+ (b-a) \times 4mab.$$

Comme $b - a$ est négatif, le signe de ce produit ne dépendra que du signe de m.

Dans le problème actuel m ne pouvant être que positif, le produit est négatif.

Le résultat de la substitution est donc toujours négatif; mais le coefficient de x^2 est de signe variable; et il y a plusieurs cas à considérer suivant que $b - a + mb$ est positif ou négatif.

Si $m < \dfrac{a-b}{b}$, $b - a + mb$ est négatif; et alors le résultat de la substitution étant de même signe que le coefficient du terme en x^2, c'est que $\dfrac{b}{2}$ est extérieure aux deux racines, et comme il y a une racine négative, $\dfrac{b}{2}$ est toujours plus grand que les deux racines. La racine positive conviendra certainement. La racine négative également, car elle est égale à la racine positive, mais de signe contraire.

Donc si $m < \dfrac{a-b}{b}$, deux solutions, une positive et une négative, pourvu toutefois que m soit $< \dfrac{b(a-b)}{(2a-b)^2}$ d'après la condition de réalité.

Si $m > \dfrac{a-b}{b}$, le résultat de la substitution est négatif, et par suite de signe contraire au coefficient de x^2 qui est *positif*.

Donc $\dfrac{b}{2}$ est compris entre les deux racines. La racine plus grande que $\dfrac{b}{2}$ doit encore être plus grande que $a - \dfrac{b}{2}$; considérons donc ce que devient le premier membre de l'équation quand on y fait $x = a - \dfrac{b}{2}$.

On a

$$4\left(a - \frac{b}{2}\right)^2(b - a + mb) - (b - a)(b^2 - 4mab) - mb^3.$$

Développons et simplifions, on trouve

$$4a^2b - 4ab^2 + b^3 - 4a^3 + 4a^2b - ab^2 + 4ma^2b - 4mab^2 + mb^3 - b^3 + 4mab^2 + ab^2 - 4ma^2b - mb^3,$$

ce qui devient

$$8a^2b - 4ab^2 - 4a^3,$$

ou

$$4a(2ab - b^2 - a^2) = - 4a(a - b)^2.$$

Le résultat de la substitution est toujours négatif, et l'on sait que le coefficient de x^2 est positif; donc $a - \frac{b}{2}$ est compris entre les racines.

Donc la plus grande convient bien au problème, et la plus petite aussi, puisqu'elle est égale à la première et de signe contraire.

En résumé, il y a toujours deux solutions pourvu que m ne soit pas négatif, ni compris entre $\frac{b(a - b)}{(2a - b)^2}$ et $\frac{a - b}{b}$.

Dans le cas où m est négatif, on sait que nous avons un problème différent, et l'équation donne toujours des valeurs réelles, puisque m n'est jamais compris entre m' et m''.

Les racines peuvent être positives ou négatives; mais elles doivent être comprises entre $\frac{b}{2}$ et $a - \frac{b}{2}$ ou $-\frac{b}{2}$ et $-\frac{b}{2} + a$.

Le résultat de la substitution de $\frac{b}{2}$ est positif, et comme m est toujours $< \frac{a - b}{2}$, le coefficient de x^2 est négatif.

Donc $\frac{b}{2}$ est compris entre les deux racines.

Si la racine positive convient, il en sera de même de la racine négative.

Considérons donc la racine positive qui est plus grande que $\frac{b}{2}$, elle doit être plus petite que $a - \frac{b}{2}$.

Le résultat de la substitution de $a - \frac{b}{2}$ est toujours négatif, et par suite de même signe que le coefficient de x^2; donc $a - \frac{b}{2}$ est extérieur aux racines; et comme l'une est négative, il est plus grand que les deux.

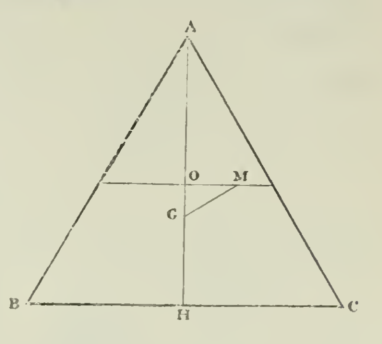
Les deux racines conviennent donc.

Donc

Si $m > m'$, deux solutions en dehors du triangle;

Si $m < m''$, deux solutions : dans le triangle, si m est positif; hors du triangle, si m est négatif.

Pas de solution si m est compris entre m' et m''.



On peut se proposer de calculer la distance du point M au centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Soit G le centre.

Joignons MG; le triangle rectangle MGO nous permet de calculer MG; car

$$\overline{MG}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{OG}^2.$$

Or nous connaissons MO et nous pouvons calculer OG.

$$\overline{OM}^2 = \frac{(b-a)(b^2-4mab)+mb^3}{4(b-a+mb)},$$

$$OG = AG - AO.$$

Or

$$AG = \frac{2}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$AO = \frac{b\sqrt{3}}{2}.$$

Donc

$$\overline{OG}^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{3} - ab + \frac{3b^2}{4},$$

$$\overline{GM}^2 = \frac{(b-a)(b^2-4mab)+mb^3}{4(b-a+mb)} + \frac{4a^2-12ab+9b^2}{12},$$

ce qui devient

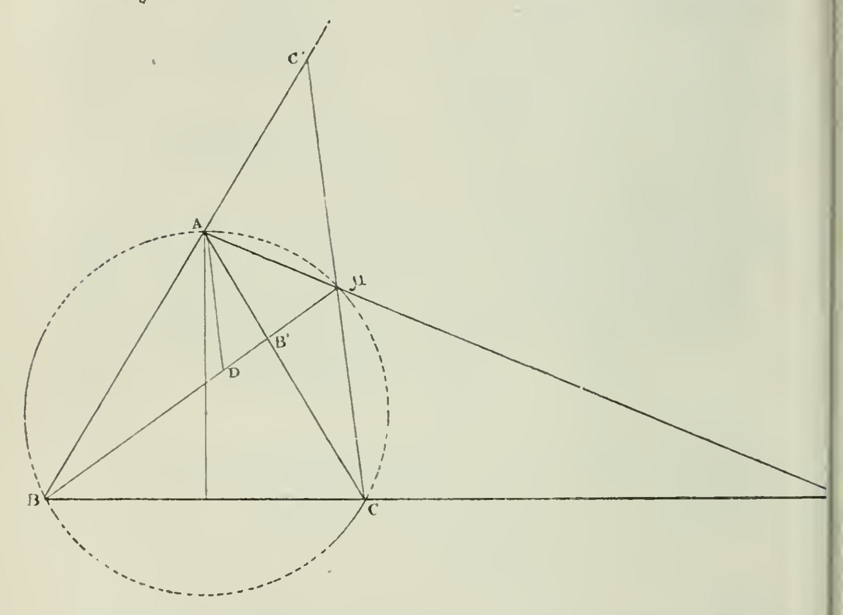
$$\overline{GM}^2 = \frac{3(1-m)b^3 - 6a(1+m)b^2 + 4a^2(1+m)b - a^3}{3(1+m)b - 3a}.$$

Expression qui, on le voit, est indépendante de b, si l'on fait $m = -1$.

Dans ce cas le point M est toujours également distant du point G, quel que soit b. Par conséquent, le point M est sur une circonférence décrite du point G comme centre

avec un rayon égal à $GM = \sqrt{\frac{a^3}{3a}} = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Donc *si le produit* BA′ . CB′ . AC′ *est égal au cube du côté du triangle, le point* M *est sur la circonférence circonscrite au triangle.*



Je dis maintenant que réciproquement, *si l'on prend un point* μ *sur la circonférence circonscrite au triangle* ABC, *et qu'on le joigne aux trois sommets, le produit de trois segments non consécutifs déterminés sur les côtés du triangle est égal à* a^3 :

$$B'A \times C'B \times A'C = a^3$$

ou que

$$\frac{B'A}{a} \times \frac{C'B}{a} \times \frac{A'C}{a} = 1.$$

Menons AD parallèle à $C'\mu$ jusqu'à sa rencontre en D avec $B\mu$; les deux triangles semblales $BC'\mu$ et BAD nous donnent

$$\frac{BC'}{a} = \frac{B\mu}{BD}.$$

Mais les deux triangles ABD et AμC sont égaux : car ils ont les côtés AC et AB égaux; l'angle ABμ = l'angle ACμ ; et l'angle BAD = l'angle CAμ, comme ayant même mesure; savoir : l'angle μAC a pour mesure la moitié de l'arc $\mu C = \frac{a - A\mu}{2}$. De même l'angle BAD = BAC — DAC et comme DAC = ACμ, la mesure de l'angle BAD est aussi égale à $\frac{a - A\mu}{2}$. Donc les deux triangles BAD et CAμ sont égaux et l'on a

$$BD = \mu C;$$

remplaçons BD par cette valeur, il vient pour le premier rapport

$$\frac{BC'}{a} = \frac{B\mu}{\mu C}. \qquad (6)$$

Pour le rapport $\frac{CA'}{a}$ les deux triangles semblables A'CA et ACμ nous donnent

$$\frac{CA'}{a} = \frac{\mu C}{\mu A}. \qquad (7)$$

Enfin pour le rapport $\frac{B'A}{a}$ les deux triangles semblables μAB' et μBC nous donnent

$$\frac{AB'}{a} = \frac{\mu A}{\mu B}. \qquad (8)$$

Faisons le produit des trois proportions (6) (7) et (8) :

$$\frac{BC'}{a} \times \frac{CA'}{a} \times \frac{AB'}{a} = \frac{\mu B}{\mu C} \times \frac{\mu C}{\mu A} \times \frac{\mu A}{\mu B} = 1.$$

C. Q. F. D.

VARIÉTÉS

DÉFINITION DES GRANDEURS ET DES NOMBRES

Par M. **A. Calinon**, ancien élève de l'École Polytechnique.

§ 1. — *Notions de la forme et des nombres.*

Lorsque nous comparons entre eux différents corps, nous jugeons que, abstraction faite de la matière qui les compose, ils sont ou ne sont pas de même forme; cette notion de la forme nous vient donc de l'observation du monde matériel; ainsi, nous trouvons à la base de la géométrie, qui est la science de la forme, un fait d'observation, et nous ne voyons pas la possibilité de nous passer de ce fait d'observation pour arriver à l'idée de forme ou de figure.

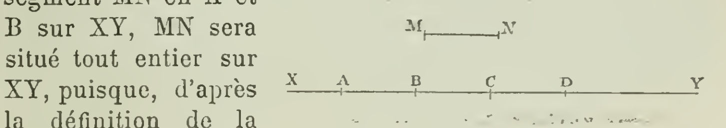
De même l'idée de nombre nous vient de l'observation de plusieurs objets semblables; toutefois il faut remarquer que l'on ne peut déduire de là que la notion des nombres entiers; nous savons ce que c'est que trois, quatre boules, mais un cinquième de boule n'offre aucun sens : pour définir les nombres fractionnaires, on est obligé de recourir à ce qu'on appelle les grandeurs géométriques. Mais, par contre, lorsque l'on parle des grandeurs en géométrie, on les présente comme des figures mesurables et l'on suppose connu le nombre fractionnaire; il y a donc là un certain manque de clarté et de rigueur. et l'on est en droit de se demander si l'idée de nombre se déduit de l'idée de grandeur, ou inversement. C'est ce point que nous allons essayer d'élucider en rattachant simplement la définition du nombre arithmétique ou algébrique à la notion de la forme : de cette façon nous unifierons les sciences mathématiques, en faisant dépendre la géométrie, l'arithmétique et l'algèbre d'un seul fait d'observation, celui qui nous donne la notion de la forme. Ainsi, nous allons considérer l'idée de forme comme étant fournie directement par l'observation, sans définition géo-

métrique, et nous allons en déduire la définition des grandeurs et des nombres.

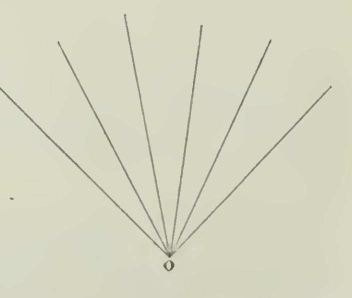
§ 2. — *Définition des grandeurs.*

Nous rappelons d'abord que des formes ou des figures égales sont celles qu'on peut faire coïncider point par point en les plaçant l'une sur l'autre ; on les appelle également des figures superposables ; on peut aussi considérer des figures égales comme des positions diverses d'une même figure.

Cela posé, considérons un segment de droite MN et une droite indéfinie XY ; portons les deux extrémités M et N du segment MN en A et B sur XY, MN sera situé tout entier sur XY, puisque, d'après la définition de la ligne droite, il n'en passe qu'une par les points A et B : portons à nouveau le segment MN sur XY en BC ; l'ensemble des segments AB et BC forme un autre segment AC ; de même, si l'on porte encore MN en CD, on a encore un segment AD ; donc le segment de droite jouit de cette propriété que des segments égaux, groupés comme nous venons de l'indiquer, donnent toujours des segments.



De même, il résulte de la définition de l'angle plan que des angles égaux groupés sur un même plan, autour d'un sommet commun O, et adjacents les uns aux autres, donnent encore des angles plans.



L'arc de cercle, l'angle dièdre, le fuseau sphérique, etc., jouissent également de cette propriété, c'est-à-dire que des éléments égaux d'une de ces figures peuvent être groupés de façon à reproduire une figure du même genre ; cela se démontre pour chaque figure comme conséquence de la définition même de cette figure.

Il va sans dire que cette propriété caractérise seulement quelques figures géométriques; ainsi il n'y a aucun moyen de grouper des cercles égaux de façon à reproduire un cercle.

Nous appellerons, par définition, grandeurs, les figures géométriques qui possèdent ainsi la propriété de reproduire des figures du même genre par un groupement d'éléments égaux, fait d'une certaine façon.

Lorsqu'on part d'une même figure, d'un angle par exemple, deux groupements différents, c'est-à-dire deux groupements donnant des figures non égales, sont des grandeurs de même espèce; en d'autres termes, l'espèce d'une grandeur consiste dans le genre de la figure que l'on considère et dans le mode de groupement par lequel cette figure en engendre d'autres du même genre; telle est la définition du mot *espèce*.

§ 3. — *Définition des nombres entiers.*

Il est évident qu'en partant d'une des figures dont nous venons de parler, par exemple du segment de droite, on peut obtenir, en groupant, comme nous l'avons indiqué, des segments égaux, une infinité de segments différents; pour distinguer entre eux ces divers groupements, nous emploierons le procédé qu'on emploie toujours en pareil cas, lequel consiste à classer et à nommer les objets que l'on considère; nous classerons les groupements dans un ordre tel que chacun résulte du précédent par l'adjonction du segment dont nous sommes partis pour former les groupements : ce classement fait, nous donnerons à chaque figure un nom; de plus, nous adopterons la même série de noms pour la série des groupements d'une quelconque des figures que nous avons appelées grandeurs, segment de droite, arc de cercle, angle plan ou dièdre, etc.

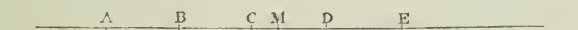
Cette série de noms est, par définition, la série des nombres entiers; lorsqu'on groupe, par exemple, des segments de droite égaux, le segment qui forme l'élément du groupement s'appelle l'unité ou la figure unité, quelle que soit l'espèce de la grandeur; les nombres sont donc les noms des différents groupements d'unités. En résumé, nous arrivons à la définition du nombre en considérant certaines

figures géométriques, appelées grandeurs, qui ont la propriété commune de donner lieu à des groupements spéciaux, et en nous attachant seulement à cette propriété, abstraction faite de l'espèce des grandeurs, c'est-à-dire de ce qui les distingue entre elles.

Lorsqu'on se donne la figure unité et le nom d'un des groupements de cette figure, le groupement est évidemment déterminé, puisque ce nom le distingue de tous les autres: c'est ce qu'on exprime en disant que le nombre détermine ou mesure la grandeur en fonction de l'unité.

§ 4. — *Définition des nombres fractionnaires.*

Groupons successivement 2 segments égaux en AC, 3 en AD, 4 en AE, etc.; on voit tout de suite que si le point M tombe entre deux points de division C et D, le segment AM



n'est mesuré ni par le nombre 2 ni par le nombre 3, en fonction de l'unité AB; pour mesurer ou nommer ce segment AM, on est amené à généraliser l'idée du nombre. Considérons à cet effet un segment AB obtenu en groupant 5 segments égaux à AA_1 et supposons que nous prenions AB comme unité; les segments égaux AA_1, A_1A_2, etc., sont appelés



subdivisions ou parties aliquotes de l'unité AB ; le segment AA_1 se représente par le symbole 1/5, AB ou l'unité étant un groupement de 5 segments égaux à AA_1; 1/5 est donc le nom ou le nombre qui détermine ou mesure AA_1 en fonction de l'unité.

Groupons maintenant 7 segments égaux à AA_1, et nous aurons ainsi un nouveau segment AA_7 que nous représenterons par le symbole 7/5; ce symbole est ce qu'on appelle le nombre fractionnaire; le dénominateur 5 exprime le nombre des parties aliquotes AA_1 dont le groupement forme l'unité AB et le numérateur 7 exprime le nombre de ces mêmes

parties AA_1 dont le groupement forme le segment AA_7 : ici, comme pour les nombres entiers, chaque fraction 7/5 détermine, mesure un seul segment en fonction de l'unité ; mais la réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire que plusieurs fractions peuvent mesurer un même segment en fonction de la même unité.

Le nombre fractionnaire ne permet pas de mesurer absolument toutes les formes du segment; on trouve en effet des segments qui, par rapport à une unité déterminée, ne correspondent à aucun nombre entier ou fractionnaire : c'est le cas de nombres incommensurables qu'on rattache par la méthode des limites au cas précédent; nous n'insistons pas sur ce point qui ne présente aucune difficulté.

Nous allons maintenant définir les quatre opérations de l'arithmétique pour les grandeurs et pour les nombres.

(A suivre.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

164. — Si l, m, n sont les perpendiculaires abaissées du centre du cercle circonscrit sur les côtés d'un triangle, démontrer que l'on a

$$4\left(\frac{a}{l}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}\right)=\frac{abc}{lmn}.$$

165. — ABCP, DEFQ sont deux circonférences concentriques; ABC, DEF sont deux triangles équilatéraux quelconques inscrits dans ces deux circonférences, P et Q un point pris sur chacune de ces circonférences. Démontrer que l'on a

$$QA^2 + QB^2 + QC^2 = PD^2 + PE^2 + PF^2.$$

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 21434-4

ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE D'ANALYSE INDÉTERMINÉE

DU PREMIER ET DU SECOND DEGRÉ

Par M. **Ferrent.**

(*Suite*, voir p. 193.)

CHAPITRE III

RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS A TROIS INCONNUES

32. — Soient trois quantités entières a, b, c, et trois autres quantités également entières, a', b', c', que nous appellerons les similaires des précédentes, cette similitude n'existant d'ailleurs que dans la notation. Écrivons, d'après la règle de formation des valeurs des inconnues de deux équations du 1er degré à deux inconnues, les trois binômes

$$ab' - ba', \quad ac' - ca', \quad cb' - bc'.$$

Deux de ces trois binômes ou différences, prises arbitrairement, contiennent, à chacun de leurs termes, une même lettre ou sa similaire. Les deux premières différences ont, en effet, a ou a' à chacun de leurs termes; les deux dernières, c ou c'; et les deux extrêmes, b ou b'.

Théorème. — *Tout nombre qui divise deux de ces trois différences, et qui est premier avec le plus grand commun diviseur entre la lettre commune et sa similaire, divisera aussi la troisième différence.*

En effet, les deux premières différences, qui ont la lettre commune a, étant divisibles chacune, par le nombre N, les deux expressions

$$\left.\begin{aligned} &(ab' - ba')c - (ac' - ca')b \\ \text{et}\quad &(ab' - ba')c' - (ac' - ca')b' \end{aligned}\right\} \qquad (91)$$

seront divisibles par le même nombre. Mais ces deux expressions se réduisent à

$$\begin{aligned} &a(cb' - bc') \\ \text{et}\quad &a'(cb' - bc'), \end{aligned}$$

δ étant le plus grand commun diviseur de a et a', soit

$a = \alpha\delta$, et $a' = \alpha'\delta$. Les deux expressions deviennent

$$\left.\begin{aligned} &\alpha\,\delta(cb' - bc') \\ \text{et}\qquad &\alpha'\delta(cb' - bc'). \end{aligned}\right\} \qquad (92)$$

Le nombre N, qui divise ces deux expressions, divise aussi leur plus grand commun diviseur, qui est $\delta(cb' - bc')$, puisque α et α' sont premiers entre eux.

Donc le nombre N, qui est premier avec δ par hypothèse, doit diviser la troisième différence $cb' - bc'$.

Corollaire I. — *Si* a *et* a' *sont premiers entre eux, tout nombre, qui divisera les deux premières différences, divisera aussi la troisième, et le plus grand commun diviseur des deux premières différences sera le plus grand commun diviseur des trois différences.*

Corollaire II. — *Si deux différences sont divisibles par le produit* mn : *si, de plus,* n *divise la troisième différence, tandis que* m *est premier avec le quotient de la troisième différence par* n, *la lettre commune aux termes des deux premières différences et sa similaire seront toutes deux divisibles par* m.

En effet, les expressions (91) et (92) seront divisibles par mn; le plus grand commun diviseur, $\delta(cb' - bc')$, de ces deux expressions sera donc divisible par mn; n divisant, par hypothèse, $cb' - bc'$, m devra diviser l'expression

$$\delta\,\frac{cb' - bc'}{n}$$

et, par suite, m devra diviser δ, puisque m est premier avec le quotient $\dfrac{cb' - bc'}{n}$. Donc m divise a et a'.

Corollaire III. — *Si un nombre, qui divise deux différences, est premier avec la troisième, ce nombre divise le plus grand commun diviseur de la lettre commune aux deux premières différences.*

Il suffit de faire $n = 1$ dans le raisonnement précédent.

33. — Avant de passer à la résolution de deux équations quelconques du premier degré à trois inconnues, arrêtons-nous à l'examen d'un cas particulier.

Supposons d'abord que, dans les deux équations

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= K \\ a'x + b'y + c'z &= K' \end{aligned}\right\} \qquad (93)$$

les deux coefficients, a et a', d'une même inconnue, soient premiers entre eux.

Éliminons successivement x et y entre ces deux équations :

$$(ab' - ba')y + (ac' - ca')z = aK' - Ka', \qquad (94)$$

$$-(ab' - ba')x - (cb' - bc')z = bK' - Kb'. \qquad (95)$$

Nous allons démontrer que toute valeur, qui satisfera à l'équation (94), satisfera aussi à l'équation (95), et, comme le système (94) et (95) peut remplacer le système (93), cette valeur résoudra aussi ce dernier.

Soit en effet $y = \eta$, $z = \zeta$ une solution entière de (94); on aura

$$(ab' - ba')\eta + (ac' - ca')\zeta = aK' - Ka'. \qquad (96)$$

Pour trouver la valeur correspondante de x, il suffit de remplacer, dans (95), z par ζ. On obtient ainsi

$$x = \frac{-(cb' - bc')\zeta - (bK' - Kb')}{ab' - ba'}. \qquad (97)$$

Prenons, dans (96), la valeur de η :

$$\eta = \frac{aK' - Ka' - (ac' - ca')\zeta}{ab' - ba'}. \qquad (98)$$

Les expressions (97) et (98) peuvent être mises sous la forme

$$x = \frac{-b(K' - c'\zeta) + b'(K - c\zeta)}{ab' - ba'}, \qquad (99)$$

$$\eta = \frac{a(K' - c'\zeta) - a'(K - c\zeta)}{ab' - ba'}. \qquad (100)$$

Posons $K - c\zeta = m$ et $K' - c'\zeta = m'$:

$$x = \frac{mb' - bm'}{ab' - ba'}, \qquad (101)$$

$$\eta = \frac{am' - ma'}{ab' - ba'}, \qquad (102)$$

$ab' - ba'$, $am' - ma'$, $mb' - bm'$ sont les trois différences formées avec les trois lettres a, b, m, et leurs similaires, a', b', m', en suivant la règle de formation des valeurs des inconnues de deux équations à deux inconnues; η est

entier par hypothèse; par conséquent, $ab' - ba'$ divise $am' - ma'$; $ab' - ba'$ divise donc les deux différences $ab' - ba'$ et $am' - ma'$, dont la lettre commune, a, est première avec sa similaire, a'; $ab' - ba'$ divise donc aussi la troisième différence $mb' - bm'$, et x est entier.

Donc, lorsqu'une même inconnue est affectée, dans les deux équations, de coefficients premiers entre eux, pour que la résolution en nombres entiers soit possible, il faut et il suffit que l'équation résultant de l'élimination de cette inconnue puisse être résolue, et toutes les solutions de cette dernière équation satisfont au système proposé.

34. — On peut faire cette démonstration d'une manière plus simple *(Traité élémentaire d'Algèbre de M. J. Bertrand, 1850)*.

L'égalité (96) peut être mise sous la forme

$$\frac{b'\eta + c'\zeta - K'}{b\eta + c\zeta - K} = \frac{a'}{a},$$

$\frac{a'}{a}$ est une fraction irréductible, et les deux termes de la fraction du premier membre sont des équimultiples de a' et a.

M étant un nombre entier, on aura donc

$$b'\eta + c'\zeta - K' = Ma'$$

et

$$b\eta + c\zeta - K = Ma,$$

ou

$$a(-M) + b\eta + c\zeta = K$$

et

$$a'(-M) + b'\eta + c'\zeta = K'.$$

Or, ces deux dernières égalités sont les deux équations proposées, dans lesquelles on aurait remplacé les inconnues par les trois nombres entiers M, η et ζ. Les équations proposées sont donc satisfaites par toute valeur, η, ζ, qui satisfait à l'équation résultant de l'élimination de l'inconnue dont les coefficients sont premiers entre eux.

35. — Résolvons maintenant le cas général.

Rappelons le système proposé :

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= K \\ a'x + b'y + c'z &= K' \end{aligned}\right\} \qquad (103)$$

et le résultat de l'élimination successive des trois inconnues :

$$(ab' - ba')y + (ac' - ca')z = aK' - Ka' \quad (104)$$
$$-(ab' - ba')x - (cb' - bc')z = bK' - Kb' \quad (105)$$
$$-(ac' - ca')x + (cb' - bc')y = cK' - Kc'. \quad (106)$$

Les deux équations (104) et (105) peuvent remplacer le système proposé.

Écrivons, pour abréger, ces deux équations sous la forme

$$\left.\begin{aligned} by + cz &= K \\ ax + c'z &= K'. \end{aligned}\right\} \quad (107)$$

Pour que ce système puisse être résolu, il faut d'abord que chacune des équations (107) puisse être résolue en particulier, c'est-à-dire que le plus grand commun diviseur des coefficients de chacune d'elles divise le terme tout connu.

Supposons que ces premières conditions soient remplies, et que chacune des équations (107) ait été débarrassée de tout diviseur commun; b et c, d'une part, et a et c', d'autre part, seront premiers entre eux.

Chacune de ces équations, résolue au moyen des formules (2), donnera

$$\left.\begin{aligned} y &= \eta + ct, & x &= \xi + c't' \\ z &= \zeta - bt, & z &= \zeta' - at' \end{aligned}\right\} \quad (108)$$

η et ζ étant une première solution de la première des équations (107), et ξ et ζ', une première solution de la seconde.

Nous aurons à satisfaire à l'équation

$$\zeta - bt = \zeta' - at'. \quad (109)$$

Pour que cette dernière puisse être résolue, il faut que le plus grand commun diviseur, δ, de a et b, divise $\zeta - \zeta'$.

Or, nous aurons les relations

$$\left.\begin{aligned} b\eta + c\zeta &= K \\ a\xi + c'\zeta' &= K'. \end{aligned}\right\} \quad (110)$$

d'où il résulte :

$$bc'\eta - ac\xi + cc'(\zeta - \zeta') = -(cK' - Kc'). \quad (111)$$

Si δ divise $\zeta - \zeta'$, il divisera le premier membre de (111), et, par suite, il devra diviser $cK' - Kc'$.

Réciproquement si δ divise $cK' - Kc'$, comme il divise les

deux premiers termes de (111), il devra diviser aussi $cc'(\zeta - \zeta')$, et, par suite, $\zeta - \zeta'$, puisqu'il est premier avec c et c'.

Donc, pour que le système des deux équations (107) puisse être résolu en nombres entiers, il suffit que chacune de ces équations puisse être résolue en particulier, et, de plus, que le plus grand commun diviseur de a et b divise l'expression $cK' - Kc'$.

36. — Supposons ces conditions remplies et cherchons les valeurs des inconnues.

L'équation (109) étant résolue au moyen des formules (2), et τ et τ' étant une première solution, on aura :

$$\left.\begin{aligned} t &= \tau + \frac{a}{\delta}\theta \\ t' &= \tau' + \frac{b}{\delta}\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (112)$$

Portant ces valeurs dans les expressions (108) :

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi + c'\left(\tau' + \frac{b}{\delta}\theta\right) \\ y &= \eta + c\left(\tau + \frac{a}{\delta}\theta\right) \\ z &= \zeta - b\left(\tau + \frac{a}{\delta}\theta.\right) \end{aligned}\right\} \qquad (113)$$

En posant $\theta = 0$, nous voyons que les expressions $\xi + c'\tau'$, $\eta + c\tau$, $\zeta - b\tau$ peuvent être considérées comme formant une première solution. Appelons α_1, α_2, α_3 cette première solution. Nous aurons

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 + \frac{bc'}{\delta}\theta \\ y &= \alpha_2 + \frac{ac}{\delta}\theta \\ z &= \alpha_3 + \frac{ab}{\delta}\theta \end{aligned}\right\} \qquad (114)$$

pour les expressions des inconnues.

Nous voyons que cette méthode nous donne aussi le moyen de composer une première solution du système au moyen

d'une première solution de chacune des équations qui le composent.

37. — Dans le cas où les conditions sont remplies, nous pouvons opérer autrement pour trouver l'expression des inconnues. Soit α_1, α_2, α_3 une première solution du système.

Nous aurons les égalités

$$\left.\begin{aligned} b\alpha_2 + c\alpha_3 &= K \\ a\alpha_1 + c'\alpha_3 &= K' \end{aligned}\right\} \qquad (115)$$

en les retranchant de chacune des proposées, il vient

$$\left.\begin{aligned} b(y - \alpha_2) + c(z - \alpha_3) &= 0 \\ a(x - \alpha_1) + c'(z - \alpha_3) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (116)$$

Éliminant z :

$$bc'(a - \alpha_2) = ac(x - \alpha_1). \qquad (117)$$

Puisque b et c, d'une part, a et c', d'autre part, sont premiers entre eux, le plus grand commun diviseur de bc' et ac sera le produit $\gamma\delta$ des plus grands communs diviseurs, savoir, γ, de c et c', et δ, de a et b.

La solution de (117) seront donc, d'après les formules (2) :

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 + \frac{bc'}{\gamma\delta}t \\ y &= \alpha_2 + \frac{ac}{\gamma\delta}t \end{aligned}\right\} \qquad (118)$$

Portant ces valeurs dans l'une des équations (116) :

$$z = \alpha_3 - \frac{ab}{\gamma\delta}t \qquad (119)$$

Mais, pour que la valeur de z soit entière, comme γ est premier avec a et b, il faut poser $t = \gamma\theta$, et il vient

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 + \frac{bc'}{\delta}\theta \\ y &= \alpha_2 + \frac{ac}{\delta}\theta \\ z &= \alpha_3 - \frac{ab}{\delta}\theta \end{aligned}\right\} \qquad (120)$$

comme précédemment. *(A suivre.)*

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par M. **Emile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 201.)

XLIII

Par un point P *pris sur le prolongement de la base* CB *d'un triangle* ABC, *mener une sécante coupant* AB *en* R *et* AC *en* Q, *et telle que* AR × CQ *soit minimum.*

C'est la question 34 du Journal ; ce qui suit complétera la solution qui en a été donnée dans le numéro de janvier 1883.

Étudions la fonction AR . CQ ; supposons P situé sur le prolongement de BC, dans le sens CB.

Lorsque le point Q est situé à l'infini (dans le sens CA) la fonction a une valeur infinie; lorsque le point Q est en Q_1, point où la parallèle à AB menée par P coupe AC, la fonction est encore infinie ; pour toute autre position de Q entre Q_1 et le point situé à l'infini dans le sens CA sur CA, cette fonction a une valeur finie et jamais nulle, donc elle aura au moins un minimum dans cet intervalle.

En continuant la discussion, on voit que la fonction décroît si Q varie de Q_1 à A. Si Q est en A elle est nulle, si Q est en C aussi, mais elle reste finie dans l'intervalle, elle a donc au moins un maximum pour une position de Q située entre A et C.

Si Q continue à se mouvoir sur AC en allant de C vers ∞ dans le sens AC, la fonction croît continuellement :

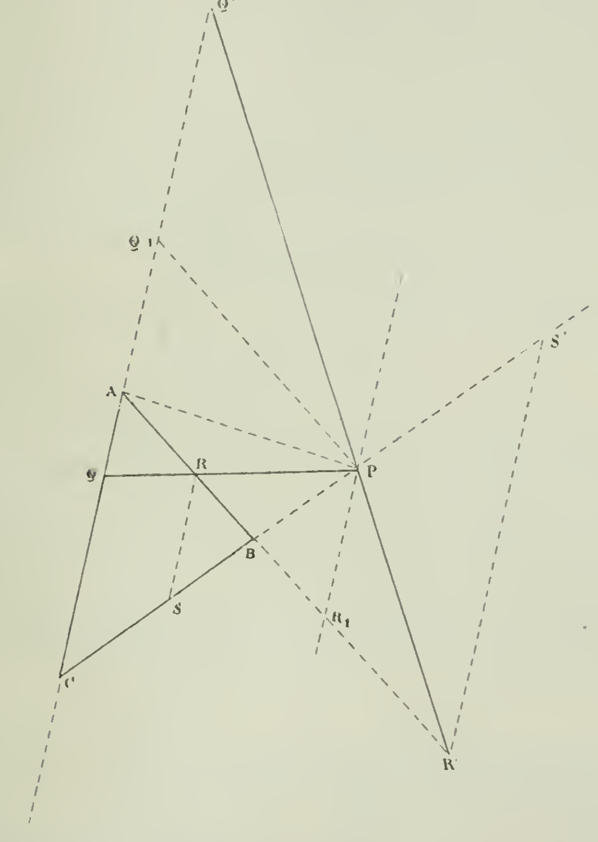
Si P est situé entre B et C, la fonction n'a ni maximum ni minimum.

Discussion analogue si P est sur le prolongement de BC dans le sens CB.

En résumé, P étant placé sur le prolongement de BC dans le sens CB, la fonction que nous étudions a un minimum

pour une position de Q située entre Q_1 et ∞ dans le sens CA et un maximum pour une position de Q située entre C et A.

Posons
$$AR = z$$
$$CQ = y$$
$$CP = l;$$



le théorème des transversales donne
$$(l - a) \,.\, y \,.\, z = l \,.\, (l - y)(c - z)$$
d'où
$$ayz = l(bz + cy - bc)$$
ou
$$z = \frac{lc(y - b)}{ay - lb}.$$

Il faut donc chercher le maximum et le minimum de yz, c'est-à-dire de

$$\frac{lc \, . \, y(y - b)}{ay - lb}.$$

Tous calculs faits, on a la construction suivante :

Prenons sur BC de part et d'autre de P, S et S′ tels que PS = PS′ soit moyen proportionnel entre PB et PC (S étant pris entre B et C); par S menons une parallèle à AC qui coupe AB en R et par S′ une parallèle à AC qui coupe AB en R′, la droite PR coupera AC en Q; la droite PR′ coupera AC en Q′, et AR . CQ correspondra à un maximum, et AR′ . CQ′ à un minimum. Si le point P est pris entre B et C, la fonction n'a ni maximum ni minimum. S'il est sur le prolongement de BC dans le sens BC la discussion est identique à celle que nous venons de faire.

Remarque I. — On a

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{CQ}} = \frac{\mathrm{AR}'}{\mathrm{CQ}'} = \frac{c}{b}.$$

Remarque II. — Si l'on combine ces résultats avec le théorème XLII, on voit que les deux droites PRQ, PR′Q′ sont tangentes à la parabole qui est tangente à AC en C et à AB en A. Donc en faisant varier P sur BC cette parabole sera l'enveloppe des droites PRQ, PR′Q′ correspondant aux maxima et aux minima.

Remarque III. — Le foyer de cette parabole est sur la droite qui joint le point A au centre des médianes antiparallèles de ABC.

XLIV

Soit un triangle ABC;

sur CA	*et dans le sens*	CA	*je prends*	$\mathrm{CA}_c = l$
— BA	—	BA	—	$\mathrm{BA}_b = l$
— AB	—	AB	—	$\mathrm{AB}_a = m$
— CB	—	CB	—	$\mathrm{CB}_c = m$
— AC	—	AC	—	$\mathrm{AC}_a = n$
— BC	—	BC	—	$\mathrm{BC}_b = n$;

démontrer que les six points $\mathrm{A}_c, \mathrm{A}_b, \mathrm{B}_a, \mathrm{B}_c, \mathrm{C}_a, \mathrm{C}_b$ *ne peuvent appartenir à une même circonférence que si le triangle* ABC *est isoscèle.*

Si les six points appartenaient à une même circonférence, on aurait évidemment

$$l.(b - n) = m.(a - n)$$
$$m.(c - l) = n.(b - l)$$
$$n.(a - m) = l.(c - m).$$

Éliminons n en égalant la valeur de n tirée de la première équation à chacune des valeurs de n tirée des deux autres, on aura:

$$l^2(b - m) + l(m^2 + m(c - a) - b^2) + m(ab - cm) = 0$$
$$l^2(c - m) + l(m^2 + m(b - c) - ab) + m(a^2 - am) = 0.$$

En éliminant l entre ces deux équations, on trouve, après avoir enlevé le facteur commun, $m^2(c - a)^2$ (et écartant ainsi l'hypothèse de $c = a$):

$$[m^2 - m(c + a) + ab]^2$$
$$= [m^2 - m(b + c) + b^2][m^2 - m(2a + c - b) + a^2]$$

Cette équation doit évidemment donner la valeur de m qui correspond au cas où les six points considérés seraient sur une même circonférence.

Mais, tous calculs faits, cette relation se réduit à

$$m(b - c) = 0,$$

c'est-à-dire qu'elle ne peut avoir lieu que si le triangle est isoscèle.

Nous engageons les élèves à s'exercer sur les questions suivantes :

1° *En conservant les notations précédentes et en supposant*

1° Que $l = m = n$;

2° Que les trois droites A_cA_b, B_aB_c, C_aC_b *se coupent en un même point* O ;

Démontrer que l'on a :

$$l^2(2bc + 2ac + 2ab - a^2 - b^2 - c^2) - 10\,abcl^3 + 4abc(a + b + c)l^2 - 2abc(bc + ac + ab)l + a^2b^2c^2 = 0.$$

Déterminer, avec la règle et le compas, le point O *dans le cas du triangle isoscèle ;*

2° *A partir de* A *et dans le sens* AC *je prends* $AJ = a$
— B — BA — $BI = b$

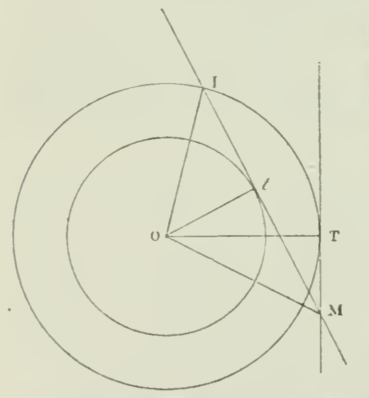
et je construis la parabole tangente à AC *en* J *et à* CB *en* I ; *par tout point* K *extérieur à cette parabole je peux mener deux droites* C_aC_b *telles que* $AC_a = BC_b$ *(ce sont précisément les tan-*

gentes à cette parabole menées par K); par tout point situé sur cette parabole je ne peux mener qu'une seule droite $C_a C_b$ (la tangente à cette parabole en ce point); et par tout point intérieur à cette parabole je ne pourrai en mener aucune.

QUESTION 115

Solution par M. E. Vigarié, élève au Lycée de Toulouse.

On donne deux circonférences ayant pour centre commun le point O. *Soit* OT *un rayon quelconque de la grande circonférence,* Ot *un rayon quelconque de la petite circonférence. Par le point* T *je mène une tangente à la première et par le point* t *une tangente à la deuxième. Soit* M *leur point de rencontre et* I *l'un des points de rencontre de* Mt *avec la grande circonférence. Prouver que l'on a :*



$$Mt^2 = MT^2 + It^2.$$

(X. Antomari.)

Je mène OM et OI. Les triangles rectangles OMt, OMT, OIt donnent :

$$Mt^2 = OM^2 - Ot^2$$
$$MT^2 = OM^2 - OT^2$$
$$IT^2 = OI^2 - Ot^2$$

par suite : $OM^2 - Ot^2 = OM^2 - OT^2 + OI^2 - Ot^2$.

Ou en remarquant que $OT^2 = OI^2$

$$OM^2 - Ot^2 = OM^2 - Ot^2.$$

Nota — La même question a été résolue par M. P. Lamarre, élève du lycée Charlemagne, à Paris, Bordage, à Nantua.

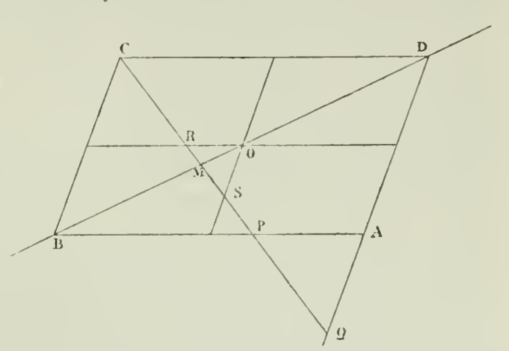
QUESTION 120

Solution par M. Aubry, élève au Lycée de Douai.

On considère un parallélogramme ABCD ; *par le sommet* C *on mène une transversale mobile qui rencontre* AB *en* D *et* AD

en Q. Sur CP et CQ comme diamètre on décrit des cercles. Trouver le lieu géométrique décrit par le centre de similitude de ces deux cercles.

Soient R et S les centres des cercles décrits sur CP et CQ comme diamètres; les points R et S décriront les droites OR, OS homothétiques aux droites AB et AD par rapport au point C, le rapport étant $\frac{1}{2}$.



Le centre de similitude est d'ailleurs un point M situé sur RS et déterminé par l'égalité

$$\frac{MR}{MS} = \frac{CR}{CS}.$$

C'est donc le conjugué harmonique du point C par rapport à RS. Le lieu du point M est donc la polaire du point C par rapport à l'angle ROS, c'est-à-dire la diagonale BD du parallélogramme qui ne passe pas par le point C.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Madiot, institution Sainte-Marie à Besançon; F. Taratte, à Évreux.

VARIÉTÉS

DÉFINITION DES GRANDEURS ET DES NOMBRES

Par M. **A. Calinon**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 212.)

§ 3. — *Addition et soustraction.*

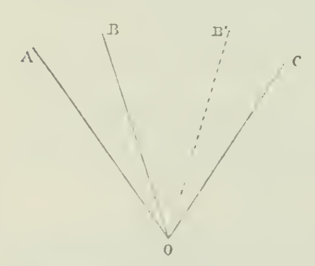
Nous avons vu qu'en groupant d'une certaine façon des segments égaux on obtient encore un segment ; on démontre également qu'en groupant de la même façon des segments

non égaux on obtient aussi un segment; toutes les autres grandeurs jouissent de la même propriété; c'est ce groupement de grandeurs inégales, bien entendu de même espèce, que nous appellerons par définition l'addition; les grandeurs que l'on groupe sont les parties, et leur groupement forme leur somme. La définition de l'addition des nombres se déduit de là; le nombre qui mesure la somme de plusieurs grandeurs de même espèce est la somme des nombres qui mesurent ces diverses grandeurs.

Il résulte de cette définition de l'addition que les groupements de grandeurs égales ne sont que des additions particulières; d'où nous concluons, en passant aux nombres, qu'un nombre entier est la somme de ses unités.

On voit que l'esprit de cette méthode consiste à rechercher ses propriétés communes à toutes les figures appelées grandeurs et à en déduire les propriétés du nombre; dès lors nous n'avons plus qu'à raisonner sur de simples figures géométriques et à constater que le raisonnement est général, quelle que soit l'espèce de la grandeur. Nous allons en citer un exemple.

Soit un angle AOC, somme des deux angles AOB et BOC; on peut faire coïncider l'angle AOC avec lui-même par retournement, c'est-à-dire en portant OC sur OA et OA surOC; dans ce retournement OB vient en OB′ et l'angle total est alors la somme des angles AOB′ et B′OC, c'est-à-dire des angles BOC et AOB. On peut donc dans une somme de deux angles intervertir l'ordre des parties : on démontre que toutes les figures-grandeurs jouissent de la même propriété : nous en concluons que dans une somme de deux nombres on peut aussi intervertir l'ordre des termes.



On démontre de même par des considérations géométriques que, pour ajouter une somme à une autre, il suffit d'ajouter successivement à cette dernière tous les termes de la première.

La soustraction se définit comme opération inverse de l'addition; elle consiste, étant données la somme de deux grandeurs et l'une d'elle, à trouver l'autre, ou bien, étant donnés la somme de deux nombres et l'un d'eux, à trouver l'autre.

Les signes de l'addition et de la soustraction sont + et —; le signe = placé entre certaines expressions comme

$$4 + 3 = 9 - 2 = 7,$$

signifie que ces expressions mesurent, par rapport à une même unité, des grandeurs égales, c'est-à-dire des figures superposables : ainsi l'égalité arithmétique se déduit de l'égalité géométrique.

§ 6. — *Multiplication et division.*

Multiplier une grandeur donnée par un nombre entier, 4 par exemple, c'est ajouter ou grouper, conformément au mode de groupement spécial à cette grandeur, 4 grandeurs égales à celle qui est donnée; la grandeur donnée est le multiplicande, le nombre 4 est le multiplicateur, la nouvelle grandeur obtenue est le produit.

Si l'on considère la grandeur mesurée par le nombre 4, on voit d'une part que cette grandeur est un groupement de 4 unités, et d'autre part que le produit du multiplicande par 4 est un groupement de 4 multiplicandes ; on peut donc dire que le produit est formé avec le multiplicande comme le multiplicateur 4 est formé avec l'unité : en d'autres termes, si, dans la grandeur mesurée par 4, on remplace la figure unité par la figure multiplicande, on obtient le produit de cette dernière par 4.

Cette forme de la définition convient au cas où le multiplicateur est fractionnaire : multiplier une grandeur par 7/5 c'est former avec cette grandeur multiplicande une nouvelle grandeur, comme la grandeur mesurée par 7/5 est elle-même formée avec la grandeur unité.

Ainsi, pour former la grandeur mesurée par 7/5 on prend une grandeur qui, groupée 5 fois, donne l'unité, et l'on groupe 7 de ces grandeurs : de même, pour avoir le produit en question, on prend une grandeur qui, groupée 5 fois, reproduit le multiplicande et l'on groupe 7 de ces grandeurs.

Si le multiplicande est un nombre, l'opération purement arithmétique se déduit immédiatement de l'opération faite sur les grandeurs géométriques, comme pour l'addition. Ainsi, en multipliant par 3 la grandeur mesurée par 2/5 on obtient comme produit une grandeur mesurée par 6/5, ce dernier nombre est appelé, par définition, le produit du nombre 2/5 par le nombre 3.

La division est l'opération inverse de la multiplication et consiste, étant donnés la grandeur-produit et le multiplicateur à trouver la grandeur multiplicande, ou bien, étant donnés le produit de deux nombres et l'un de ces nombres, à trouver l'autre : cette définition ne vise bien entendu que le quotient exact.

On déduit très simplement de là, par des considérations purement géométriques sur les grandeurs, que le quotient de 5 par 7, par exemple, est le nombre fractionnaire 5/7 : nous ne nous étendons pas autrement sur ces diverses démonstrations, notre but étant simplement ici de donner des définitions et d'indiquer l'esprit de notre méthode.

En résumé, cette méthode consiste à considérer en géométrie certaines formes ou figures possédant cette propriété remarquable de reproduire par le groupement de parties égales, des figures du même genre ; de là nous déduisons la définition des nombres ; puis nous définissons les quatre règles sur les figures géométriques et nous en tirons la définition de ces quatre règles sur les nombres. L'arithmétique est ainsi établie sans introduire dans la science un nouveau fait emprunté à l'observation, l'idée de nombre se déduisant de l'idée de forme par voie d'abstracion.

Nous avons à peine besoin d'ajouter que, dans ce qui précède, il convient de considérer les angles comme pouvant dépasser 180° ; autrement les groupements d'angles égaux ne seraient pas en nombre infini ; la même observation s'applique à l'arc de cercle, à l'angle dièdre, etc.

§ 7. — *Quantités négatives.*

La théorie des quantités négatives ne nous paraît pas avoir été présentée jusqu'ici d'une façon bien satisfaisante;

le point capital sur lequel on n'insiste pas assez, c'est qu'en passant de l'arithmétique à l'algèbre l'idée de nombre prend un sens plus général; on est en effet amené à des expressions numériques comme 3 — 5, sans signification arithmétique et que l'on convient, dans un esprit de généralisation, de représenter par le symbole — 2; c'est ce qu'on appelle une quantité négative: ces quantités s'introduisent ainsi à l'aide d'une convention et, plus tard, quand on les rencontre dans la mesure des grandeurs, on les explique à l'aide d'une interprétation : or il nous semble que cette convention d'abord et cette interprétation ensuite ne valent pas, au point de vue de la clarté et de la rigueur, une définition donnée à priori. De plus, ce n'est pas seulement le symbole — 2 qu'il convient d'expliquer, mais aussi le symbole + 2 qui, arithmétiquement, n'a pas plus de sens que le premier ; en arithmétique, en effet, les signes + et — indiquent des opérations entre plusieurs nombres, mais un nombre seul, précédé de l'un de ces signes, ne veut rien dire.

Nous allons voir que notre méthode nous permet de déduire très simplement la définition des nombres algébriques de la considération des grandeurs. *(A suivre.)*

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Calinon, ancien élève de l'École Polytechnique, à M. de Longchamps.

... Je profite de l'occasion pour vous soumettre, à titre de simple curiosité, une démonstration que je crois nouvelle du théorème de la projection orthogonale d'un cercle suivant une ellipse (*).

Soient P le plan du cercle, Q le plan de projection qui passe par le diamètre AA' du cercle; M est un point quelconque du cercle considéré, m sa projection, $MNm = \varphi$ désigne l'angle plan du dièdre formé par les plans P et Q.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Si D et F sont deux points divisant harmoniquement le diamètre AA'', on sait que le rapport $\frac{MF}{MD}$ est constant, pour tous les points du cercle. Or, on peut toujours choisir le système des points F et D, de telle façon que ce rapport constant soit égal à sin φ (*).

On a alors

$$\frac{MF}{MD} = \sin \varphi. \tag{1}$$

D'autre part, le triangle rectangle MNm donne

$$\frac{Mm}{MN} = \sin \varphi. \tag{2}$$

Les égalités (1) et (2) donnent, par combinaison,

$$\frac{\sqrt{\overline{MF}^2 - \overline{Mm}^2}}{\sqrt{\overline{MD}^2 - \overline{MN}^2}} = \sin \varphi.$$

ou,

$$MF = ND \sin \varphi. \tag{A}$$

En considérant les points F' et D', symétriques de F et de D par rapport au centre O du cercle, on trouve de même

$$MF' = ND' \sin \varphi. \tag{A'}$$

Les égalités (A), (A'), en observant que le point N est situé entre les points D et D', donnent

$$MF + MF' = DD' \sin \varphi. \tag{B}$$

L'équation (B) donne la propriété caractéristique de la somme des rayons vecteurs; les équations (A) et (A') conduisent, quand on cherche leur interprétation géométrique, à la propriété qui est relative à un foyer et à la directrice correspondante.

Cette démonstration me paraît assez simple et elle offre l'avantage de mettre en évidence, à la fois, les foyers et les directrices.

Note. — On sait comment cette propriété fondamentale de la géométrie élémentaire des coniques *la projection*

(*) Ce point nécessiterait quelques explications; V. la note qui suit la démonstration de M. Calinon.

orthogonale d'un cercle est une ellipse, est ordinairement démontrée ; et cette démonstration, due croyons-nous, à M. Courcelles, et qui est reproduite dans la plupart des traités de géométrie élémentaire, bien que très élégante, ne nous paraît ni aussi simple, ni aussi féconde que celle que nous a communiquée M. Calinon et que nous venons de faire connaître. Mais nous croyons devoir indiquer ici, en même temps que les légères modifications qui nous semblent devoir être utilement apportées à cette démonstration, en quoi consiste au juste l'avantage que nous lui attribuons.

Les modifications que nous voulons signaler portent sur deux points.

Lorqu'on a un segment AA', il est bien connu qu'il existe deux points F et D qui le partagent harmoniquement et de telle façon que le rapport $\frac{FA}{FA'} = \frac{DA}{DA'}$, ait une valeur déterminée, quelle que soit cette valeur.

Mais, dans le cas présent, les choses ne se passent pas tout à fait ainsi. Le segment considéré étant AA' il faut trouver deux points F, D, partageant AA' harmoniquement et qui, de plus, soient tels que l'on ait

$$\frac{AF}{AD} = \sin\varphi,$$

φ étant un angle donné. On voit la différence que nous avons voulu signaler; mais cette objection ne touche pas à l'exactitude et à la rigueur de la démonstration ; il faut seulement compléter celle-ci en montrant l'existence certaine des points F, D, ce qui se fait sans difficulté. On écrira, par exemple,

$$\sin\varphi = \frac{AF}{AD} = \frac{A'F}{A'D} = \frac{A'F - AF}{AA'}.$$

Comme on a, d'autre part,

$$A'F + AF = AA',$$

on pourra calculer A'F et AF et reconnaître que

$$OF = OF' = \sqrt{a^2 - b^2},$$

b désignant la longueur de la projection, sur le plan QOi, du rayon OI du cercle donné, rayon qui est perpendiculaire à AA'.

Une seconde modification porterait, à notre avis, sur la notation trigonométrique qui ne doit pas entrer dans une démonstration aussi fondamentale de la géométrie des coniques. Il suffit de considérer le triangle rectangle OIi, et de poser, conformément à la notation habituelle,

$$OA = OA' = a, \quad Oi = b, \quad Ii = c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Ces légères réserves étant faites, nous pouvons dire maintenant pourquoi la démonstration de M. Calinon nous paraît offrir sur celle que nous avons rappelée, et sur les autres démonstrations connues de nous, un avantage bien marqué. Cette supériorité tient à ce que les deux propriétés fondamentales de l'ellipse, celle qui est relative aux deux foyers, et celle qui vise le foyer et la directrice correspondante, se trouvent mises en évidence, du même coup.

La première de ces propriétés est celle qui, en France, sert de base à la géométrie élémentaire de ces courbes qu'on a nommées, assez singulièrement, courbes usuelles. Ailleurs, et notamment en Angleterre, où l'étude géométrique des coniques est très en faveur (*), c'est la seconde propriété qui est prise comme le point de départ de cette étude.

Assurément, on peut, et par des voies diverses, passer de la première propriété à la seconde et vice versâ. Mais cette transition ne se fait pas sans un certain effort et sans des raisonnements relativement assez longs. La démonstration de M. Calinon offre cette bonne fortune de les faire apparaître, l'une et l'autre, simultanément ; de plus, elle est simple, facile à retenir et nous la croyons nouvelle. Pour ces motifs divers, nous estimons qu'elle sera lue avec l'intérêt qu'elle nous paraît mériter et sur lequel nous avons cru utile d'insister. *(G. L.)*

(*) Voyez notamment le livre très intéressant de *Charles Taylor* (*L'ancienne et la moderne géométrie des coniques* ; Cambridge ; Deighton Bell and Co, 1881).

BACCALAURÉATS

CLERMONT-FERRAND

Baccalauréat ès sciences.

1. — Une sphère est inscrite dans un tétraèdre régulier, tangentiellement aux arêtes. Connaissant l'arête a du tétraèdre, on demande de calculer : 1° le rayon de la sphère; 2° le volume de la sphère en dehors du tétraèdre; 3° le volume du tétraèdre en dehors de la sphère.

2. — Description de la machine magnéto-électrique de Clarke; théorie de la production des courants dans cette machine; expériences que l'on peut faire avec elle.

3. — Un réservoir en verre contient à 0° un poids de 140 grammes de mercure. On le porte à 200°, et on demande le poids du mercure qui en sortira, sachant que le coefficient de dilatation cubique du verre est $\frac{1}{37000}$, et celui du mercure $\frac{1}{5500}$.

Baccalauréat restreint.

Composition de physique commune avec le *Baccalauréat ès sciences.*

Dispositions anatomiques de l'appareil circulatoire chez les vertébrés.

Etamine et pollen.

Baccalauréat ès lettres.

Un ballon plein d'air, de 5 centimètres de diamètre, est muni d'un tube cylindrique de 5 millimètres de diamètre. Dans ce tube est un index qui, à la température de 0°, est à une distance de 10 centimètres de la surface du ballon. On demande de calculer le chemin parcouru par l'index quand la température s'élève à 50 degrés. On admettra que les dimensions de la sphère et du cylindre ne changent pas, et on prendra $\frac{1}{273}$ pour le coefficient de l'air de 0 à 1°.

Baccalauréat spécial.

1re Série. — *Mathématiques.* — 1° Connaissant tg a et tg$b$, calculer tg $(a + b)$.

2° Étant donnés les trois côtés a, b, c d'un triangle, calculer : les médianes, les bissectrices, les hauteurs de ce triangle, ainsi que le rayon du cercle circonscrit.

Sciences. — Circulation de la sève dans la plante. — Bobine de Rumkorff.

Français. — Expliquer cette morale de la fable *Le loup et l'agneau* : « La raison du plus fort est toujours la meilleure. » Donner des exemples.

2me Série. — *Mathématiques.* — 1° La somme de deux nombres est constante ; quand le produit est-il maximum; et variations de ce produit.

2° Distance d'un point de la ligne de terre à un plan ; différents cas.

Sciences. — L'œil et l'eau.

Français. — Qualités essentielles du genre épistolaire.

3me Série. — *Mathématiques.* — 1° Trouver l'intersection de deux plans parallèles à la ligne de terre.

2° On donne une demi-circonférence de rayon R et on mène deux tangentes à l'extrémité du diamètre; on mène une troisième tangente CD. On connaît l'angle d'inclinaison α que fait cette tangente avec AB. Calculer le volume des triangles AMB, AMC et BMD et l'expression de la surface des deux zones, le tout tournant autour de AB.

Sciences. — L'air, l'oreille, sa constitution et mécanisme de l'audition.

Français. — Utilité des colonies.

4me Série. — *Mathématiques.* — 1° Calculer le volume du tronc de pyramide;

2° Un corps de poids P est en équilibre sur un plan; il est soumis à deux forces dont l'une est parallèle au plan. On demande l'angle α du plan.

Sciences. — Téléphone et microphone.

Littérature. — Les ouvriers d'une usine demandent une

augmentation de salaire ; on leur refuse. Une grève se déclare. Rassemblements tumultueux : hommes, femmes et enfants. Discours animés des différents groupes. — Un industriel respecté et aimé de tous cherche à calmer les esprits et à ramener les ouvriers à l'usine. Effet de ses paroles.

5me Série. — *Mathématiques.* — 1° Tout nombre qui divise un produit de deux facteurs et qui est premier avec l'un d'eux, divise l'autre.

2° Résoudre l'inégalité

$$\frac{(x+a)(x+c)}{(x+b)(x+d)} > 0$$

en supposant $a > b > c > d$.

Sciences. — 1° Chaleur latente de volatilisation de l'eau à 100° et à des températures supérieures.

2° Organisation générale de la fleur, pollen, ovaire, fécondation.

Littérature. — Quelle tragédie de Corneille préférez-vous et quelles raisons donnez-vous de votre préférence ?

BORDEAUX

Baccalauréat spécial. — *Mathématiques.* — 1° Démontrer, dans la parabole, que la sous-normale est constante.

2° Trouver et calculer le volume engendré par un triangle isoscèle ABC, tournant autour de sa base AB, sachant que AB = 48m,64 et que l'angle CAD = 48°14′.

3° Expliquer les opérations que vous êtes obligé de faire pour résoudre l'équation

$$\frac{x}{7} + \frac{21}{x+5} = \frac{23}{7}.$$

Sciences. — 1° Machine pneumatique à un seul corps de pompe. Le récipient ayant une capacité de 1 litre et le corps de pompe une capacité de 200cmc ; quelle sera la force élastique de l'air du récipient après quatre coups de piston.

2° Éthylène. — Propriétés et préparation.

3° Quelles sont les actions et les modifications que subissent les aliments dans le canal digestif ?

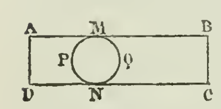
Dissertation. — « La curiosité des enfants est un penchant de la nature qui va comme au-devant de l'instruction, ne manquez pas d'en profiter. »

Suivent quelques exemples pris dans ce que les enfants voient, soit à la ville, soit à la campagne.

Ces paroles de Fénelon sont-elles justes? cet enseignement par les yeux qu'il recommande n'est-il pas utile surtout pour les carrières de l'industrie et du commerce; quel profit en retirent les élèves? Citer des exemples.

MONTPELLIER

Baccalauréat spécial. — *Mathématiques.* — 1° Dans un rectangle déterminé par sa base et sa hauteur, inscrire un cercle de manière que sa surface soit moyenne proportionnelle aux deux parties MQNCB et MPNDA. Discuter.



2° $\cos x \cos 3x = m$; discuter dans le cas de $m > 0$.

Sciences. — Analyse spectrale. — Ses applications pratiques.

On fait passer sur de l'oxyde de cuivre incandescent un mélange d'hydrogène protocarboné et d'hydrogène bicarboné qui a donné par sa combustion complète 1 gramme d'eau et 1 gr. 997 d'acide carbonique; calculer: 1° la composition du mélange gazeux; 2° son volume à 0° et à la pression $0^m,760$, sachant que la densité de l'hydrogène est de 0,0692, celle de l'acide carbonique 1,257.

Français. — Discours de d'Alembert à l'Académie française (1778), lorsqu'il offrit à cette assemblée le buste de Molière sculpté par le célèbre Houdon.

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER, — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 24074-4.

ÉTUDE ÉLEMENTAIRE D'ANALYSE INDÉTERMINÉE

Par M. **Ferrent.**

(*Suite*, voir p. 217.)

38. — Reprenons maintenant les deux équations complètes (103), ou plutôt les équations (104) et (105), qui forment un système équivalent.

Ces deux dernières équations sont de la même forme que les équations (107), et nous n'avons qu'à leur appliquer les conditions de résolution énoncées plus haut (n° 35), ainsi que les formules (114).

Toutefois, chacune des équations (107) ayant été supposée débarrassée de tout facteur commun aux quantités connues, nous devrons d'abord diviser chacune des équations (104) et (105) par le plus grand commun diviseur de ses coefficients. D étant le plus grand commun diviseur de $ab' - ba'$ et $ac' - ca'$; D', celui de $ab' - ba'$ et $cb' - bc'$, ces conditions seront donc :

1° Le plus grand commun diviseur D, de $ab' - ba'$ et $ac' - ca'$, doit diviser $aK' - Ka'$;

2° Le plus grand commun diviseur D', de $ab' - ba'$ et $cb' - bc'$, doit diviser $bK' - Kb'$;

3° Le plus grand commun diviseur de $\dfrac{ab' - ba'}{D}$ et $\dfrac{ab' - ba'}{D'}$ doit diviser l'expression

$$\frac{(ac' - ca')(bK' - Kb') + (aK' - Ka')(cb' - bc')}{DD'},$$

ou

$$\frac{(ab' - ba')(cK' - Kc')}{DD'};$$

ou bien, le plus grand commun diviseur de $(ab' - ba')D$ et $(ab' - ba')D'$ doit diviser $(ab' - ba')(cK' - Kc')$; ou bien, le plus grand commun diviseur ρ de D et D', c'est-à-dire des trois différences $ab' - ba'$, $ac' - ca'$, $cb' - bc'$, doit diviser $cK' - Kc'$.

39. — Ces conditions peuvent être énoncées plus simplement.

Les deux premières conditions expriment que chacune des équations (104) et (105) peut être résolue en particulier.

Lorsque le problème est possible, l'équation (106) peut évidemment être résolue aussi.

Or, cette nouvelle condition, qui est indispensable, peut remplaçer la troisième condition énoncée au numéro précédent. En effet, puisque le plus grand commun diviseur, ρ, de D et D', divise $ac' - ca'$ et $cb' - bc'$, il divisera aussi le plus grand commun diviseur D'' de ces deux différences, et, si D'' divise $cK' - Kc'$, ρ le divisera aussi.

Nous pouvons donc énoncer les trois conditions comme il suit :

La condition nécessaire et suffisante, pour que le système de deux équations à trois inconnues puisse être résolu en nombres entiers, est que chacune des trois équations résultant de l'élimination successive des trois inconnues puisse être résolue en particulier en nombres entiers.

40. — Ces conditions comprennent le cas où les deux équations données sont incompatibles.

En effet, dans ce cas, nous savons que les trois différences $ab' - ba'$, $ac' - ca'$, $cb' - bc'$ sont nulles, tandis que les différences $aK' - Ka'$, $bK' - Kb'$, $cK' - Kc'$, sont différentes de zéro; les plus grands communs diviseurs des coefficients des premiers membres des équations (104), (105), (106), sont donc égaux à l'infini; ils ne divisent pas les seconds membres, qui ne sont pas nuls, et les conditions ne sont pas remplies.

Lorsque les deux équations proposées sont la conséquence l'une de l'autre, les six différences sont nulles, et la condition peut être considérée comme remplie.

Pour qu'un pareil système puisse être résolu, il suffit alors que l'une des deux équations puisse être résolue.

Ce fait sera visible *à priori*, et on n'aura jamais besoin, dans ce cas, de recourir aux équations (104), (105), (106), qui, du reste, n'existent pas.

41. — Nous savons que, si les trois coefficients a, b, c, sont divisibles par un même nombre qui ne divise pas K, les équations ne peuvent être résolues. Nous allons faire voir que cette condition est comprise implicitement dans les trois conditions que nous avons énoncées plus haut.

Reportons-nous aux trois équations (104), (105), (106), et soit δ un nombre premier qui divise a, b, c, et ne divise pas K ; δ divisera les trois différences qui forment les coefficients de ces trois équations. Si les trois conditions étaient remplies, δ diviserait aussi $aK' - Ka'$, $bK' - Kb'$, $cK' - Kc'$, et comme δ divise a, b, c, il diviserait Ka', Kb', et Kc' et, par conséquent, a', b' et c', puisqu'il est premier avec K.

Il en résulterait que les coefficients des inconnues seraient divisibles par δ^2 ; et, par conséquent, que les trois expressions $aK' - Ka'$, $bK' - Kb'$ et $cK' = Kc'$ seraient divisibles par δ^2.

Posons

$$a = \alpha\delta, \qquad b = \beta\delta, \qquad c = \gamma\delta$$
$$a' = \alpha'\delta, \qquad b' = \beta'\delta, \qquad c' = \gamma'\delta$$

Les équations peuvent être mises sous la forme

$$(\alpha\beta' - \beta\alpha')y + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')z = \frac{\alpha K' - K\alpha'}{\delta}$$

$$-(\alpha\beta' - \beta\alpha')x - (\gamma\beta' - \beta\gamma')z = \frac{\beta K' - K\beta'}{\delta}$$

$$-(\alpha\gamma' - \gamma\alpha')x + (\gamma\beta' - \beta\gamma')y = \frac{\gamma K' - K\gamma'}{\delta}$$

δ divisant $\alpha K' - K\alpha'$ et $\beta K' - K\beta'$, et étant premier avec le plus grand commun diviseur de K et K', puisqu'il est premier avec K, diviserait aussi $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ (n° 32). Par une raison semblable, δ diviserait aussi $\alpha\gamma' - \gamma\alpha'$ et $\gamma\beta' - \beta\gamma'$; de sorte que $ab' - ab'$, $ac' - ca'$ et $cb' - bc'$ seraient divisibles par δ^3.

Par suite, $aK' - Ka'$, $bK' - Kb'$, $cK' - Kc'$ seraient divisibles par δ^3, et $\alpha K' - K\alpha'$, $\beta K' - K\beta'$, $\gamma K' - K\gamma'$, seraient divisibles par δ^2.

De même, δ étant premier avec le plus grand commun diviseur de K et K' et $\alpha K' - K\alpha'$, $\beta K' - K\beta'$, et $\gamma K' - K\gamma$

étant divisibles par δ^2, les trois différences $\alpha\beta' - \beta\alpha'$, $\alpha\gamma' - \gamma\alpha'$ et $\gamma\beta' - \beta\gamma'$, seraient divisibles par δ^2, et les trois différences $ab' - ba'$, $ac' - ca'$ et $cb' - bc'$ seraient divisibles par δ^4.

Il en serait de même des trois différences $a\mathrm{K}' - \mathrm{K}a'$, $b\mathrm{K}' - \mathrm{K}b'$, $c\mathrm{K}' - \mathrm{K}c'$.

En continuant à raisonner ainsi, on arriverait à cette conclusion, que chacune des six différences $ab' - ba'$, $ac' - ca'$, $cb' - bc'$, $a\mathrm{K}' - \mathrm{K}a'$, $b\mathrm{K}' - \mathrm{K}b'$, $c\mathrm{K}' - \mathrm{K}c'$, serait divisible par une puissance quelconque de δ, c'est-à-dire un nombre infini.

Or, ceci ne peut arriver que lorsque ces six différences sont nulles, c'est-à-dire, dans le second des cas examinés au numéro précédent.

Il est donc absurde de supposer que, dans un système de deux équations à trois inconnues, un nombre premier qui ne divise pas le terme tout connu K, puisse diviser les trois coefficients a, b, c, lorsque les trois conditions sont satisfaites.

42. — Nous pouvons vérifier aussi que les conditions énoncées au n° 39 se réduisent à la première, lorsque les coefficients a et a' d'une même inconnue x sont premiers entre eux.

En effet, l'équation (104) pouvant être résolue, posons $b = \beta\delta$ et $b' = \beta'\delta$, δ étant le plus grand commun diviseur de b et b'.

Les équations (104) et (105) pourront s'écrire :

$$\delta(a\beta' - \beta a')y + (ac' - ca')z = a\mathrm{K}' - \mathrm{K}a',$$

$$-(a\beta' - \beta a')x - (c\beta' - \beta c')z = \beta\mathrm{K}' - \mathrm{K}\beta'.$$

Le plus grand commun diviseur de $a\beta' - \beta a'$ et $c\beta' - \beta c'$ divisera $ac' - ca'$, et, par conséquent, $a\mathrm{K}' - \mathrm{K}a'$.

Divisant $a\beta' - \beta a'$ et $a\mathrm{K}' - \mathrm{K}a'$, il divisera aussi $\beta\mathrm{K}' - \mathrm{K}\beta'$, et la seconde condition sera vérifiée.

Un raisonnement semblable ferait voir que la troisième condition est toujours remplie.

43. — Quant aux valeurs des trois inconnues, nous les déduirons des formules (114), et nous aurons

$$x = \alpha_1 + \frac{(ab' - ba')(cb' - bc')}{DD'\delta} \theta$$

$$y = \alpha_2 + \frac{(ab' - ba')(ac' - ca')}{DD'\delta} \theta$$

$$z = \alpha_3 - \frac{(ab' - ba')^2}{DD'\delta} \theta$$

δ étant le plus grand commun diviseur de $\frac{ab' - ba'}{D}$ et $\frac{ab' - ba'}{D'}$, $DD'\delta$ sera le plus grand commun diviseur de $D(ab' - ba')$ et $D'(ab' - ba')$, et $\frac{DD'\delta}{ab' - ba'}$, celui de D et D', ou des trois différences, $ab' - ba'$, $ac' - ca'$, $cb' - bc'$. Appelant ρ ce plus grand commun diviseur, c'est-à-dire, posant $\frac{DD'\delta}{ab' - ba'} = \rho$, nos formules deviendront

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 + \frac{cb' - bc'}{\rho} \theta \\ y &= \alpha_2 + \frac{ac' - ca'}{\rho} \theta \\ z &= \alpha_3 - \frac{ab' - ba'}{\rho} \theta \end{aligned}\right\} \quad (121)$$

44. — La méthode que nous avons employée nous a donné les valeurs des inconnues avec certaines difficultés. Voici une autre méthode qui les donne immédiatement.

Soit le système

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= K \\ a'x + b'y + c'z &= K' \end{aligned}\right\} \quad (122)$$

pouvant être résolu. Soit $x = \alpha_1, y = \alpha_2, z = \alpha_3$ une première solution, de sorte que l'on ait

$$\left.\begin{aligned} a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 &= K \\ a'\alpha_1 + b'\alpha_2 + c'\alpha_3 &= K' \end{aligned}\right\} \quad (123)$$

La soustraction donne, en posant $x - \alpha_1 = X$, $y - \alpha_2 = Y$, $z - \alpha_2 = Z$:

$$\left.\begin{aligned} aX + bY + cZ &= 0 \\ a'X + b'Y + c'Z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (124)$$

Résolvons ce système à la manière de deux équations à deux inconnues, X et Y :

$$X = -\frac{\left(\frac{cb' - bc'}{\rho}\right)}{\left(\frac{ab' - ba'}{\rho}\right)} Z$$

$$Y = -\frac{\left(\frac{ac' - ca'}{\rho}\right)}{\left(\frac{ab' - ba'}{\rho}\right)} Z$$

en divisant chaque terme des deux fractions par le plus grand commun diviseur, ρ, des trois différences $ab' - ba'$, $ac' - ca'$, $cb' - bc'$, ce qui réduit les deux fractions à leur plus petit dénominateur commun.

Toute valeur entière de Z, qui sera divisible par $\frac{ab' - ba'}{\rho}$, satisfera aux conditions de la question, puisque X et Y seront entiers.

Posons donc

$$Z = -\frac{ab' - ba'}{\rho}\theta,$$

d'où nous tirons les valeurs

$$X = \frac{cb' - bc'}{\rho}\theta,$$

$$Y = \frac{ac' - ca'}{\rho}\theta,$$

$$Z = -\frac{ab' - ba'}{\rho}\theta,$$

et enfin

$$x = \alpha_1 + \frac{cb' - bc'}{\rho}\theta,$$

$$y = \alpha_2 + \frac{ac' - ac'}{\rho}\theta,$$

$$z = \alpha_3 - \frac{ab' - ba'}{\rho}\theta,$$

formules identiques à celles trouvées plus haut.

45. — Si l'une des trois différences était nulle, $cb' - bc'$,

par exemple, l'un des coefficients de 0 serait nul, et l'une des inconnues, x, aurait une valeur déterminée. Si, cependant, on avait $ab' - ba' = 0$, le procédé du numéro précédent devrait être modifié, et il suffirait de remplacer la lettre Z, dans son rôle, par l'une des deux autres inconnues, X ou Y, et l'on verrait que, comme l'indiquent les formules, Z est déterminé.

Voici un exemple de ce cas particulier.

Problème. — *Une société de bienfaisance est composée de membres français, anglais et américains. Deux versements ont été opérés par les membres : au premier, les Français ont donné en moyenne 5 francs par tête; les Anglais, 7 francs; les Américains, 8 francs; ce qui a produit une somme de 1,000 francs. Au second, les Français ont versé en moyenne 25 francs; les Anglais, 21 francs, et les Américains, 24 francs; ce qui a produit 4,000 francs.*

On demande le nombre des membres de chaque nationalité.

Les équations sont :

$$5x + 7y + 8z = 1000,$$
$$25x + 21y + 24z = 4000.$$

Le nombre des membres français est déterminé et égal à 100.

Quant aux autres membres, il y a neuf manières de répondre en nombres entiers positifs, savoir :

Anglais	4, 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68.
Américains	59, 52, 45, 38, 31, 24, 17, 10. 3.

46. — Si, dans les formules (122), deux des trois différences étaient nulles, la troisième le serait également, ce qui semblerait indiquer que chaque inconnue a une valeur déterminée.

Mais il faut remarquer que, dans ce cas, les équations qui composent le système sont une conséquence l'une de l'autre, ou bien elles sont contradictoires. Dans le premier de ces deux cas, le système se réduit à une seule équation; dans le second cas, il n'existe aucune solution entière, ni même fractionnaire, et la première solution qu'on a supposé avoir trouvée ne peut exister.

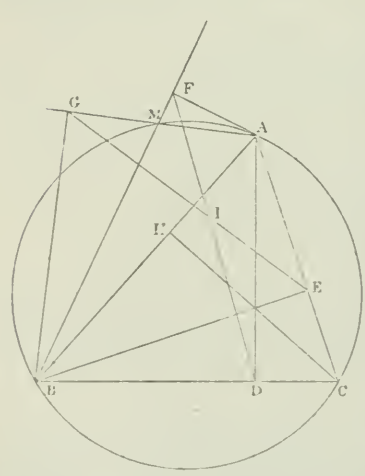
Il n'y a pas lieu de s'étonner des résultats erronés donnés par les formules dans deux cas qui se trouvent en opposition avec les hypothèses que nous avons faites, à savoir, que le système est composé de deux équations distinctes, et qu'il peut être résolu.

Lorsque ce cas se présentera, il sera facile, en remontant aux équations proposées, d'en reconnaître la cause et d'opérer selon la circonstance.

QUESTION 114

Solution, par M. Aubry, du Lycée de Douai.

On donne un triangle ABC *et le cercle circonscrit. Un point mobile* M *parcourt ce cercle. Pour chaque position du point mobile, on construit : 1° la droite de Simson relative au point* A *et au triangle* BCM; *2° la droite de Simson relative au point* B *et au triangle* ACM. *Lieu du point* I *d'intersection de ces deux droites.* (X. A.)



Soient D et F, E et G les pieds des perpendiculaires abaissées des points A sur BC et BM, B sur AC et AM.

Nous avons visiblement

$$\text{GIF} + \text{BFI} = \pi - (\text{AGI} + \text{BMG}).$$

En remarquant que BFI + BAD, AGI = ABE, BMG = C (à cause des quadrilatères inscriptibles BFAD, AGBE, AMBC), la relation précédente deviendra

$$\text{GIF} = \pi - (\text{C} + \text{BAD} + \text{ABE}) = \pi - 2\text{C}.$$

Le lieu du point I est donc le segment de cercle décrit sur DE et capable de l'angle $\pi - 2\text{C}$

Or si nous menons la hauteur CH, nous avons

$$DHE = 2DHC$$

et, puisque le quadrilatère CDHA est inscriptible,

$$DHE = 2DAC = 2\left(\frac{\pi}{2} - C\right) = \pi - 2C.$$

Donc le cercle précédent passe par le point H et le lieu cherché est le cercle des neuf points du triangle ABC.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. F. Taratte, à Évreux; Madiot, à Besançon.

QUESTION 116

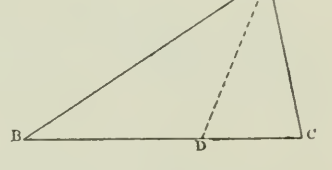
Solution par M. TRAPANZALI, élève du troisième gymnase d'Athènes.

Si, dans un triangle, l'angle A *est double de l'angle* B, *on a entre les côtés la relation*

$$a^2 = b(b + c).$$

Cas du triangle rectangle, A *et* B *étant aigus. Réciproque.*

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE



En effet, en menant la bissectrice de l'angle BAC on a

$$\frac{c}{BD} = \frac{b}{CD},$$

ce qui donne

$$\frac{c+b}{BD+CD} = \frac{c}{BD} \text{ ou } \frac{c+b}{a} = \frac{c}{BD}; \qquad (1)$$

mais puisque les triangles ABC et ABD sont semblables, on a

$$\frac{c}{BD} = \frac{a}{b}.$$

et en remplaçant dans (1) $\frac{c}{BD}$ par $\frac{a}{b}$ on a

$$\frac{c+b}{a} = \frac{a}{b},$$

ce qui donne

$$a^2 = b(b+c). \qquad (2)$$

Remarque. — Si le triangle est rectangle en C, nous aurons $c^2 - b^2 = a^2$, et l'égalité (2) devient alors

$$c^2 - b^2 = b(b + c),$$

d'où

$$c = 2b.$$

Réciproquement. — Si nous avons $a^2 = b(b + c)$ l'angle BAC = 2ABC.

En menant la bissectrice AD de l'angle BAC on a

$$\frac{c}{\text{BD}} = \frac{b}{\text{DC}},$$

d'où

$$\frac{c + b}{a} = \frac{b}{\text{DC}};$$

mais à cause de la relation $a^2 = b(b + c)$, on a

$$\frac{a^2}{b} = b + c,$$

ce qui donne

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{\text{DC}};$$

donc les triangles DAC et BAC sont semblables ; d'où

$$\text{BAC} = 2\text{ABC}$$

SOLUTION TRIGONOMÉTRIQUE

Si l'on soustrait les relations suivantes :

$a^2 = c^2 + b^2 = 2cb \cos A$ et $b^2 = a^2 + c^2 - 2ab \cos B$,

on a

$$a^2 = b^2 - cb \cos A + ac \cos B$$

et en remplaçant a par $\frac{b \sin A}{\sin B}$, valeur trouvée de la relation des côtés aux angles opposés, on a

$$a^2 = b^2 - cb \cos A + cb \frac{\sin A \cos B}{\sin B}$$

ou

$$a^2 = b^2 + cb \left(\frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\sin B}\right);$$

d'où

$$a^2 = b(b + c).$$

Remarque. — Dans le cas où l'angle $c = 90°$, nous aurons

$$a = c \cos B; \qquad (2)$$

mais nous avons

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b} \text{ ou } \frac{2 \sin B \cos B}{\sin B} = \frac{a}{b};$$

d'où

$$\cos B = \frac{a}{2b};$$

remplaçant dans l'égalité (2) cos B par $\frac{a}{2b}$ on a

$$c = 2b.$$

Réciproquement. — Si nous avons $a^2 = b(b + c)$ l'angle $A = 2B$. En effet, les formules

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ et } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

à cause de la relation (1) donnent

$$\cos A = \frac{c^2 - bc}{2bc} = \frac{c - b}{2b};$$

et

$$\cos B = \frac{bc + c^2}{2ac} = \frac{b + c}{2a} = \frac{a}{2b};$$

donc

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2} = \frac{c + b}{4b} = \frac{a^2}{4b^2}$$

et

$$\cos^2 B = \frac{a^2}{4b^2};$$

d'où l'on tire

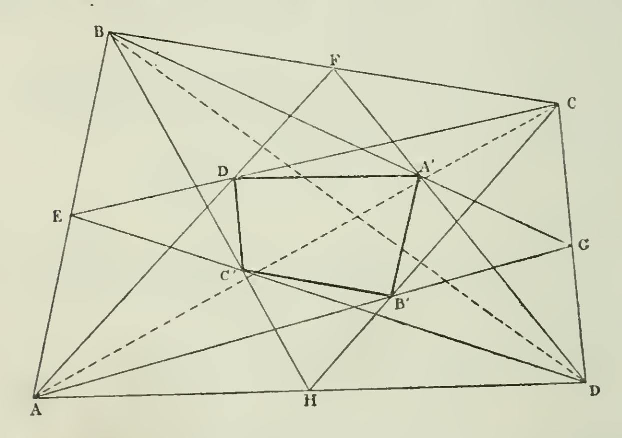
$$B = \frac{A}{2}.$$

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Mazet, à Valence; Lamaire, au lycée Charlemagne à Paris; Vigarié, à Toulouse; Bernheim, à Besançon; Diflimbach, à Condé (Nord); Bordage, à Nantua; Taratte, à Évreux; Bouveret, à Pontarlier; Lomont, Schnarf, institution Sainte-Marie à Besançon; Lecouillard, à Bayeux; Millot, à Chaumont; Beaurepaire, école Massillon à Paris; Richard, à Agen; Aubry, à Douai; Bourgarel, à Antibes.

QUESTION 117

Solution par M. Schnarf, élève de l'Institution Sainte-Marie, à Besançon.

On donne un quadrilatère ABCD; *soient* A′ *le centre de gravité du triangle* BCD, B′ *celui du triangle* CAD, *etc. Prouver que les deux quadrilatères* ABCD, A′B′C′D′ *sont homothétiques.*



Le centre de gravité d'un triangle est au point de rencontre des médianes, lequel est situé aux deux tiers de leur longueur à partir du sommet.

Par conséquent, dans le triangle DCE on a

C′D′ parallèle à CD et égale à $\frac{CD}{3}$.

De même A′D′ — AD — $\frac{AD}{3}$

A′B′ — AB — $\frac{AB}{3}$

B′C′ — BC — $\frac{BC}{3}$

Les deux quadrilatères ABCD, A′B′C′D′ ont donc leurs côtés homologues proportionnels; de plus, ils ont les angles égaux

chacun à chacun comme formés par des parallèles dirigées en sens contraire; ils sont donc semblables.

Les côtés homologues de ces quadrilatères étant parallèles, ils sont homothétiques.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Aubry, à Douai; Bourgarel, à Antibes; Millot, à Chaumont; Lamaire, lycée Charlemagne à Paris; Vigarié, à Toulouse.

QUESTION 118

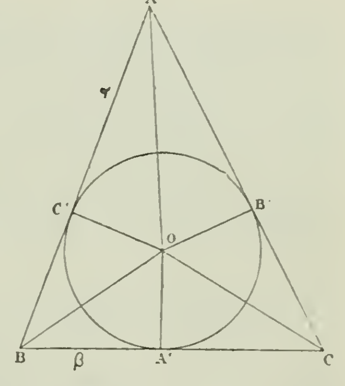
Solution, par M. Mazet, élève au Collège de Valence.

On donne le triangle ABC *et le rayon* r *du cercle. Soit* A′, B′, C′ *les points de contact du cercle inscrit avec les côtés du triangle* A′ *sur* BC, *etc. On pose*

$$AC' = \alpha;$$
$$BH' = \beta;$$
$$CB' = \gamma.$$

S *désignant la surface, prouver que l'on a*

$$S = \frac{\alpha\beta\gamma}{r}.$$



Nous savons que la surface d'un triangle en fonction des côtés est

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad (1)$$

en fonction du rayon

$$S = pr, \quad (2)$$

p étant le demi-périmètre.

Les tangentes issues d'un même point à une même circonférence étant égales, dans ce cas l'on a

$$p = \alpha + \beta + \gamma.$$

Car

$$a = \gamma + \beta; \qquad b = \alpha + \gamma; \qquad c = \alpha + \beta.$$

La formule (1) devient

$$S = \sqrt{p(\alpha\beta\gamma)}\,;$$

d'où

$$p(\alpha\beta\gamma) = p^2r^2$$

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{r} = pr = S. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nota. — La même question a été résolue par MM. Bernheim, à Besançon; Vigarié, à Toulouse; Blessel, à Paris; Schnarf, institution Sainte-Marie à Besançon; Beaurepaire, école Massillon à Paris; Lamaire, lycée Charlemagne à Paris; Bourgarel, à Antibes; Bordage. à Nantua.

QUESTION 122

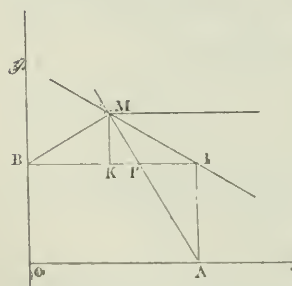
Solution par M. Aubry, élève au Lycée de Douai.

On donne un angle droit yOx *et un point fixe* M *; autour du point* M *on fait tourner un angle droit dont les côtés rencontrent* Ox *en* A, Oy *en* B. *Par les points* A *et* B *on mène des parallèles à* Ox *et* Oy ; *ces parallèles se coupent en un point* I. *Démontrer que le lieu du point* I *est une droite.*

2° *La parallèle à* Ox *menée par* B *rencontre* MA *en un point* I'. *Démontrer que le lieu décrit par* I' *est une parabole ayant pour sommet le point* M *et pour axe une parallèle à* Ox.

(G. L.)

1° Les points O,A,I,M,B sont sur une circonférence dont OI est un diamètre. Donc l'angle OMI est droit et le lieu du point I est la perpendiculaire MI à OM menée par le point M.



2° Si K désigne le point de rencontre de BI' avec la parallèle MK à Oy menée par le point M, le triangle rectangle BML' donnera la relation

$$MK^2 = BK.KI'\,;$$

BK étant constant, ceci fait voir que le point I' décrit une

parabole ayant le point M pour sommet et pour axe la parallèle à Ox menée par le point M.

Nota. — La même question a été résolue par MM. J.-B. Perrin, à Clermont-Ferrand; Blessel, à Paris; Raveau, élève au lycée Charlemagne à Paris; Bourgarel, à Antibes; Taratte, à Evreux; Savonnet, à Salins.

QUESTION 127

Solution par J.-B. Perrin, maître répétiteur au Petit Lycée de Clermont-Ferrand.

On considère un trapèze ABCD, *dans lequel les diagonales* AC, BD *se coupent orthogonalement au point* P. *Soit pris le point* P′, *symétrique de* P *par rapport à la parallèle équidistante des bases. Démontrer que les cercles* P′AB, P′CD *sont tangents.*

Joignons le point P′ aux quatre sommets du trapèze. Les triangles P′AD, P′CB sont rectangles en P′. En effet, si M et N sont les milieux des côtés non parallèles, on voit que MP = MP′; le triangle DPA étant rectangle en A, la médiane PM est la moitié de DA; donc, P′M étant la moitié de DA, le triangle DP′A est rectangle en P′.

On voit de même que P′N étant la moitié de CB, le triangle CP′B est rectangle en P′.

Soit Q le centre du cercle circonscrit au triangle DCP′; le point Q est l'intersection des perpendiculaires menées de M et de N aux côtés DP′ et CP′; il en résulte que les triangles MQN et AP′B sont homothétiques, le centre d'homothétie étant le point O. On verra de même que le point S étant le centre du cercle circonscrit au triangle AP′B, les deux triangles DCP′, MNS sont homothétiques, le centre d'homothétie étant encore le point O; donc les points Q, P′, S sont en ligne droite; les deux cercles ayant respectivement Q et S pour centres, et passant en P′ sont alors tangents.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Trapanzali, à Athènes; Lespès, à Toulouse; Chapron, à Versailles; Houtebeyrie, à Villeneuve-de-Marsan.

VARIÉTÉS

DÉFINITION DES GRANDEURS ET DES NOMBRES

Par M. A. **Calinon**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 229.)

§ 8. — *Grandeurs algébriques.*

Revenons aux figures dont nous avons parlé : soit un segment de droite AB; on distingue dans ce segment deux sens, suivant qu'on le considère comme décrit par un point allant de A vers B ou de B vers A : dans le premier cas le point A est le point initial et le point B le point terminal : le sens de A à B est indiqué par la flèche f; on convient souvent de représenter le sens du segment AB en mettant à la première place dans l'expression AB la lettre du point initial.

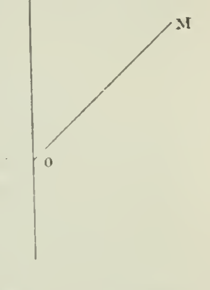
De même, l'angle AOB peut être engendré par une droite mobile passant par le sommet, coïncidant d'abord avec le côté OA et venant ensuite coïncider avec le côté OB ; si au contraire la droite mobile allait de la position OB à la position OA, on aurait l'angle décrit en sens inverse : ces deux sens sont représentés par les expressions AOB et BOA qui s'expliquent d'elles-mêmes.

On verrait que toutes les autres figures grandeurs, arcs de cercle, angles dièdres, etc. sont ainsi susceptibles de deux sens : nous appellerons grandeurs algébriques les grandeurs pour lesquelles un sens sera ainsi spécifié : en d'autres termes, ces grandeurs ne diffèrent des précédentes que par l'adjonction de l'idée de sens.

Nous allons voir maintenant l'utilité de cette idée nouvelle.

Sur une droite indéfinie XY prenons un point O fixe : soit un point quelconque M de cette droite; il est évident, que si l'on se donne la longueur OM, la position du point M sur XY n'est pas unique; car cette longueur peut être portée d'un côté comme de l'autre du point O. Mais l'ambiguïté disparaît si on se donne en même temps le sens de OM; ainsi la position de M est bien déterminée quand on se donne la grandeur OM avec son sens, c'est-à-dire la grandeur algébrique de OM.

De même des autres grandeurs; soit par exemple une droite fixe OA dans un plan, la position OM d'une autre droite de ce plan passant par O sera bien déterminée si l'on se donne l'angle AOM avec son sens, c'est-à-dire sa grandeur algébrique : autrement il y aurait pour OM deux positions possibles.

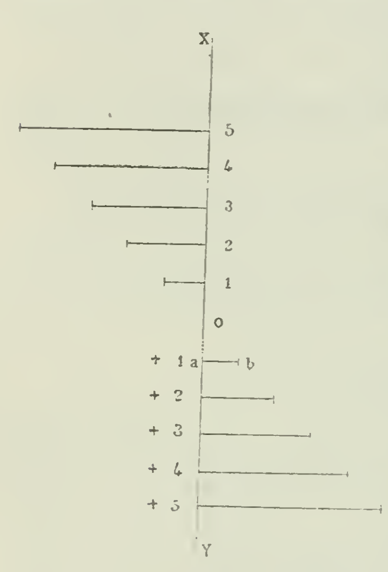


Supposons que, pour une grandeur d'espèce quelconque, on se donne la figure unité avec son sens, on obtiendra, comme pour les grandeurs géométriques, une série indéfinie de groupements composés avec cette unité et ayant le sens de cette unité; ces groupements sont dits positifs; on a aussi la même série de groupements pris avec le sens contraire ou, si l'on veut, composés d'unités changées de sens; ce sont les groupements négatifs : il n'y a pas d'autres groupements possibles, puisque les figures considérées ne sont susceptibles que de deux sens.

§ 9. — *Définition des nombres algébriques.*

Pour passer de là à la définition des nombres algébriques nous suivrons exactement la même marche qu'en arithmétique. Afin de donner plus de clarté à cette exposition prenons, par exemple, des segments de droite; soit *ab* le segment unité, *a* étant le point initial; classons les divers groupements dont nous venons de parler ainsi que l'indique la figure ci-contre, tous les segments étant perpendiculaires à une ligne droite XY sur laquelle nous plaçons le point

initial de chacun de ces segments, les segments positifs étant portés à droite de XY comme l'unité *ab* et les segments négatifs à gauche : nous avons ainsi la série, indéfinie de part et d'autre, de tous les groupements algébriques; les nombres algébriques seront, par définition, les noms de tous ces groupements, abstraction faite de l'espèce de la grandeur. Mais la série totale des groupements peut se décomposer en deux séries, une série de groupements positifs et une série de groupements négatifs, et dans ces deux séries les groupements sont deux à deux égaux et de sens contraire; dès lors il semble tout indiqué d'adopter pour les deux séries la même série de noms qu'en arithmétique en adjoignant aux noms des groupements positifs l'épithète *positif* et aux noms des groupements négatifs l'épithète *négatif*; ainsi, ces noms ou nombres algébriques ne seront pas autre chose que les nombres arithmétiques pris positivement ou négativement.



Il suit de là que le nombre algébrique détermine ou mesure la grandeur en fonction de l'unité, mais il la détermine avec son sens; ainsi, le nombre négatif 3 exprime un groupement de 3 figures égales à la figure unité et de sens contraire.

Nous n'avons parlé jusqu'ici que des nombres algébriques entiers ; on passe de là aux nombres fractionnaires, comme en arithmétique ; il n'y a sur ce point aucune difficulté.

Dans le langage écrit, c'est-à-dire dans le calcul, les nombres se figurent, comme on sait, par des chiffres, et les qualificatifs, *positif* et *négatif*, par les deux signes + et —. Il ne faut, bien entendu, pas voir dans ces deux signes

autre chose que des synonymes aux mots *positif* et *négatif*; nous prenons ainsi ces deux signes dans une acception différente de celle où nous les avons pris tout d'abord; dans les nombres arithmétiques + et — représentent des opérations entre plusieurs nombres; en algèbre, ces signes, placés devant des nombres isolés, représentent le sens des grandeurs que mesurent ces nombres. Nous verrons plus loin ce qui justifie l'adoption des mêmes symboles dans ces deux cas en apparence si différents.

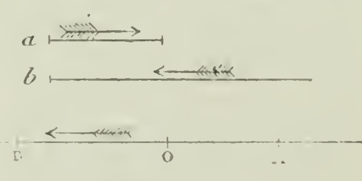
D'après ces définitions la série, illimitée dans les deux sens, des nombres algébriques est

$$\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5 \ldots$$

Il faut de plus intercaler, entre deux termes consécutifs quelconques de cette série, tous les nombres fractionnaires intermédiaires.

§ 10. — *Addition et soustraction algébriques.*

Additionner des grandeurs algébriques, c'est les grouper conformément au mode de groupement spécial à ces grandeurs, mais en tenant compte de leur sens ; telle est la définition de l'addition algébrique tout à fait analogue à la définition de l'addition arithmétique : expliquons cela par un exemple; soient les deux segments de droite a et b dont le sens est indiqué par les flèches; sur une droite indéfinie portons à partir d'un point initial O le segment OA égal à a et de même sens, puis à partir du point A le segment AB égal à b et de même sens : le segment OB ayant le point O pour point initial est, par définition, la somme algébrique des segments a et b : la même définition s'applique au cas de plus de deux segments. Enfin toutes les autres grandeurs algébriques peuvent s'ajouter d'une façon analogue, chacune suivant son mode de groupement.



Si une grandeur est la somme algébrique de plusieurs autres grandeurs partielles, le nombre algébrique qui mesure

la grandeur totale est, par définition, la somme algébrique des nombres qui mesurent les grandeurs partielles.

Ces définitions nous amènent très simplement, et toujours par des considérations géométriques, aux deux conséquences suivantes que nous nous bornons à énoncer.

1° La somme algébrique de plusieurs grandeurs ou de plusieurs nombres est indépendante de l'ordre des termes;

2° Pour ajouter algébriquement deux grandeurs ou deux nombres, on les ajoute arithmétiquement s'ils sont de même sens et on donne à cette somme arithmétique le sens commun des parties; quand ils sont de sens contraires, on retranche arithmétiquement le plus grand du plus petit et on donne au résultat le sens du plus grand.

C'est, nous le répétons, sur des figures géométriques que ces théorèmes doivent se démontrer; on passe des figures aux nombres en constatant que ces théorèmes sont vrais pour toutes les figures grandeurs.

Soient à ajouter les nombres -5 et $+2$, nous aurons d'après la règle précédente une somme égale à -3, ce qu'on exprime ainsi $-5+2=-3$; dès lors on voit qu'il est inutile d'introduire en algèbre un nouveau signe pour figurer l'addition, puisque la règle en question indique pour l'addition algébrique de -5 et de $+2$: 1° l'opération arithmétique à faire, 2° le signe des résultats: ainsi les signes $+$ et $-$ qui en algèbre font en quelque sorte partie des nombres indiquent aussi, dans le cas de l'addition, l'opération à faire entre ces nombres.

Comparons maintenant l'expression arithmétique

$$7-2+3=8$$

et l'expression algébrique

$$+7-2+3=+8.$$

Il résulte de la définition de ces expressions que, dans les deux cas, les opérations arithmétiques à faire sont les mêmes; seulement, dans la seconde expression, l'opération terminée nous donne un signe pour le résultat.

Cette comparaison justifie la définition et l'emploi des signes $+$ et $-$ au point de vue algébrique.

En résumé nous avons, en algèbre, pris les signes + et — dans une acception nouvelle; nous avons montré ensuite que ces signes convenaient pour représenter l'addition algébrique; enfin nous venons de voir que dans un polynôme arithmétique et dans le même polynôme algébrique ces signes indiquent les mêmes opérations; il résulte évidemment de là qu'en algèbre les signes + et — ont uniquement un sens plus général qu'en arithmétique : en arithmétique ils expriment des opérations; en algèbre ils expriment d'abord les mêmes opérations, puis ils en expriment d'autres qui arithmétiquement ne veulent rien dire (par exemple $-5+3=-2$), et enfin ils expriment le sens des grandeurs ou des nombres.

Quant à la soustraction, elle est l'opération inverse de l'addition et elle se définit de la même façon qu'en arithmétique; nous n'insistons pas sur ce point qui ne présente aucune difficulté.

§ 11. — *Multiplication et division algébriques.*

Multiplier une grandeur appelée multiplicande par un nombre algébrique appelé multiplicateur, c'est former avec la grandeur multiplicande une nouvelle grandeur comme le multiplicateur est formé avec l'unité.

C'est, comme on le voit, la même définition qu'en arithmétique : ainsi soit à multiplier une grandeur algébrique par $-\frac{3}{5}$; $-\frac{3}{5}$ est formé avec l'unité en groupant 3 fois le cinquième de l'unité changée de signe; on obtiendra donc la grandeur produit en groupant 3 fois le cinquième du multiplicande changé de signe.

Si au contraire le multiplicateur était positif, le produit aurait le signe du multiplicande : ces deux cas nous donnent la règle connue des signes.

En remplaçant la grandeur multiplicande par le nombre algébrique qui la mesure, on a, comme en arithmétique, la définition de la multiplication d'un nombre par un nombre.

La division se définit comme opération inverse de la mul-

tiplication : elle consiste, étant donnés le produit de deux nombres algébriques et l'un de ces nombres, à trouver l'autre.

En résumé, les quatre opérations algébriques se définissent comme les quatre opérations arithmétiques dont elles ne sont que des généralisations.

De plus, la théorie que nous venons d'exposer rattache bien à la notion expérimentale de la forme les diverses définitions des grandeurs et des nombres arithmétiques et algébriques; c'est précisément ce que nous voulions montrer.

§ 12. — *Définition des inégalités.*

Nous avons déjà employé l'expression *plus grand*; pour ne laisser subsister aucun doute sur le sens des mots nous allons définir cette expression.

Arithmétiquement, un nombre est plus grand qu'un autre lorsqu'il est égal à cet autre ajouté à un nombre quelconque; si l'on a $3 + 5$ égale 8, 8 est plus grand que 3, ce qu'on exprime ainsi $8 > 3$.

Algébriquement, un nombre est plus grand qu'un autre lorsqu'il est égal à cet autre auquel on a ajouté un nombre positif quelconque; si l'on a $-7 + 2 = -5$, -5 est plus grand que -7, puisque -5 est la somme de -7 et d'un nombre positif.

Il ne faut donc jamais perdre de vue les deux sens de l'expression *plus grand* en arithmétique et en algèbre.

La définition de l'expression *plus petit* se déduit de ce qui précède.

Cette distinction entre les deux acceptions du mot *plus grand* est fondamentale, et c'est pour l'avoir perdue de vue que d'Alembert a formulé l'étrange paradoxe que nous allons rappeler. Cet auteur pose la proportion suivante qui est exacte

$$\frac{+1}{-1} = \frac{-1}{+1}$$

et dit : Comment ces deux fractions peuvent-elles être égales quand, dans la première, le numérateur est plus grand que le dénominateur, tandis que l'inverse a lieu dans la seconde ?

D'Alembert ne s'aperçoit pas qu'il prend dans cette phrase le mot *plus grand* dans le sens arithmétique et, en effet,

en arithmétique, il est impossible qu'une fraction comme $\frac{2}{3}$, dont le numérateur est plus petit que le dénominateur, soit égale à une fraction comme $\frac{7}{5}$, où le numérateur est plus grand que le dénominateur. Mais dans cette proportion $\frac{+1}{-1} = \frac{-1}{+1}$ les nombres sont algébriques; il ne peut donc être question de l'expression *plus grand* dans le sens arithmétique; dès lors si, dans la phrase de d'Alembert, on rend à l'expression *plus grand* son sens algébrique la phrase perd toute son étrangeté apparente; on s'en rend très bien compte en remplaçant les mots *plus grand* par la définition algébrique donnée plus haut.

(A suivre.)

ECOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

CONCOURS DE 1884. — EXAMENS ÉCRITS

Mathématiques. *(4 heures.)*

Trouver le lieu des foyers des paraboles de grandeur invariable qui touchent une droite donnée en un point donné.

Dictée.

Tempête à l'île Bourbon, de Bernardin de Saint-Pierre.

Trigonométrie. *(1 heure.)*

Deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.

Composition française. *(3 heures.)*

Expliquez, appréciez et confirmez par quelques exemples cette pensée de Bacon : « L'homme, créé roi de la nature, exerce sur cette même nature un empire proportionné à la science qu'il en a acquise. »

Dessin. *(4 heures.)*

Machine à agglomérer, double. (Système Couffinhal.)

Physique et Chimie. *(3 heures.)*

1° — Trois pendules sont abandonnés ensemble, en partant du point P. Le premier, long de $4^m,48$, décrit l'arc PA; le deuxième, long de $5^m,67$, décrit l'arc PB situé dans le même plan; le troisième se meut dans un plan perpendiculaire suivant PC. On demande quelle doit être sa longueur pour que les trois mobiles se retrouvent ensemble au point P; après combien d'oscillations et après quel intervalle de temps cette rencontre aura lieu.

2° — Un oxyde de manganèse perd 3,39 o/o de son poids par la calcination à l'air au rouge vif. On demande:

1° La teneur en manganèse;

2° La quantité de Cl qu'un kilogramme dégagera par son action sur HCl;

3° La pression qui sera développée si l'on chauffe à 1400° un kilogramme de cet oxyde enfermé dans une sphère d'acier de $0^m,40$ de diamètre.

3° — 4 gr. 93 d'une poudre blanche soumise à la calcination au rouge blanc donnent un résidu pesant 1 gr. 87. Un autre échantillon de même poids est dissous dans HCl avec effervescence. Le AzH^3 y donne un précipité qui filtré, lavé et calciné pèse 1 gr. 03. Dans la liqueur de lavage le AzH^4O,CO^2 donne un précipité qui calciné au rouge vif pèse 0 gr. 84. La liqueur ne contient plus aucun élément fixe. Un troisième échantillon du même poids traité par HCl étendu de beaucoup d'eau et additionné de BaCl donne un précipité qui, lavé et calciné, pèse 6 gr. 996. On a constaté du reste que la liqueur acide obtenue par la dissolution de cette poudre ne précipite pas par HS et donne un précipité blanc par le AzH S.

On demande la composition probable de cette poudre.

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 24074-4.

AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES DE 1883

Solution de la question de Mathématiques Élémentaires, par M. L. MARCHIS, élève au Lycée de Rouen.

Trouver la hauteur AB *et les bases* AD, BC *d'un trapèze rectangle* ABCD, *connaissant la longueur* l *du côté oblique* CD, *l'aire* a^2 *du trapèze, et le volume* $\frac{3}{4}\pi b^3$ *engendré par la révolution de la figure autour de* CD.

Discuter les formules trouvées, et déterminer le minimum de b^3. *On examinera les cas particuliers suivants :*

$$l = a, \quad l = 3a.$$

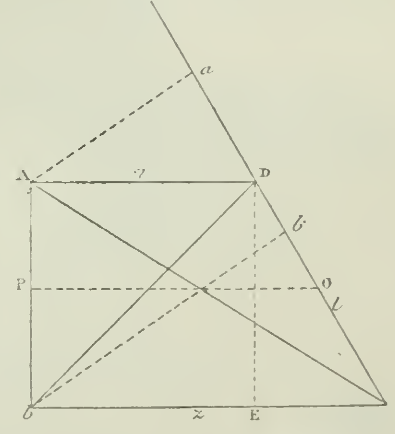
On a :

$$\text{vol ABCD} = \text{vol ADC} + \text{vol ABC}$$

Or :

$$\text{vol ABC} = \text{surf AB} \cdot \frac{BC}{3}$$

$$\text{vol ADC} = \text{surf AD} \cdot \frac{AB}{3}$$



Si ab est la projection de AB sur CD, et PO la droite menée par le milieu de AB parallèlement aux bases du trapèze, on a

$$\text{surf AB} = 2\pi \cdot \text{PO} \cdot ab$$

$$\text{surf AD} = \pi \cdot \text{A}a \cdot \text{AD}$$

$$\text{vol ABCD} = 2\pi \cdot \text{PO} \cdot ab \cdot \frac{BC}{3} + \pi \cdot \text{A}a \cdot \text{AD} \cdot \frac{AB}{3}$$

Ceci posé, si x, y, z sont les trois longueurs demandées, les équations du problème seront :

$$\frac{y+z}{2} \cdot x = a^2 \qquad (1)$$

Le triangle rectangle DEC donne :

$$l^2 = x^2 + \mathrm{EC}^2 = x^2 + (z - y)^2$$

$$x^2 + (z - y)^2 = l^2 \qquad (2)$$

$$\frac{3}{4}\pi b^3 = 2\pi \cdot \frac{y + z}{2} \cdot ab \cdot \frac{z}{3} + \pi \mathrm{A}a \cdot \frac{yx}{3}$$

Or les deux triangles DEC, AaD sont semblables, car ils sont rectangles, et les angles DCE, aDA sont égaux comme correspondants. On a donc :

$$\frac{\mathrm{A}a}{x} = \frac{y}{l}$$

$$\mathrm{A}a = \frac{xy}{l}$$

D'autre part,

$$ab = \mathrm{AD} - b\mathrm{D} = a\mathrm{D} - b\mathrm{C} + l$$

Or les triangles semblables DEC, AaD donnent :

$$\frac{a\mathrm{D}}{\mathrm{EC}} = \frac{y}{l} = \frac{\mathrm{AD}}{z - y}$$

$$\frac{a\mathrm{D}}{y} = \frac{z - y}{l}$$

Les triangles rectangles bBC, DEC sont semblables, comme ayant l'angle en C commun.

$$\frac{b\mathrm{C}}{\mathrm{EC}} = \frac{z}{l} = \frac{b\mathrm{C}}{z - y}$$

$$\frac{b\mathrm{C}}{z} = \frac{a\mathrm{D}}{y} = \frac{z - y}{l} = \frac{b\mathrm{C} - a\mathrm{D}}{z - y}$$

$$b\mathrm{C} - a\mathrm{D} = \frac{(z - y)^2}{l}$$

$$ab = -\frac{(z - y)^2}{l} + l$$

donc :

$$\frac{3}{4}\pi b^3 = \pi (y + z) \frac{z}{3} \left\{ l - \frac{(z - y)^2}{l} \right\} + \pi \cdot \frac{xy}{3} \cdot \frac{xy}{l}$$

La 3e équation du problème est donc :

$$\frac{9}{4} b^3 = (y + z) z \left\{ l - \frac{(z - y)^2}{l} \right\} + \frac{x^2y^2}{l} \qquad (3)$$

De l'équation (2) on tire :

$$(z - y)^2 = l^2 - x^2$$

et en portant cette valeur dans l'équation (3),

$$\frac{9}{4}b^3 = (y+z)z \cdot \frac{x^2}{l} + \frac{x^2y^2}{l}$$

Mais l'équation (1) donne $y + z = \frac{2a^2}{x}$; et en remplaçant $y + z$ par cette valeur dans l'équation (3), nous pouvons remplacer cette équation par la suivante :

$$x^2y^2 + 2a^2zx - \frac{9}{4}lb^3 = 0 \qquad (3')$$

De l'équation (1) tirons :

$$xy = 2a^2 - xz$$
$$x^2y^2 = 4a^4 - 4a^2xz + x^2z^2$$

l'équation (3') devient :

$$4a^4 - 4a^2xz + x^2z^2 + 2a^2xz = \frac{9}{4}lb^3$$

$$a^4 - 2a^2xz + x^2z^2 = \frac{9}{4}lb^3 - 3a^4$$

$$(a^2 - xz)^2 = \frac{9}{4}lb^3 - 3a^4$$

$$a^2 - xz = \sqrt{\frac{9}{4}lb^3 - 3a^4}$$

en prenant le radical dans toute sa généralité.

L'équation (1) donne

$$xy = a^2 - xz + a^2 = \sqrt{\frac{9}{4}lb^3 - 3a^4} + a^2$$

$$xz = a^2 - \sqrt{\frac{9}{4}lb^3 - 3a^4}$$

$$y = \frac{\sqrt{\frac{9}{4}lb^3 - 3a^4} + a^2}{x} \qquad (4)$$

$$z = \frac{a^2 - \sqrt{\frac{9}{4}lb^3 - 3a^4}}{x} \qquad (5)$$

Portons ces valeurs dans l'équation

$$x^2 + \frac{9lb^3 - 12a^4}{x^2} =$$

$$x^4 - l^2x^2 + 9lb^3 - 12a^4 = 0 \qquad (6)$$

Les inconnues du problème sont donc données par les équations (4), (5), (6).

Discussion. — Pour que les valeurs trouvées pour x, y, z soient une solution du problème, il faut que ces valeurs soient réelles.

1° Condition de réalité de y *et de* z. — Il faut : 1° que x soit réel. Nous examinerons plus bas les conditions qui en résultent.

2° $$9lb^3 - 12a^4 \geq 0$$

ou

$$b^3 \geq \frac{12a^4}{9l}$$

° *Discussion de l'équation* (6). — Pour que x soit réel, il faut : 1° que la quantité soumise au radical dans la valeur de x^2 (l'équation étant résolue comme équation du deuxième degré en x^2) soit positive, c'est-à-dire que,

$$l^4 - 36lb^3 + 48a^4 \geq 0$$

$$l^4 + 48a^4 \geq 36lb^3$$

$$b^3 \leq \frac{l^4 + 48a^4}{36l}$$

Voyons si cette condition est compatible avec la condition trouvée précédemment, c'est-à-dire si :

$$\frac{l^4 + 48a^4}{6l} > \frac{12a^4}{9l}$$

$$\frac{l^4 + 48a^4}{4} > 12a^4$$

$$l^4 > 0$$

Si nous considérons l'équation (6) comme du second degré en x^2, si

$$b^3 \geq \frac{12a^4}{9l}$$

le produit des racines de cette équation est positif ; donc les deux racines sont de même signe. La somme l^2 des racines est positive, donc les deux racines de l'équation en x^2 sont positives. Si en même temps

$$b^3 \leq \frac{l^4 + 48a^4}{36l}$$

ces deux racines sont réelles; donc les quatre racines de l'équation bicarrée (6) sont réelles.

Donc pour que x, y, z soient réels, il faut que :

$$\frac{12a^4}{9l} < b^3 < \frac{l^4 + 48a^4}{36l}$$

$\frac{12a^4}{9l}$ est donc le minimum de b^3.

Pour

$$b^3 = \frac{12a^4}{9l} \quad y = \frac{a^2}{x}$$

$$z = \frac{a^2}{x}.$$

$$x = 0, \quad x = +l.$$

Pour $x = 0$

$$y = z = \infty.$$

Dans ce cas, le trapèze ABCD se réduit à l'une ou l'autre de ses bases qui sont des droites indéfinies.

$$x = l, \quad y = z = \frac{a^2}{l}.$$

Le trapèze ABCD devient un *rectangle* dont les deux dimensions sont l et $\frac{a^2}{l}$.

La valeur négative de x ne convient pas au problème.

Remarque. — Quand b^3 devient égal à $\frac{l^4 + 48a^4}{36l}$

$$x = \frac{l\sqrt{2}}{2}, \quad y = \frac{2a^3}{l\sqrt{2}} = z.$$

On a un rectangle dont les dimensions sont :

$$\frac{2a^2}{l\sqrt{2}} \text{ et } \frac{l\sqrt{2}}{2}$$

Cas particuliers. — 1° $l = a$.

Dans ce cas les limites de b^3 sont .

$$\frac{12a^3}{9}, \text{ minimum}$$

$$\frac{49a^3}{36}, \text{ maximum.}$$

Pour $b^3 = \dfrac{12a^3}{9}$

$$x = 0, \quad y = z = \infty$$
$$x = a, \quad y = z = a.$$

Le trapèze ABCD devient un *carré*, de côté égal à a.

Pour $b^3 = \dfrac{49a^3}{36}$

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad y = z = \frac{2a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}.$$

On a un rectangle dont la base est double de la hauteur.

2° $l = 3a$.

Les limites de b^3 sont :

$$\frac{4a^3}{9}, \text{ minimum},$$
$$\frac{43a^3}{36}, \text{ maximum}.$$

Pour $b^3 = \dfrac{4a^3}{9}$

$$x = 0, \quad y = z = \infty$$
$$a = 3a, \quad y = z = \frac{a}{3}.$$

On a un rectangle dont les dimensions sont $3a$ et $\dfrac{a}{3}$.

Pour $b^3 = \dfrac{43a^3}{36}$,

$$x = \frac{3a\sqrt{2}}{2}, y = z = \frac{2}{3\sqrt{2}}.$$

Le trapèze est un rectangle.

Remarque. — On ne peut admettre que les valeurs positives d'y et de z.

Il faut donc que :

$$a^2 > \frac{1}{2}\sqrt{9lb^3 - 12a^4}$$
$$4a^4 > 9lb^3 - 12a^4$$
$$16a^4 > 9lb^3$$
$$b^3 > \frac{16a^4}{9l}.$$

Si

$$\frac{16a^4}{9l} > \frac{l^4 + 48a^4}{36l}$$

ou

$$l > 2a.$$

Alors

$$\frac{l^4 + 48a^4}{36l}$$

est bien le maximum de b^3. C'est le cas examiné.

Mais si $l > 2a$, $\frac{16a^4}{9l}$ est le maximum de b^3.

QUESTION 125

Solution par M. P. G. SIMON, au Collège de Salins.

On donne une circonférence C, *et un point extérieur* A. *De ce point, on mène une corde* AMN, *et on projette* M, N *en* P *et en* Q *sur* CA. *Déterminer l'angle* NAC *de façon que le trapèze* MNQP *soit maximum, et construire géométriquement cet angle.*

Soit H le milieu de MN ; HK la perpendiculaire menée du point H sur AC. La surface est égale à PQ $\times$ HK. (Le lecteur est prié de faire la figure.)

Or on a

$PQ = MN \cos x;$

$HK = CH \cos x = AC \sin x \cos x = d \sin x \cos x;$

$MN = 2\sqrt{R^2 - CH^2} = 2\sqrt{R^2 - d^2 \, 2\text{in}^2 x};$

d'où

$PQ = 2 \cos x\sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 x}.$

Il en résulte que l'on doit chercher le maximum de l'expression

$$2d \sin x \cos^2 x\sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 x},$$

ou de son carré; or, si nous négligeons le facteur constant $4d^2$, il faut chercher le maximum de l'expression

$$\sin^2 x(1 - \sin^2 x)^2(R^2 - d^2 \sin^2 x).$$

La valeur de $\sin^2 x$ qui satisfera à ces conditions sera racine de l'équation

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{2}{1 - \sin^2 x} - \frac{d^2}{R^2 - d^2 \sin^2 x} = 0$$

équation qui devient après réduction,

$$4d^2 \sin^4 x - (2d^2 + 3R^2) \sin^2 x + R^2 = 0.$$

Cette équation a ses racines réelles ; en effet, la quantité sous le radical est

$$4d^2(d^2 - R^2) + 9R^4,$$

quantité essentiellement positive, puisque $d^2 - R^2$ est positive d'après l'hypothèse.

Il faut en outre que l'on trouve pour le sinus une valeur inférieure à l'unité; or, si l'on remplace $\sin^2 x$ par 1, il vient

$$2d^2 - 2R^2,$$

quantité positive; et puisque la demi-somme des racines,

$$\frac{2d^2 + 3R^2}{8d^2}$$

est inférieure à 1. il en résulte que les deux racines sont inférieures à l'unité.

Enfin, si nous menons par le point A une tangente, l'angle qu'elle fait avec AC est déterminé par la valeur

$$\sin\alpha = \frac{R}{d};$$

donc, il faut que la racine soit inférieure à cette valeur de $\sin \alpha$; or la substitution de la valeur précédente donne la quantité négative

$$\frac{R^2}{d^2}(R^2 - d^2).$$

Donc il faudra prendre la plus petite racine pour $\sin^2 x$; on aura donc

$$\sin^2 x = \frac{(2d^2 3R\ )_z + -\sqrt{4d^2(d^2 - R^2) + 9R^4}}{8d^2}.$$

Pour construire cette valeur, nous remplacerons la quantité inconnue, $\sin x$, par le rapport $\frac{z}{d}$, en appelant z la ligne CH, et nous aurons alors l'équation

$$4z^4 - (2d^2 + 3R^2)z^2 + R^2 d^2 = 0.$$

Nous allons construire deux lignes z' et z'', liées par les relations

$$z'^2 + z''^2 = \frac{2d^2 + 3R^2}{4},$$

$$z'z'' = \frac{Rd}{2};$$

nous prendrons la plus petite de ces deux lignes pour OH.

Le second membre de la première équation représente le carré de la moitié de l'hypoténuse du triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit le côté du carré inscrit dans un cercle de rayon d, et le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon R; la seconde représente la surface d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont R et d; il est alors facile de trouver les côtés z' et z''; avec le plus petit, on décrira du point C comme centre une circonférence; la tangente à cette circonférence menée par le point A est la droite cherchée.

QUESTION 126

Solution par M. E. VIGARIÉ, élève au Lycée de Toulouse.

Etant donnés deux cercles tangents entre eux au point A, *on mène de ce point une transversale qui coupe le premier cercle au point* B, *le second au point* B'. *On joint le point* B *du premier cercle au centre* O' *du second, et le point* B' *du second cercle au point* O *du premier. Les deux droites* BO', B'O *se rencontrent en un point* M *dont on demande le lieu lorsque la transversale* ABB' *prend toutes les positions possibles autour du point* A. — *Discussion.* — *Signaler les propriétés du triangle* BB'M. — *Étant donné l'angle* θ *que fait la transversale* ABB' *avec la ligne des centres dans une de ses positions, ainsi que les rayons* R *et* R *des deux cercles, trouver les trois côtés du triangle* BB'M *en fonction de ces données.* (Aix, concours académique 1867.)

1° Les cercles O et O' sont tangents extérieurement. Soit M le point d'intersection des droites BO, BO'. Le point de contact A est le centre de similitude inverse des cercles O, O';

les deux rayons homologues OB, OB′ sont donc parallèles et les triangles semblables MOB, MB′O′ donnent

$$\frac{MB'}{MO} = \frac{R'}{R}$$

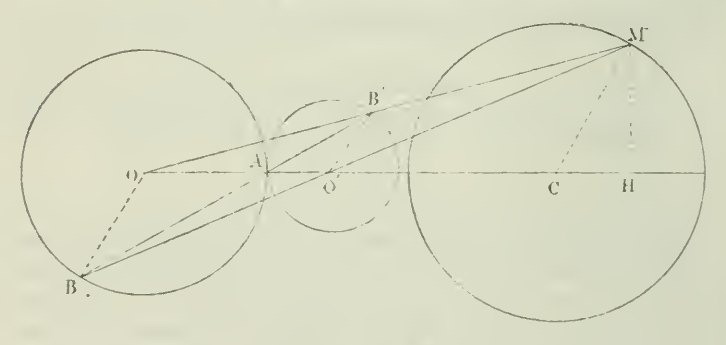
d'où

$$\frac{MO - MB'}{MO} = \frac{R - R'}{R}$$

ou

$$\frac{OB'}{MO} = \frac{R - R'}{R}.$$

Le centre O étant fixe, et le rapport $\frac{OB'}{OM}$ étant constant, le point M décrit une circonférence homothétique à la circonférence O. Pour obtenir le centre de cette circonférence il suffira de mener par le point M une parallèle MC au rayon B′O′ jusqu'à la rencontre de OO′ prolongée.



Si l'on désigne par x le rayon MC on a

$$\frac{R'}{x} = \frac{OB'}{OM} = \frac{R - R'}{R}$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{RR'}{R - R'}.$$

Il est à remarquer que le point C est le centre de similitude directe des cercles O et O′.

Discussion. — Si $R = R'$, on a $x = \infty$.

Ce qui est évident, puisque alors les droites OB′, BO′ sont parallèles.

Si $R = 2R'$, on a $x = 2R' = R$.

Le cercle C est alors tangent en D au cercle O'; car O' est le milieu de OC et $OA = x$.

Le triangle BB'M est équivalent au triangle MOO'. Ces triangles sont en effet composés d'une partie commune MO'B', et de triangles BO'B', OO'R équivalents comme ayant même base et hauteurs égales.

La base OO' du triangle MOO' étant constante, sa surface devient maxima avec la hauteur MH, c'est-à-dire pour $MH = x$; la valeur de cette surface est alors

$$\frac{1}{2} OO' \times x = \frac{1}{2} \frac{RR'(R + R')}{R - R'}.$$

Et l'aire du triangle MBB' est

$$\frac{1}{2} \frac{RR'(R + R')}{R - R'}.$$

Calcul des côtés. — On a d'abord

$$BB' = BA + B'A$$

Or

$$BA = 2R \cos \theta$$
$$BA' = 2R' \cos \theta.$$

Donc

$$BB' = 2(R + R') \cos \theta.$$

on a ensuite

$$\frac{BM}{BO'} = \frac{OM}{OB'} = \frac{R}{R - R'}.$$

D'où

$$BM = \frac{R}{R - R'} \times OB'.$$

Évaluons OB'. Le triangle BO'A donne

$$\begin{aligned} \overline{BO'}^2 &= R'^2 + \overline{AB}^2 + 2R' \,.\, AB \cos \theta \\ &= R'^2 + 4R^2 \cos^2 \theta + 4RR' \cos^2 \theta \\ &= R'^2 + 4R(R + R') \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Par suite

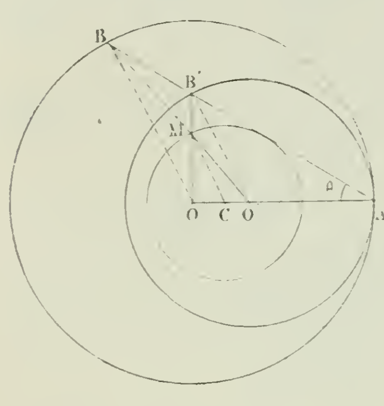
$$BM = \frac{R\sqrt{R'^2 + 4R(R + R') \cos^2 \theta}}{R - R'}.$$

On trouverait de même

$$B'M = \frac{R'\sqrt{R^2 + 4R'(R + R') \cos^2 \theta}}{R - R'}.$$

2° Les cercles O et O′ sont tangents intérieurement. Soit M un point du lieu. On verra comme plus haut qu'il décrit une circonférence homothétique à la circonférence O′ ; seulement le rapport d'homothétie est ici

$$\frac{OB'}{OM} = \frac{R + R'}{R}$$



et la valeur du rayon MC est

$$x = \frac{RR'}{R + R'}.$$

Discussion. — Si $R = R'$, on a

$$x = \frac{R'}{2};$$

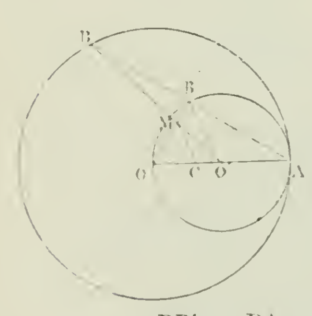
les cercles O et O′ se confondent, le point C vient au point O.

Si $R = 2R'$, on a

$$x = \frac{2}{3} R'.$$

Le cercle C est alors tangent au cercle O′, car comme le montre la figure (3) on a

$$OC = \frac{2}{3}\, OO' = \frac{2}{3} R' \text{ ou } x.$$



On vérifie facilement que le triangle MBB′ est encore équivalent au triangle MOO′. La surface maximum de ce triangle est

$$\frac{1}{2}\,\frac{RR'(R - R')}{R + R'}.$$

Calcul des côtés. — On a pour l'un des côtés

$$BB' = BA - B'A = 2(R - R') \cos \theta.$$

D'autre part on a

$$BM = \frac{R}{R + R'} \times BO'.$$

Or

$$\overline{BO'}^2 = \overline{R}^2 + 4R(R - R') \cos^2 \theta.$$

Donc

$$BM = \frac{R\sqrt{R'^2 + 4R(R - R')\cos^2\theta}}{R + R'}.$$

On aurait de même

$$B'M = \frac{R'\sqrt{R^2 - 4R'(R - R')\cos^2\theta}}{R + R'}.$$

Nota. — La même question a été résolue par M. Bourgarel, à Antibes.

VARIÉTÉS

DÉFINITIONS DES GRANDEURS ET DES NOMBRES

Par M. **A. Calinon**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 256.)

§ 13. — *Extension de l'idée de grandeur.*

Les grandeurs dont nous avons parlé jusqu'ici forment une première famille; nous allons maintenant aborder une seconde famille de grandeurs dont le type est la longueur de l'arc de courbe. Remarquons d'abord qu'en général un arc de courbe, un arc d'ellipse par exemple, n'est pas composé d'arcs partiels égaux, c'est-à-dire superposables, ce qui est le caractère distinctif des grandeurs de la première famille. Cependant on exprime, on mesure par un nombre la longueur d'un arc; mais ici il faut une définition.

Soit un arc AB; joignons les points A et B par une ligne polygonale à côtés infiniment petits remplissant les conditions suivantes :

1° Chaque côté en s'évanouissant a pour limite un point de l'arc;

2° Ce côté a pour direction limite la tangente à l'arc en ce point.

Il est évident qu'il y a une infinité de lignes polygonales

satisfaisant à ces conditions ; or, on démontre que les longueurs de ces lignes, c'est-à-dire les longueurs totales de leurs côtés développés en ligne droite, ont toutes même limite, et l'on appelle, par définition, cette limite la longueur de l'arc AB. Dès lors cette longueur d'arc se compare à un segment de droite et est mesuré par un certain nombre : l'arc rectifié est le segment de droite de même longueur.

Les différences entre ces deux familles de grandeurs sont nombreuses. Ainsi dans la première famille deux grandeurs de même espèce mesurées par le même nombre sont des figures égales, superposables : au contraire deux arcs mesurées par le même nombre ne peuvent en général être superposés.

Dire qu'un arc est égal à la somme de deux autres, cela veut dire simplement que le nombre qui mesure le premier est la somme des nombres qui mesurent les deux autres : c'est là la définition de l'addition des arcs; il n'est plus question ici, comme dans la première famille, d'un mode de groupement spécial des arcs partiels reproduisant l'arc total : de même des autres opérations arithmétiques.

En un mot, pour la première famille nous avons défini d'abord les opérations sur les grandeurs pour en déduire les opérations sur les nombres; pour la seconde famille nous suivons la marche inverse.

§ 14. — *Aires et volumes.*

Dans les géométries actuelles on définit l'aire d'un contour fermé la portion de plan contenue dans ce contour, et on passe immédiatement de là à la mesure de l'aire : il est évident que cela ne suffit pas, au point de vue de notre méthode; pour mesurer une aire, il faut d'abord savoir si elle est une grandeur de la première famille, et dans ce cas mettre en évidence la propriété caractéristique du groupement de figures égales, ou une grandeur de la seconde famille, et dans ce cas la définir comme nous avons défini la longueur d'un arc.

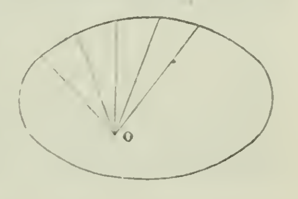
Tout ceci s'applique également aux volumes dont la théorie est traitée d'une façon analogue à celle des aires.

Avant d'exposer la théorie nouvelle, conforme aux principes posés précédemment, voyons exactement sur quelles bases repose la théorie actuelle : un examen un peu attentif nous montre que ces bases sont les principes suivants qui, formulés ou non, sont admis comme des axiomes.

1° Lorsque l'on groupe des contours fermés de façon à ce qu'ils donnent un nouveau contour total, l'aire du contour total est la somme des aires des contours partiels ;

2° Lorsque l'on décompose un contour total en un certain nombre de contours partiels, l'aire totale ou la somme des aires partielles est indépendante de la manière dont la décomposition est faite.

Ces principes sont bien clairs, bien nets et nous ne songeons pas du tout à les contester : mais voici une première objection qui se présente : prenons par exemple une ellipse, et inscrivons dans cet ellipse un polygone à côtés infiniment petits : traçons maintenant le réseau des triangles ayant pour sommet commun un point O pris dans l'ellipse et pour bases respectives les divers côtés du polygone; le périmètre du polygone a pour limite la longueur de la courbe et l'ensemble des triangles a pour limite l'aire de l'ellipse. Or, pour le premier cas, on a cru devoir démontrer que le périmètre du polygone a une limite constante, quelle que soit la loi de variations de ce polygone et l'on a pris cette limite comme longueur de la courbe, cela par définition; dès lors quelle raison a-t-on de procéder autrement pour l'aire?



Nous ne voyons pas du tout que la notion de l'aire soit plus simple que celle de la longueur du contour : au contraire, la surface est même une grandeur plus complexe, car, en dehors du mode de variation du polygone inscrit, la somme des triangles considérés peut encore varier d'une infinité de façons quand on déplace le point O; cette somme aura-t-elle donc dans tous les cas une même limite ?

Telle est la question qui a été tranchée par une définition précise et une démonstration pour la longueur de l'arc

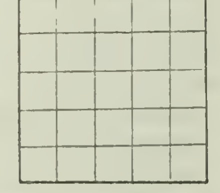
et que tranchent, au contraire, par voie d'axiomes les deux principes que nous avons rappelés ci-dessus à propos des aires.

D'où viennent donc ces deux principes qu'on nous demande d'admettre ? Qu'on parle à une personne étrangère aux mathématiques de la longueur d'un arc et de l'aire d'un contour, et l'on s'aperçoit qu'on est immédiatement compris sans que des définitions soient nécessaires : il n'en résulte pas que ce soient là des idées premières, évidentes, irréductibles et n'admettant pas de définition ; en aucune façon ; ce sont seulement des idées qu'une observation de tous les jours nous a rendues familières bien avant qu'on les aborde en mathématiques ; voilà pourquoi on ne songe pas à les discuter ; mais ici nous n'avons pas à tenir compte de ce que nous donne l'observation du monde matériel : nous faisons des mathématiques, et par conséquent nous n'avons qu'à appliquer la méthode mathématique, faite de définitions et de raisonnements purs ; ce sera d'ailleurs pour nous un contrôle des notions, antérieures aux mathématiques, que nous tenons de l'observation.

Tout ce qui précède s'applique évidemment aux volumes. Nous allons maintenant traiter la question conformément aux principes exposés plus haut.

§ 15. — *Carrés et cubes.*

Divisons chacun des 4 côtés d'un carré en 5 parties égales, par exemple, et joignons les points de division comme nous l'indiquons sur la figure ; d'après les propriétés des parallèles le carré se trouve ainsi formé d'un groupe de carrés partiels égaux entre eux et ces carrés partiels sont au nombre de 5×5 ou 5^2. Réciproquement si l'on prend un nombre de carrés égaux qui soit une seconde puissance, 5^2, on peut les grouper en un nouveau carré.



Donc le carré jouit de la propriété caractéristique des grandeurs de la première famille, puisqu'un groupement spécial de carrés égaux reproduit un carré.

Remarquons d'abord que le mode de groupement spécial à cette nouvelle grandeur est tel que le nombre des carrés groupés doit toujours être une seconde puissance. Ainsi tandis qu'on obtient des segments de droite en groupant 2, 3, 4, 5... segments égaux, on n'obtient des carrés qu'en groupant 2^2, 3^2, 4^2... carrés égaux. De même pour subdiviser le carré-unité en parties égales, il faut que le nombre de ces parties soit une seconde puissance, de sorte que ces subdivisions correspondent aux fractions $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{3^2}$, $\frac{1}{4^2}$, etc.

Enfin si l'on prend une subdivision $\frac{1}{5^2}$ de l'unité et que l'on groupe 7^2 fois cette subdivision, on aura le carré $\frac{7^2}{5^2}$. il résulte de là que les noms de tous les carrés ou les nombres qui les mesurent sont les secondes puissances de tous les nombres entiers ou fractionnaires ; de plus tout nombre comme $\frac{7^2}{5^2}$ détermine un seul carré en fonction de l'unité.

En dehors des carrés dont nous venons de parler, on peut en considérer une infinité d'autres mesurés par des nombres qui ne sont pas des secondes puissances : on démontre en effet qu'un nombre quelconque comme $\frac{8}{11}$ est la limite d'une série de nombres fractionnaires qui sont eux-mêmes des secondes puissances. Nous n'insistons pas sur ce cas qui n'offre aucune difficulté. Prenons maintenant pour carré-unité le carré dont le côté est l'unité de longueur ; il résulte de ce que nous avons dit relativement au mode de groupement des carrés que les carrés construits sur les côtés 1, 2, 3, 4... correspondent aux nombres 1, 2^2, 3^2, 4^2,... ; de même les côtés $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$... nous donnent des carrés mesurés par les nombres $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{3^2}$, $\frac{1}{4^2}$... : enfin le carré de côté $\frac{7}{5}$ a pour mesure $\frac{7^2}{5^2}$; on en déduit que le nombre qui mesure

un carré, avec le système d'unités indiqué, est le carré du nombre qui mesure son côté ; ce qui s'étend par la méthode ordinaire au cas où le côté est mesuré par un nombre incommensurable.

Nous n'aurions qu'à suivre identiquement la même marche pour le cube.

Pour terminer, signalons encore une différence entre ces deux grandeurs, carré et cube, et les précédentes : nous avons vu que pour le segment de droite, l'angle, etc., le mode de groupement spécial à chacune de ces grandeurs, lorsqu'on l'applique à des parties inégales, donne encore des grandeurs de même espèce ; au contraire, on ne peut pas en général grouper des carrés inégaux comme on groupe des carrés égaux ; de même pour les cubes. Il résulte de là que si l'on avait pris cette propriété du groupement des parties inégales comme définition des grandeurs, cette définition n'aurait pas convenu au carré et au cube.

Une seconde conséquence de cette remarque, c'est que les opérations d'addition, soustraction, etc., ne peuvent s'entendre pour le carré comme pour le segment de droite par exemple ; ainsi la somme de carrés inégaux n'est pas un nouveau carré résultant du groupement des premiers : ajouter deux carrés, c'est en trouver un troisième mesuré par un nombre égal à la somme des nombres qui mesurent les deux premiers.

Ces caractères, spéciaux au carré et au cube, font à ces deux grandeurs une place à part parmi les grandeurs de la première famille.

§ 16. — *Aire d'un contour fermé. Volume.*

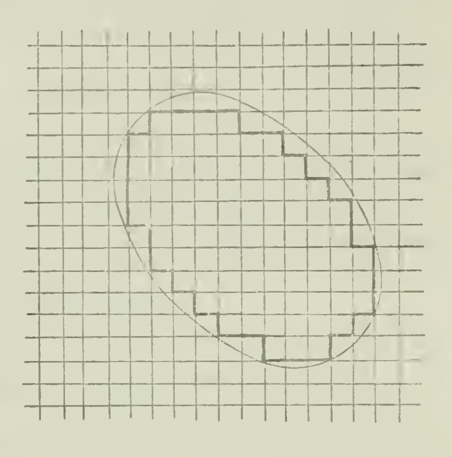
Nous considérerons l'aire d'un contour fermé comme une grandeur de la seconde famille, et nous passerons du carré à l'aire d'un contour quelconque comme on passe du segment de droite à la longueur d'un arc de courbe.

Traçons sur un plan un réseau de carrés égaux adjacents à côtés infiniment petits et plaçons notre contour sur ce réseau ; il y aura dans l'intérieur de ce contour un certain nombre de ces carrés ; cela posé, on démontre le théorème suivant :

Quel que soit le mode de variation du réseau de carrés infiniment petits, quelle que soit l'orientation du contour par rapport aux côtés des carrés, la somme des carrés compris dans ce contour a une limite constante.

Dès lors, nous appelons aire du contour cette limite : telle est la définition de l'aire.

Le volume se déduit du cube par le même procédé.



Arrivé à ce point de notre étude, nous croyons pouvoir conclure ainsi que nous l'avions annoncé au début.

Nous avons admis la notion de la forme comme empruntée à l'observation du monde extérieur : nous avons ensuite écarté toutes les autres notions empruntées à l'observation en définissant, à l'aide de la forme, le nombre arithmétique, le nombre algébrique, puis les aires et les volumes.

Il ne reste donc plus en géométrie, en arithmétique et en algébrique que la seule notion de la forme tirée de l'observation. Ce fait d'observation unique suffit pour établir ces trois sciences par la méthode purement mathématique.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PARIS

— Soient a', b', c', les médianes d'un triangle rectangle quelconque, on demande de trouver, entre ces trois quantités, une relation qui ait lieu quel que soit le triangle rectangle considéré.

— Calculer le rayon d'un cercle, sachant que la différence entre l'aire de l'octogone régulier inscrit et l'aire de l'hexagone régulier inscrit est égale à 1^{m^2}.

— Trouver les valeurs de l'angle x qui satisfont à l'équation

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg} x = 8 \cos^2 x.$$

— Trouver les valeurs de x entre o et 2π qui satisfont à l'équation

$$\sin 2x = \cos 3x.$$

— Lieu géométrique de tous les points de l'espace à égale distance de deux droites qui se coupent.

— Quelle condition doivent remplir les coefficients a, b, c, pour que la fraction

$$\frac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + bx + a}$$

puisse prendre toutes les valeurs, positives ou négatives.

— Trouver les limites entre lesquelles h doit être compris, pour que l'inégalité

$$x^2 + 2hx + h > \frac{3}{16}$$

soit vérifiée pour toutes les valeurs réelles de x.

— On considère l'expression $a \cos 2\theta + b \sin 2\theta$; on demande de la calculer, sachant que $\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a}$.

— Étant donnés dans l'espace deux points A et B, on demande de trouver le lieu géométrique du point M, tel que le rapport $\frac{MA}{MB}$ de ses distances à A et B soit constant.

— Étant donné un triangle ABC, mener par A une droite AD, telle que, en abaissant des points A et B des perpendiculaires BB' et CC' sur cette droite, on ait $\overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2 = m^2$; quelle est la condition pour que le problème soit possible?

— On élève à l'une des extrémités B d'un diamètre AB

d'un cercle une perpendiculaire. Déterminer sur cette perpendiculaire un point C tel que, en le joignant à l'autre extrémité du diamètre, la portion CD située en dehors du cercle ait une longueur donnée a.

— Un triangle équilatéral ABC, dont le côté est a, tourne autour de l'axe Ax, mené dans son plan par le sommet A perpendiculairement au côté AB. Exprimer au moyen de a le volume décrit par la rotation du triangle.

CAEN

— Calculer l'heure moyenne à laquelle se couchera, le 22 avril, une étoile dont la déclinaison est nulle. et dont l'ascension droite est égale à $68° 36' 45''$, sachant que, le même jour, à midi moyen, l'heure sidérale est $2^h 4^m 17^s$, et que la différence entre le jour sidéral et le jour moyen est de 236 secondes de temps moyen.

— Quelles valeurs faut-il donner à p et q pour que les racines de l'équation du second degré $x^2 + px + q = 0$ soient précisément égales à p et à q?

— Résoudre un triangle connaissant un côté, le périmètre, et le rayon du cercle circonscrit.

BORDEAUX

Session de juillet. — Composition unique.

— Étant données une circonférence de rayon R, et une tangente AT à cette circonférence, mener un rayon OM faisant avec OA un angle α tel que la somme des distances du point M au point A et à la droite AT soit égale à m fois le rayon R. On déterminera les limites entre lesquelles m doit être compris pour que le problème soit possible.

— Trouver l'angle x qui satisfait à l'équation

$$\sin 7x - \sin x = \sin 3x.$$

— Vérification des lois de la réflexion de la chaleur : 1° par les miroirs conjugués; 2° par l'emploi du thermomultiplicateur.

— Propriétés et préparation du cyanogène. Calculer le volume d'oxygène mesuré à 0°, et sous la pression de 760 nécessaire pour brûler complètement le gaz formé par la décomposition de 125 gr. de cyanure de mercure. Équivalents : carbone, 6; azote 14; oxygène 8; mercure 100.

Session de Novembre. — Composition unique.

— Dans un triangle isoscèle ABC, mener une parallèle xy à la base, telle que la figure tournant autour de xy, le volume engendré par le triangle Axy soit équivalent au volume engendré par le trapèze xyCB.

— Trouver deux nombres tels que leur produit soit 15, et que leur somme ajoutée à la somme de leurs carrés soit égale à 42.

— Un corps dont la densité égale 6,5 pèse 140 gr. dans l'eau; calculer son poids dans l'air.

— Phénomènes offerts par un rayon de lumière blanche dans son passage à travers un prisme.

— Préparation et propriétés de l'ammoniaque.

GRENOBLE

— On donne une circonférence, et un point B situé sur le rayon OA, à une distance x de O; par le point B, on mène la corde CD perpendiculaire à OA, et on mène les tangentes en C et D, qui se rencontrent sur OA en E. Sur BE comme diamètre, on décrit une circonférence O′, qui coupe la première en E et F; on mène OE, O′E, OF, O′F; démontrer que les angles OEO′, OFO′ sont droits. Calculer la longueur de la corde commune EF; déterminer x de façon que la surface du quadrilatère OEO′F soit égale à la surface du triangle CDE.

— L'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à l'unité; calculer les côtés, sachant que le volume engendré par le triangle en tournant autour de l'hypoténuse, est dans un rapport donné m avec la somme des surfaces engendrées par les deux côtés de l'angle droit. — Discussion.

POITIERS

Une droite Ox fait des angles α et β avec deux droites fixes OA, OB; on prend $OB = d$, et on demande de déterminer sur Ox, par sa distance au point O, un point M tel que le rapport $\frac{MB}{MP}$ de ses distances au point B et à la droite OA soit égal à un nombre donné k: discussion lorsque OA change de direction.

— L'observatoire de Turin et le clocher du lycée de Tournon ont pour latitude commune 45°4′2″, et pour longitudes respectives 5°21′25″ et 2°29′56″, toutes les deux à l'est. La terre est supposée sphérique; la circonférence d'un grand cercle vaut 40000 kilomètres; on demande d'évaluer en mètres : la longueur de l'arc de parallèle compris entre les deux points ci-dessus; la longueur de la corde de cet arc; la longueur de l'arc du grand centre ayant même corde.

MONTPELLIER

— Dans un quadrilatère ABCD, les angles B et D sont droits; on connaît la diagonale $AC = a$, le périmètre $2p$, et la surface S. Déterminer les côtés $AB = x$, $BC = y$, $CD = x'$, $DA = y'$. On pourra poser $x + y = p + u$, u étant une inconnue auxiliaire.

TOULOUSE

Session de juillet, composition unique.

— Étant donné un triangle ABC, que l'on fait tourner autour d'un de ses côtés AB de façon qu'il effectue une révolution complète, on demande d'évaluer, en fonction du côté AB et des angles adjacents A et B : 1° la somme des surfaces engendrées par les côtés AC et BC; 2° le volume engendré par la surface du triangle ABC. — Étant données la base AB et la somme des angles A et B, pour quelle valeur de ces angles le volume précédent sera-t-il le plus grand possible?

— Décrire le microscope composé. Expliquer la formation des images. Dire comment on emploie ce microscope pour l'examen des objets transparents.

— On demande d'exprimer en degrés centigrades la température d'un four au moyen de l'expérience suivante : un morceau de cuivre pesant 50 grammes est chauffé dans le four; on le plonge rapidement dans un calorimètre à glace; il y fond 30 centimètres cubes d'eau. La chaleur spécifique du cuivre est 0,095; la chaleur latente de fusion de la glace est 80.

Session de Novembre. Composition unique.

— Démontrer que si une fraction $\frac{a}{b}$ est équivalente à une fraction irréductible $\frac{\alpha}{\beta}$, a et b sont des équimultiples de α et β.

— Partager un arc de cercle donné en deux parties telles que la somme des cordes sous-tendues par ces arcs ait une valeur donnée. Maximum ou minimum de cette somme. Même question pour la différence des deux cordes, pour leur produit et pour la somme de leurs carrés.

— Balance de précision. Description. Conditions de sensibilité. Usages.

— Un miroir concave a deux mètres de rayon. Un objet rectiligne, dont la longueur est $0^{m}, 50$ est placé sur l'axe à une distance du miroir égale à 3 mètres et perpendiculaire à l'axe. On demande la position et la grandeur de l'image.

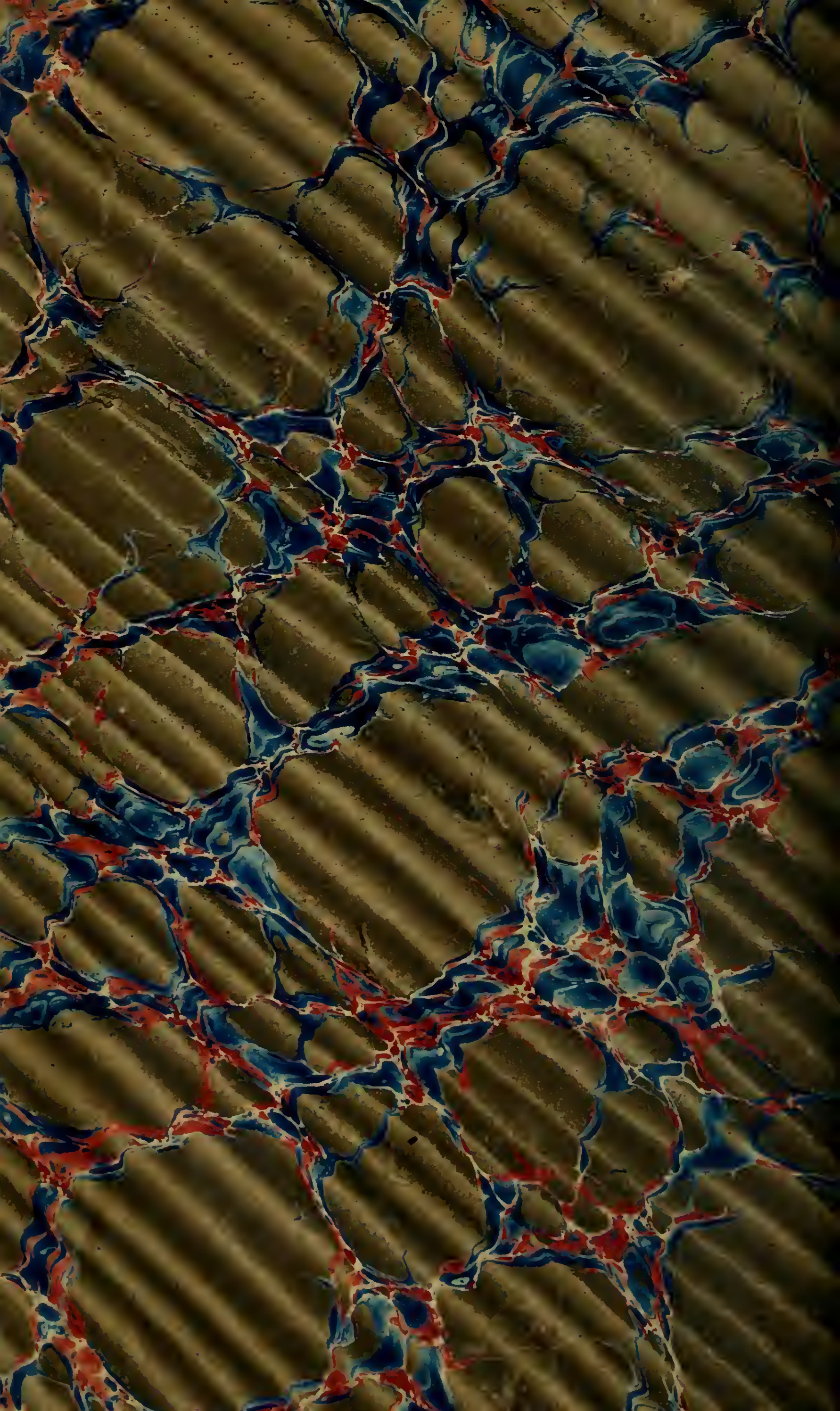
Le Rédacteur-Gérant,

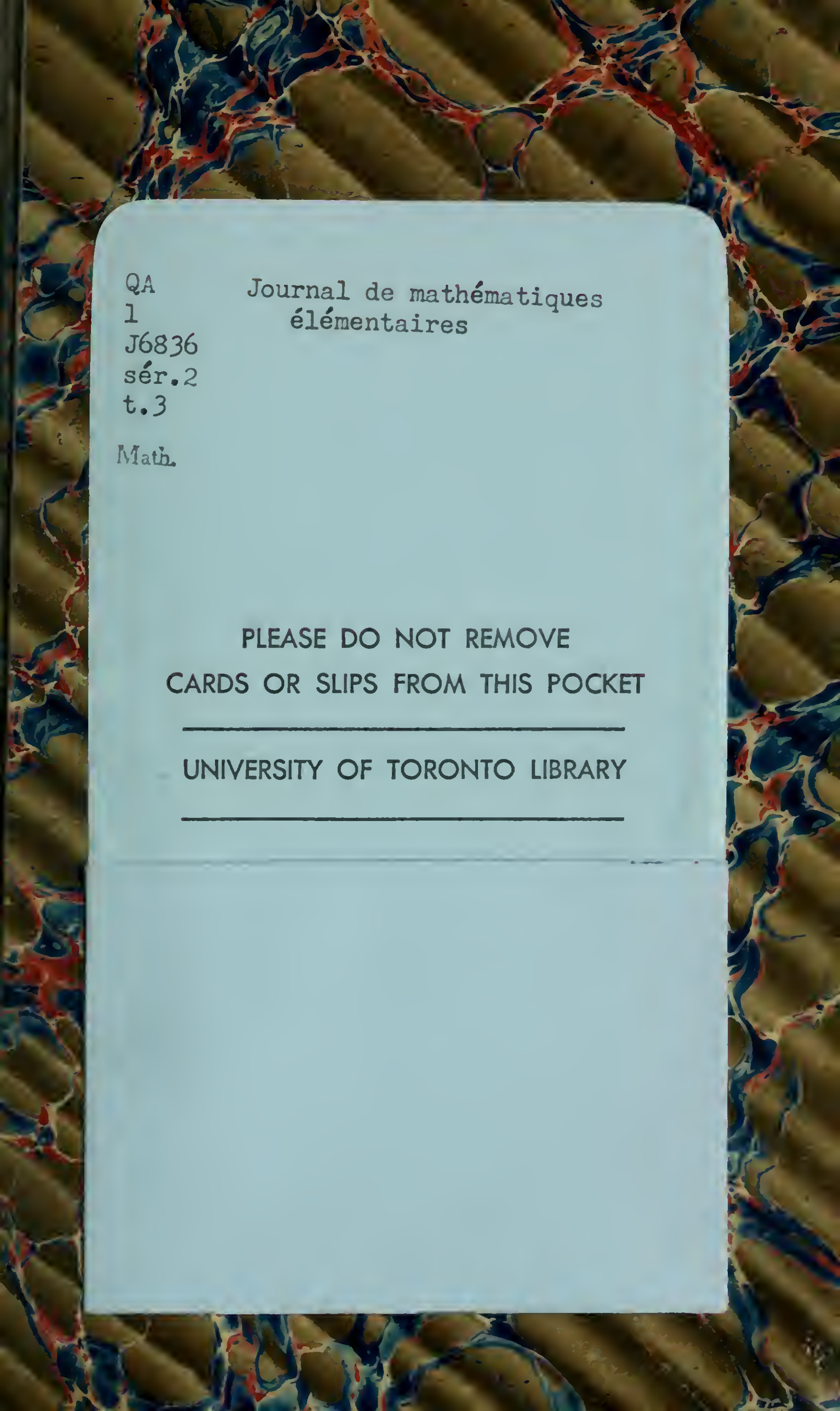
E. VAZEILLE.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 28096-4.




QA
1
J6836
sér.2
t.3
Math.
Journal de mathématiques
élémentaires
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

